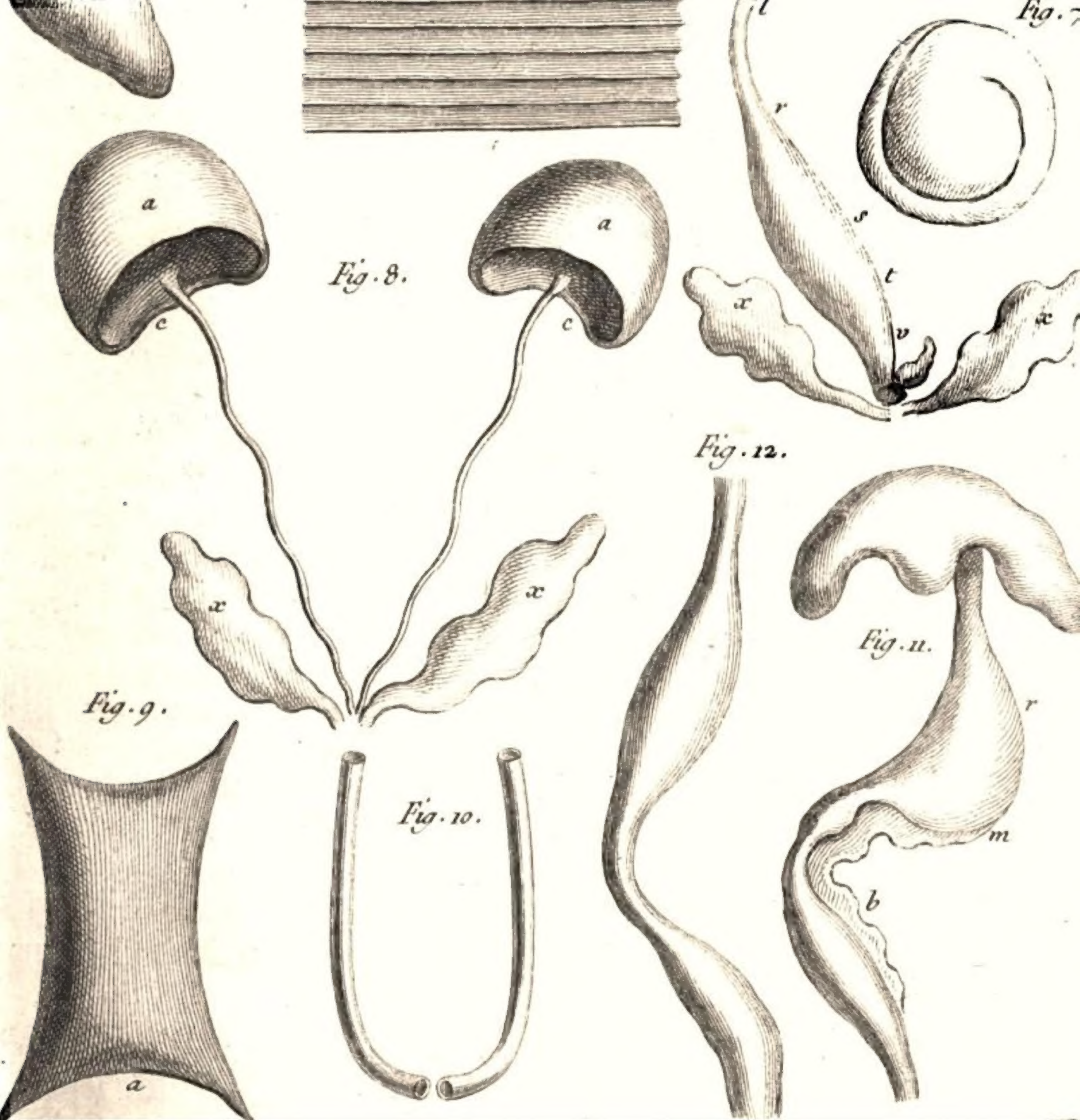
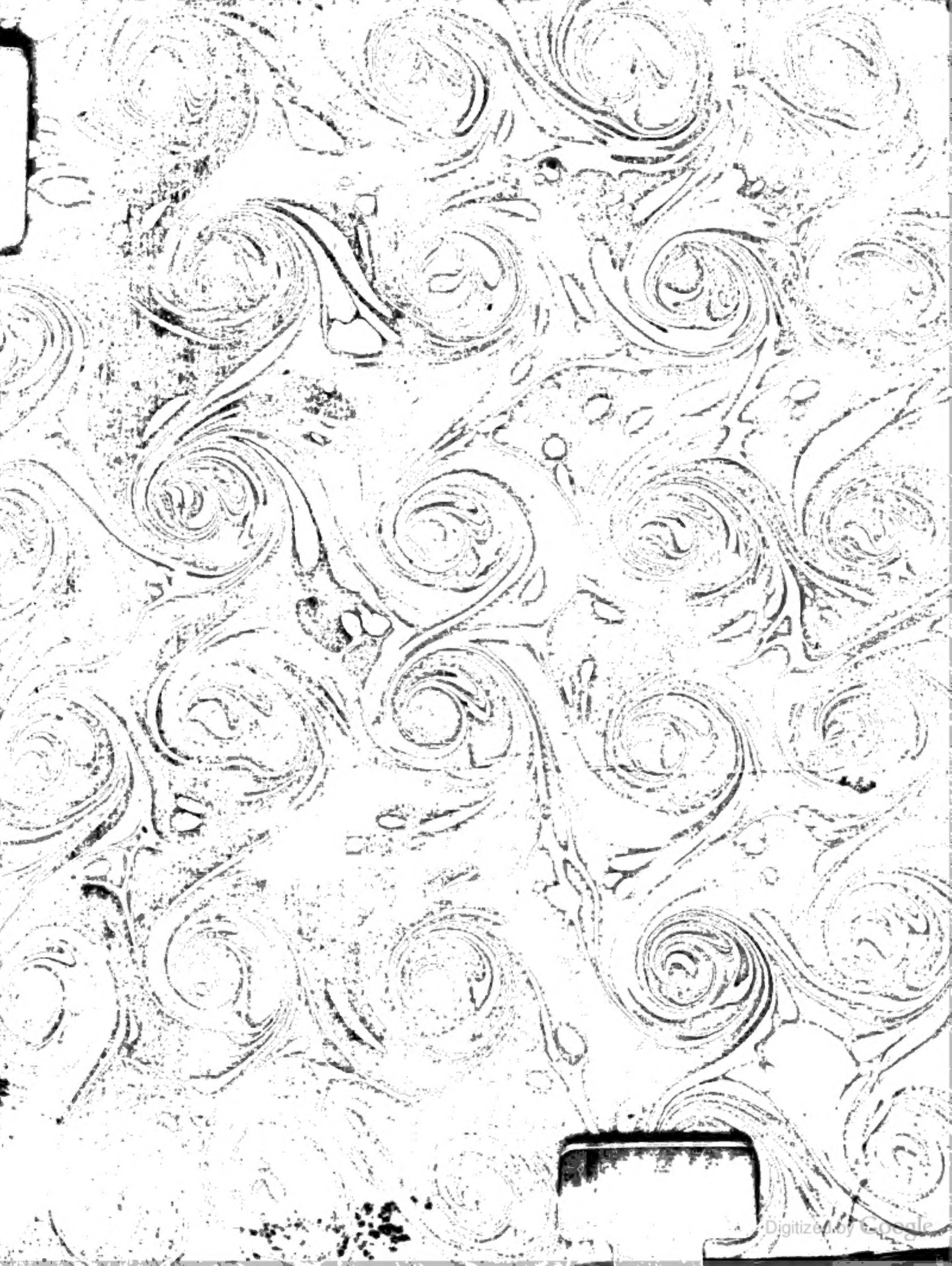
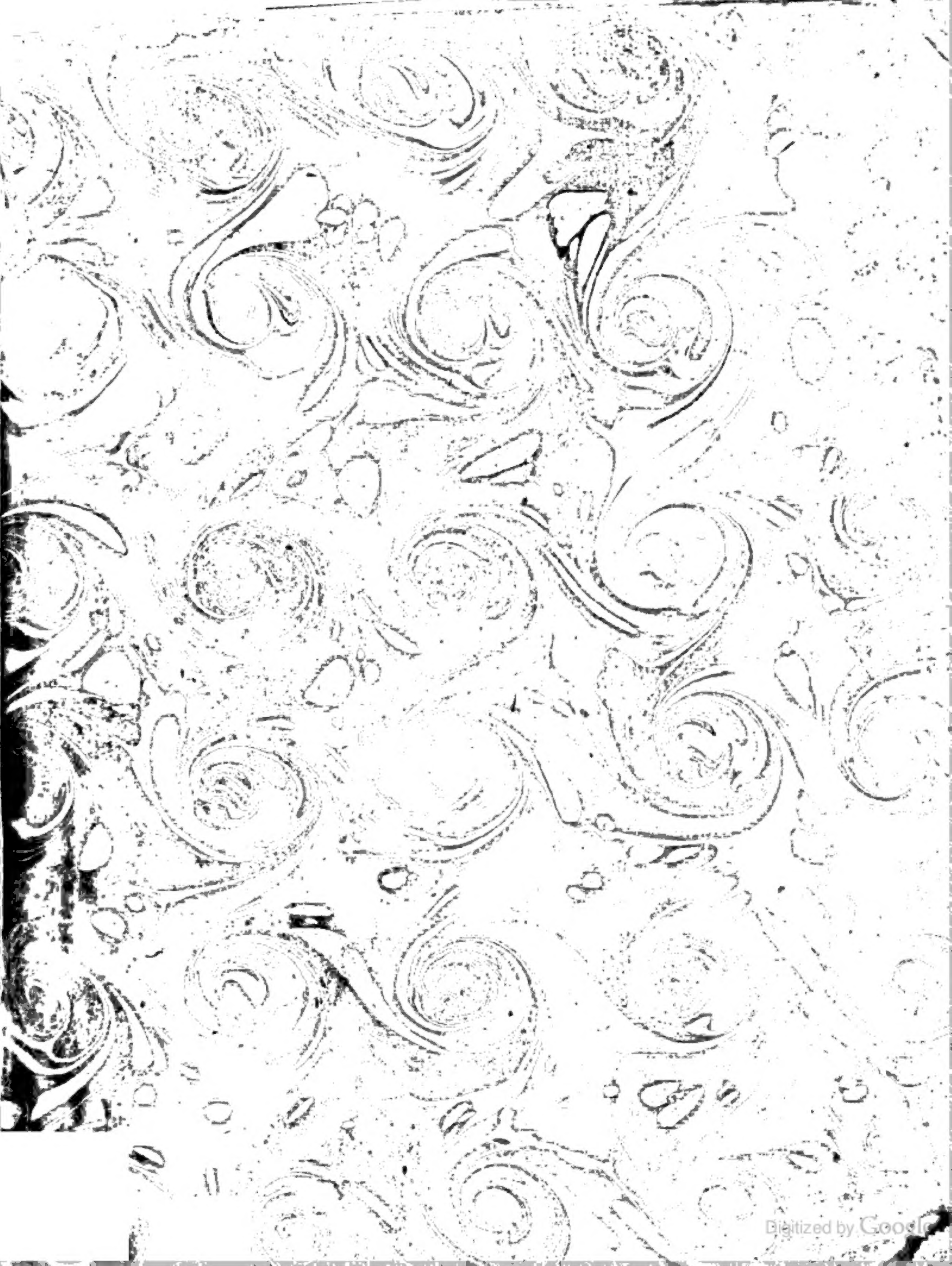


Memoires de mathematique et de physique presentés a l'Academie ...

Académie des sciences (Francia)





MÉMOIRES
DE
MATHÉMATIQUE
ET
DE PHYSIQUE,

Préſentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers Savans, & lûs dans ſes Aſſemblées.

Année 1773.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCLXXVI.





TABLE DES MÉMOIRES

Contenus dans ce Volume.

PRIX de l'Académie Royale des Sciences, pour l'année 1774.

MÉMOIRES.

TABLE.



ERRATA pour la Pièce de M. DE LA GRANGE.

PAGE 15, lignes 7, 8 & 10, au lieu de α, *lisez* &c.
Page 23, lignes 4 & 16, même correction.

ERRATA pour les Mémoires de M. DE LA PLACE.

PAGE 41, ligne 23, au lieu de ${}^{x-1}H_x \cdot y_{x+n}$, lisez ${}^{x-1}H_x \cdot y_{x-n}$.
Page 63, ligne 8, au lieu de ${}'X_x$, lisez X_x. & au lieu de X_x, lisez ${}'X_x$.
Page 139, article 31 à la fin, ajoutez ce qui suit:

On peut résoudre le Problème précédent par la méthode des combinaisons d'une manière extrêmement simple que voici:

Les mêmes choses étant supposées que dans le Problème précédent; soit de plus i le nombre des corps qui manquent au joueur C, en sorte que l'on ait $x = m + n + i$; il est évident que le jeu doit finir au plus tard en $x - 2$ coups; donc le nombre de tous les cas possibles multipliés chacun par leur probabilité particulière, est .... $(p + q + r)^{m+n+i-2}$. Pour avoir le nombre de tous les cas dans lesquels le joueur A gagne, il faut développer le trinome $(p+q+r)^{m+n+i-2}$, & n'admettre que les termes dans lesquels p a un exposant égal ou plus grand que m; soit donc $H \cdot p^{m+\mu} \cdot q^{\nu} \cdot r^{n+i-2-\mu-\nu}$ un de ces termes; si les exposans de q & de r sont l'un moindre que n, & l'autre moindre que i, il faut admettre ce terme en entier; mais si l'exposant de q, par exemple, est égal ou plus grand que n, il faut rejeter de ce terme toutes les combinaisons dans lesquelles q arrive n fois avant que p arrive m fois. Soit donc $\nu = n + \lambda$; j'observe, cela posé, que ces combinaisons sont 1.° celles dans lesquelles p étant arrivé $m - 1$ fois, q est arrivé précisément n fois; 2.° à celles dans lesquelles p étant arrivé $m - 2$ fois, q est arrivé $n + 1$ fois; 3.° à celles dans lesquelles p étant arrivé $m - 3$ fois, q est arrivé $n + 2$ fois, &c. & ainsi de suite jusqu'à la combinaison dans laquelle p étant arrivé $m - \lambda - 1$ fois, q est arrivé $n + \lambda$ fois, si cependant λ n'excède pas $m - 1$; car autrement, il faudroit

s'arrêter à la combinaison dans laquelle p n'arrive point du tout; présentement le nombre des cas dans lesquels sur $m+n-1$ coups, p arrivera $m-1$, & q, n fois est, comme l'on sait, $\frac{\Delta(m+n-1)}{\Delta(n).\Delta(m-1)}$; mais comme dans le terme $H.p^{m+\mu}.q^{n+\lambda}.r^{i-2-\mu-\lambda}$, p arrive $m+\mu$ fois, & $q\,n+\lambda$; il faut multiplier $\frac{\Delta(m+n-1)}{\Delta(n).\Delta(m-1)}$ par le nombre des combinaisons dans lesquelles p arrivant $\mu+1$ fois, q arrive λ fois; or le nombre de ces combinaisons est $\frac{\Delta.(\mu+\lambda+1)}{\Delta.(\mu+1).\Delta(\lambda)}$; donc on aura $\frac{\Delta(m+n-1).\Delta.(\mu+\lambda+1)}{\Delta(n).\Delta.(\lambda).\Delta(m-1)\Delta(\mu+1)}$, pour le nombre des combinaisons dans lesquelles q est arrivé n fois, lorsque p n'est encore arrivé que $m-1$ fois; on trouvera pareillement $\frac{\Delta(m+n-1).\Delta(\mu+\lambda+1)}{\Delta(n+1).\Delta(\lambda-1).\Delta(m-2).\Delta(\mu+2)}$ pour le nombre des cas dans lesquels q est arrivé $n+1$ fois, lorsque p n'est encore arrivé que $m-2$ fois, & ainsi de suite; soit donc

$$Q_{\mu+\lambda}=\left[1+\frac{\lambda.(m-1)}{(n-1).(\mu+2)}+\frac{\lambda.(\lambda-1).(m-1).(m-2)}{(n+1).(n+2).(\mu+2).(\mu+3)}+\&c.\right]$$
$$\times\frac{\nabla(m+n-1)\,\nabla(\mu+\lambda)}{\nabla(n).\nabla(m-1)\nabla(\mu+1)\nabla(\lambda)}\times p^{m+\mu}.q^{n+\lambda}.r^{i-2-\mu-\lambda};$$

que l'on désigne par $(Q_{\mu+\lambda})$ la somme de tous les termes que l'on peut former, en donnant à μ & à λ, dans $Q_{\mu+\lambda}$, toutes les valeurs possibles en nombres entiers & positifs depuis zéro, de manière cependant que $\mu+\lambda$ n'excède jamais $i-2$; que l'on exprime ensuite par $(R_{\mu+\lambda})$ ce que devient $(Q_{\mu+\lambda})$, lorsqu'on y change q en r, n en i, & réciproquement; cela posé, la probabilité de A pour gagner, sera

$$\frac{1}{(p+q+r)^{m+n+i-2}}.\left\{\begin{array}{l}p^{m+n+i-2}+\frac{m+n+i-2}{1}.p^{m+n+i-3}.(q+r)+\&c.\\ \qquad+\frac{(m+n+i-2)\ldots(m-1)}{1.2.3\ldots(n-2)}.p^{m}.(q+r)^{n+i-2}\\ -(Q_{\mu+\lambda})-(R_{\mu+\lambda}).\end{array}\right.$$

La même méthode a également lieu, quel que soit le nombre des joueurs.

Page 171, ligne 3, au lieu de $-\frac{bb-cc}{2aa}$. cof. 2ϖ; *lifez* $+\frac{bb-cc}{2aa}$. cof. 2ϖ.

Page 201, article 52 à la fin, ajoutez: On peut confulter auffi la feconde partie des Mémoires de l'Académie pour l'*année 1772*, on y trouvera toute la théorie du mouvement des Planètes, difcutée par une Méthode d'approximation entièrement nouvelle.



PRÉFACE.

PRÉFACE.

LES Mémoires envoyés par les Savans qui ne ſont pas Membres de l'Académie, demeuroient dépoſés dans ſes Regiſtres, après avoir été examinés par elle: ſeulement lorſqu'ils contenoient ou des découvertes ou des vues nouvelles, le Secrétaire de l'Académie en faiſoit mention dans l'Hiſtoire.

M. de Fouchy a propoſé, il y a vingt-cinq ans, de faire imprimer la collection de ces Mémoires au nom de l'Académie. Le premier Volume a paru en 1750, & le ſixième, l'année dernière. Rien n'étoit plus propre à exciter l'émulation des Savans, que l'eſpérance de voir leurs Ouvrages publiés par l'ordre d'une Compagnie juſtement reſpectée pour la ſageſſe & l'équité de ſes jugemens. Auſſi le nombre des Mémoires envoyés à l'Académie eſt-il augmenté au point qu'elle peut eſpérer de publier un Volume chaque année; & par-là de faire jouir plus tôt, & les Auteurs de la gloire que méritent leurs travaux, & le Public des lumières ou de l'utilité qu'il peut en retirer. Le Volume qui paroît maintenant eſt pour l'année 1773.

L'Académie a décidé que le Volume de chaque année commenceroit par les Pièces à qui le Prix de l'année ſuivante auroit été donné. Ainſi ce Volume de 1773, contiendra la pièce couronnée en 1774 pour le Prix d'Aſtronomie-phyſique, & le Mémoire auquel a été donné un Prix extraordinaire ſur la meilleure manière de faire le *Flint-glaſſ*.

Comme ces Pièces traitent de queſtions ou très-importantes pour le progrès des Sciences, ou d'une

grande utilité : Comme ces questions excitent la curiosité des Savans de l'Europe entière, ou sont même l'objet de leurs travaux, & que les Ouvrages couronnés soumis par les plus illustres Savans de l'Europe au jugement d'une Académie dont ils ambitionnent le suffrage, sont presque toujours d'excellens traités, & ont souvent été des chefs-d'œuvres ; l'Académie se voyoit avec peine forcée d'en retarder la publication jusqu'au moment où elle pouvoit en former un Volume.

PRIX D'ASTRONOMIE-PHYSIQUE.

LE sujet du Prix de l'année 1774, étoit d'*examiner si l'on pourroit expliquer l'équation séculaire de la Lune, soit par les perturbations qu'excite dans le mouvement de cette Planète l'attraction de tous les corps célestes, soit par l'effet qui peut résulter de la non-sphéricité de la Terre & de la Lune.*

Page 1. M. de la Grange, Auteur de la pièce couronnée, n'a pas cru qu'il y eût rien à ajouter aux recherches de M.^rs d'Alembert & Euler, sur l'altération que l'action du Soleil & des Planètes peut causer dans le mouvement de la Lune, & il se contente de conclure avec eux que cette action ne produit point d'accélération dans le moyen mouvement. Il examine ensuite l'effet qui peut résulter de la non-sphéricité des deux Planètes, & il trouve encore qu'il n'en peut résulter d'accélération du moyen mouvement.

On sait que cette accélération, si elle étoit réelle, produiroit, dans la formule qui exprime le moyen mouvement un terme proportionnel au quarré des temps, ou en général, à une puissance des temps ; mais cette accélération peut n'être qu'apparente, & alors on doit

avoir dans cette même valeur un terme exprimé en ſinus, qui ne diffère d'un terme proportionnel au quarré des temps qu'après un très-grand nombre de révolutions.

M. de la Grange a donc examiné ſi dans les termes que la non-ſphéricité de la Lune & de la Terre introduit dans l'expreſſion des forces qui agiſſent ſur la Lune, il n'y en avoit point qui pût produire de ces formules en ſinus, & expliquer par-là une accélération apparente dans le moyen mouvement: il n'en a trouvé aucun.

Ces réſultats ont engagé M. de la Grange à examiner les obſervations d'après leſquelles on avoit établi cette accélération apparente, & il conclud de cet examen que l'on ne parvient point à accorder d'une manière ſatisfaiſante les obſervations anciennes & les modernes, en ſuppoſant dans les formules qui donnent le mouvement de la Lune, un terme qui donne, ſoit une accélération réelle, ſoit une accélération apparente dans le moyen mouvement.

Il réſulte donc des recherches de M. de la Grange; 1.° que l'hypothèſe d'une accélération réelle ou apparente dans le mouvement moyen de la Lune, n'eſt pas néceſſaire pour concilier les obſervations anciennes & modernes, qu'elle ne peut même y ſervir: 2.° Que la non-ſphéricité de la Terre & de la Lune ne donne dans les équations de l'orbite de cette dernière Planète aucun terme dont on puiſſe conclure l'exiſtence de cette accélération.

Si les Planètes ſe meuvent dans un fluide réſiſtant, il en doit naître une accélération réelle dans le moyen mouvement, ſi cette accélération eſt telle que les obſervations l'ont fait ſoupçonner dans le mouvement de la Lune, elle ſera cent trois fois plus petite, & par conſéquent preſque inſenſible pour la Terre. Des termes

produits par l'action de Jupiter dans les équations de l'orbite de Saturne suffisent pour expliquer comment cette Planète pourroit avoir une retardation apparente dans son moyen mouvement, malgré l'accélération réelle causée par la résistance de l'éther (voyez *la Dissertation de M. l'Abbé Bossut, qui a remporté le Prix en 1762)*. Ainsi, dans le cas où les observations forceroient à supposer à la Lune une équation séculaire, la résistance de l'éther en donneroit une explication suffisante, & qui s'accorderoit avec la théorie des autres Planètes.

Page 163. M. de la Place a inséré dans ce Volume un Mémoire où il traite les mêmes questions. Il convient, avec M. de la Grange, que la théorie de la gravitation ne donne point d'équation du moyen mouvement aussi grande que les observations semblent le demander. Il en cherche donc une autre cause, & comme la résistance de l'éther lui paroît insuffisante, il imagine de faire un léger changement à la loi de la gravitation établie par Newton, en supposant que cette force n'agit pas également sur un corps en mouvement & sur un corps en repos, & qu'elle dépend non-seulement des distances des corps & de leurs masses, mais encore de leurs vîtesses.

M. de la Place prétend aussi que la supposition d'une équation du moyen mouvement peut concilier les anciennes observations de la Lune avec les modernes.

Ces questions si intéressantes par leur utilité, par leur difficulté & par l'honneur qu'elles font à l'esprit humain, ont souvent produit de telles discussions, qui bien loin d'avoir des Juges, trouvent à peine dans l'Europe entière, un petit nombre de spectateurs.

Finissons par une observation.

Si l'on s'en tient à la théorie seule, on n'a point dans les méthodes d'approximation connues jusqu'ici, de

moyen sûr de connoître si une formule doit contenir une quantité toujours croissante, ou une quantité en sinus qui le représente tant qu'elle n'excède pas certaines limites.

Ainsi, comme l'on n'a jamais d'observations que pour un temps fini, tout ce qui peut résulter de la comparaison des observations avec la théorie, c'est de savoir laquelle des deux hypothèses représente les observations le plus exactement, & avec un moindre nombre de termes.

PRIX EXTRAORDINAIRE.

NEWTON, à qui on doit la découverte de la différente réfrangibilité des rayons de la lumière, soupçonna que cette différence n'étoit pas la même dans les verres d'une densité plus ou moins grande, & qu'il devoit en résulter un moyen de corriger l'aberration de réfrangibilité; mais quelques expériences que Newton n'eut pas le temps de suivre, le trompèrent & lui firent abandonner cette vue. M. Euler a rectifié & perfectionné les idées de Newton sur cet objet; il proposa, dans les Mémoires de Berlin, *année 1743*, des moyens de détruire l'aberration de réfrangibilité, en formant des objectifs composés de matières différemment réfringentes. Page 62.

M. Dollond se proposa de défendre Newton contre M. Euler, mais il se vit bientôt obligé d'adopter le sentiment du Savant qu'il avoit voulu combattre; & ce fut en suivant les traces qu'il parvint à trouver ces objectifs formés de deux verres, qui ont tant contribué à la réputation de cet Opticien célèbre.

Les lunettes achromatiques ont tant d'avantages sur les autres télescopes pour les observations astronomiques, que les Géomètres & les Astronomes ont tourné leurs

vues vers la perfection de ces Lunettes ; & même les Gouvernemens n'ont pu voir avec indifférence des inſtrumens qui promettoient à la Navigation de ſi grands avantages.

La perfection de ces lunettes dépend de deux cauſes étrangères l'une à l'autre, des dimenſions du verre & de ſa bonté intrinsèque. Deux illuſtres Géomètres, M.[rs] Euler & d'Alembert ont publié ſur le premier objet des Ouvrages étendus. Pluſieurs autres Mathématiciens s'en ſont occupés ; & pour que cette partie de la conſtruction des lunettes ſoit portée au plus haut point, il ſuffit du zèle des Savans pour le progrès des Sciences ; ils n'ont beſoin d'aucun encouragement. Il n'en eſt pas de même des moyens de perfectionner le verre ; les eſſais en ce genre ſont très-coûteux, il faut même les faire en grand, parce que c'eſt ſur-tout de grands objectifs qu'on a beſoin ; les Aſtronomes ſont peu riches, & il n'y a en France qu'un petit nombre d'Amateurs de l'Aſtronomie ; par conſéquent le débit de ces objectifs ne produiroit que des avantages très-peu conſidérables. Auſſi quelqu'imparfait que ſoit le verre peſant d'Angleterre, qu'on nomme *flint-glaſſ*, nous ſommes encore obligés d'y avoir recours pour nos lunettes.

Le Gouvernement a cru devoir encourager en France la fabrication de cette eſpèce de verre, & en conſéquence, il a propoſé un Prix pour celui qui, au jugement de l'Académie des Sciences, auroit fait ou enſeigneroit à faire le meilleur *flint-glaſſ*, c'eſt-à-dire, le verre le plus peſant, le plus exempt de bulles ou de points, qui auroit le moins de fils, qui n'offriroit point ce coup-d'œil gélatineux qu'a ſouvent le verre d'Angleterre. L'Académie après avoir remis le Prix pluſieurs fois, a enfin couronné l'Ouvrage inſéré dans ce Volume.

L'Auteur n'y donne point une méthode raisonnée de faire du *flint-glaſſ* exempt de défauts, ni une théorie ſur les cauſes de ces défauts, & ſur les moyens de les éviter. Il ſe borne à propoſer quelques mélanges de ſable, de minium & de fondans qui lui ont donné de bon *flint-glaſſ*, & à y joindre des remarques ſur la manière de fabriquer le verre, qu'il a puiſées dans une longue pratique de l'art de la Verrerie. L'Académie a cru que, vu l'utilité & la difficulté de la queſtion propoſée, elle devoit encourager des efforts & des eſſais qui donnent au moins des eſpérances.

CE Volume contient:

Un Mémoire de Minéralogie.
Un de Botanique.
Quatre d'Anatomie.
Trois ſur l'Hiſtoire naturelle des Animaux.
Deux d'Hiſtoire Météorologique.
Deux de Chimie.
Cinq d'Analyſe.
Un de Mécanique rationnelle.
Un d'Hydroſtatique.
Trois d'Obſervations aſtronomiques.
Deux d'Aſtronomie théorique.
Et un ſur les Arts.

MINÉRALOGIE.

Voyage ſouterrein. Par M. Marcorelle.

CE Mémoire contient la deſcription de quelques grottes Page 565.
du Rouſſillon, du pays de Foix & du Languedoc.

Elles ſe trouvent dans des montagnes calcaires, & ne renferment en général que des ſtalactites ou des concrétions de la même nature.

BOTANIQUE.

Sur le Cocos de l'île Praſlin.

Page 263. M. SONNERAT donne dans ce Mémoire la deſcription de l'arbre qui produit le Cocos de mer. Comme on avoit ignoré juſqu'ici l'origine de ce fruit que la mer portoit aux îles Maldives, les habitans de ces îles lui ſuppoſoient une origine & des propriétés merveilleuſes. M. Sonnerat a trouvé aux îles Praſlin l'arbre à qui l'on doit ce Cocos qui perdra toute ſa réputation, du moment où il ſera connu ; & c'eſt un ſort bien commun dans la Société, comme dans la Nature.

ANATOMIE.

Sur le Cerveau & les Nerfs de la dixième paire.

Pages 553 & 593. LES deux Mémoires de M. Sabatier ont pour objet de rectifier & de compléter ſur quelques points les deſcriptions que les Anatomiſtes ont données, du cerveau & des nerfs.

Il prouve, par exemple, que les nerfs de la dixième paire naiſſent de la moelle épinière, & que dans la plupart des ſujets, ils ſont ſemblables aux autres nerfs qui ont la même origine, à quelques caractères près, qui les rapprochent des nerfs qui naiſſent du cerveau; mais cependant dans quelques ſujets où ces nerfs conſervent toujours

toujours leur même origine, ils ont avec ceux qui viennent du cerveau, une ressemblance beaucoup plus marquée.

Observations sur une extrémité dont les muscles ont été changés en tissu graisseux, sans aucune altération dans la forme extérieure.

Ce n'est ici qu'une simple observation d'un phénomène déja connu; mais celle-ci est précieuse en ce que M. Vicq-d'Azir a pu y observer par degrés la métamorphose des fibres musculaires en membranes cellulaires. Page 301.

Observation d'une Tête exostosée. Par M. Ripert.

Les os de cette tête pesoient quatre fois plus que ceux d'une tête ordinaire. Il suffit de jeter les yeux sur le dessin qui la représente, pour voir que la forme n'en étoit pas moins monstrueuse que la masse. Cependant le sujet de cette observation est mort à quarante-cinq ans, d'une fièvre putride, sans jamais s'être plaint d'aucune douleur dans la tête ou dans la mâchoire, & sans que cette maladie extraordinaire qui l'attaqua dès l'âge de douze ans, ait paru nuire aux progrès de son esprit. Page 336.

HISTOIRE NATURELLE DES ANIMAUX.

Sur les Os des Oiseaux.

M. Camper développe dans ce Mémoire un phénomène qu'il a découvert le premier; c'est que les os des oiseaux qu'on savoit déjà être vides de moelle, Page 328.

& même contenir de l'air, reçoivent cet air du poumon, de manière qu'il y a une circulation libre entre ce viscère & les cavités des os. Dans les Oiseaux de proie, tous les os du corps, des ailes & même des cuisses, ont de ces cavités. Dans les Oiseaux qui volent moins haut, ceux des cuisses ont de la moelle. Une remarque qui ne nous paroît pas indigne d'être placée ici, c'est que le trou par lequel la cavité de l'os du bras du poulet ou du dindon communique avec l'intérieur du poumon, est très-sensible à la vue; que ces animaux étant une nourriture très-commune, il n'y avoit presque personne qui n'eût remarqué ce trou, & que cependant jusqu'à M. Camper, personne n'avoit pensé qu'il pût servir à porter dans les os, l'air qu'on savoit y être depuis long-temps. C'est ainsi que le génie d'observation consiste à voir ce que la Nature exposoit inutilement depuis long-temps aux yeux de tous les hommes.

Sur l'Anatomie des Poissons.

Pages 18 & 233.

Dans ces deux Mémoires, M. Vicq-d'Azir se propose principalement de donner une description générale des organes communs à chacun des trois ordres dans lesquels il croit pouvoir comprendre toutes les espèces de poissons. Comme plusieurs des parties de ces poissons ont déjà été bien décrites par d'autres Anatomistes, l'auteur ne s'arrête que sur les parties qui ont été oubliées. M. Vicq-d'Azir entre dans des détails curieux sur la structure & les usages de cette vessie pleine d'air, que l'on trouve dans un grand nombre d'espèces de poissons. Il croit qu'elle se remplit de l'air qui se dégage des alimens, que cet air chargé de ce qu'ils ont de plus subtil, va de l'estomac dans cette vessie, & qu'ensuite repompé par les pores

abſorbans, il paſſe dans les vaiſſeaux, & ſe combine avec les liqueurs qu'ils contiennent. Au reſte, cette explication n'eſt qu'une conjecture que l'auteur ſe propoſe de vérifier. M. Vicq-d'Azir a obſervé que l'eſtomac des poiſſons cartilagineux étoit ſouvent plein de crûſtacés; que ceux qui avoient été avalés les derniers, étoient tous entiers, tandis que ceux qui ſe trouvoient au fond de l'eſtomac, avoient été ramollis & changés en une eſpèce de pulpe. Cette obſervation paroît montrer qu'il exiſte dans l'eſtomac de ces poiſſons une liqueur propre à diſſoudre les alimens. On doit regretter qu'aucun Phyſicien n'ait tenté de répéter les expériences curieuſes que M. de Reaumur a faites ſur un fluide ſemblable, dont il a prouvé l'exiſtence dans les oiſeaux de proie, & de nous éclairer ſur un phénomène de l'économie animale, dont une connoiſſance plus approfondie pourroit perfectionner l'art de guérir, & peut-être nous dévoiler bien des myſtères.

MÉTÉOROLOGIE.

Mémoire ſur la Météorologie.

DANS ce Mémoire, le P. Cotte a réduit en Tables des Obſervations météorologiques faites depuis l'année 1763 juſqu'en 1772, par M. Meſſier, avec toute l'exactitude & la préciſion qu'on peut attendre de ce célèbre Obſervateur. Page 427.

Sur la cauſe du Froid en Canada.

On a ſouvent demandé pourquoi le froid eſt plus grand en Canada qu'en Europe, à la même latitude. Après avoir combattu les anciennes ſolutions de ce Page 541.

problème, M. de Caire en propoſe une nouvelle; c'eſt le vent de nord-oueſt ſi conſtant dans ces contrées, qu'il regarde comme la cauſe de ce phénomène.

CHIMIE.

Sur l'Air fixe.

Page 1. Les expériences que M. Bucquet rapporte dans ce Mémoire, prouvent que le fluide élaſtique qui ſe dégage des diſſolutions de métaux dans les acides, n'eſt pas le même que celui que produiſent les combinaiſons des mêmes acides avec la craie & les ſubſtances alkalines. On trouve à peu-près ici les mêmes réſultats que dans M. Prieſlei, mais lorſque M. Bucquet a fait ſes expériences, il ne connoiſſoit pas celles du ſavant Anglois. Faut-il conclure que les fluides qui ſe dégagent de différens corps & par différentes opérations, ſont autant de fluides qui diffèrent eſſentiellement de celui de l'atmoſphère, ou dont celui-ci n'eſt qu'un mélange? ou plutôt n'eſt-ce qu'un ſeul & même fluide qui tient en diſſolution, dans chaque circonſtance, quelque ſubſtance que les corps dont il s'échappe, lui ont fournie? C'eſt aux Chimiſtes, ou plutôt c'eſt à l'expérience, & ſur-tout au temps, à prononcer.

Analyſe de la Bile.

Page 610. La bile, ſelon M. Bordenave, eſt une liqueur ſavonneuſe & ordinairement alkaline; ſa comparaiſon varie beaucoup dans les différens ſujets, à raiſon de leur ſanté & de leur régime.

ANALYSE

Sur les Différences finies & leur application au Calcul des Probabilités.

LES équations aux différences finies partielles, dont s'occupe particulièrement M. de la Place, sont celles où les indéterminées sont supposées avoir varié dans plusieurs hypothèses différentes. On peut regarder cette matière comme absolument neuve, du moins sous ce titre; car on doit compter pour rien un Essai très-court, inséré dans les Mémoires de l'Académie pour 1772. Page 37.

Les réflexions de M. de la Place, sur les probabilités, intéressent les Philosophes, autant que ses profondes recherches d'Analyse sont dignes d'occuper les Géomètres.

Il y a encore un Mémoire de M. de la Place, qui appartient à l'Analyse pure : il renferme de nouvelles démonstrations de quelques Théorèmes, insérés par M. de la Grange dans les Mémoires de Berlin, *année 1772.* Page 534.

Sur les Fonctions arbitraires des Équations aux Différences partielles, & sur un tour de Carte.

Des trois Mémoires de M. Monge, deux ont pour objet les fonctions arbitraires qui se trouvent dans les intégrales des équations aux différences partielles. Dans le premier, il enseigne à les construire. Dans le second, il les réduit à la solution des équations aux différences finies. L'idée de cette réduction se trouve dans une lettre à M. d'Alembert, imprimée en 1768; & l'Auteur de cette lettre l'a développée depuis avec beaucoup de Pages 267, 305 & 390.

détail dans un Mémoire présenté à l'Académie en 1771, & imprimé dans le Volume de la même année. Mais ce Mémoire n'étoit pas encore public, quand M. Monge a présenté le sien où les Géomètres trouveront beaucoup d'élégance & une clarté à laquelle il est rare d'atteindre dans des matières si difficiles. Dans le troisième Mémoire, M. Monge donne la théorie d'un tour de cartes. On sait que ces sortes de tours dépendent du calcul des permutations : ce calcul conduit M. Monge à des résultats très-curieux sur l'ordre constant qu'observent toutes les cartes, ou quelques-unes d'entr'elles, après plusieurs changemens dont les loix sont données. Le temps viendra où l'Analyse plus perfectionnée, mettra les Géomètres à portée de résoudre des Problèmes utiles sur les rapports de position que les corps observent entr'eux. Jusqu'ici ils n'ont pu se proposer que des questions de pure curiosité, mais qu'on ne doit point regarder comme inutiles, si elles peuvent servir aux progrès de cette espèce d'Analyse.

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

Sur quelques Problèmes de Statique relatifs à l'Architecture.

Page 343. LES questions que M. Coulomb traite dans ce Mémoire sont fort importantes : elles ont pour objet la pression des terres, la force qu'il convient de donner aux revêtemens, l'équilibre des voûtes en ayant égard à la cohésion & au frottement. Dans ces questions, les corps ne sont regardés ni comme solides, ni comme fluides, mais comme composés de particules qui ont entr'elles une adhérence finie.

HYDROSTATIQUE.

Sur la Figure de la Terre.

DANS ce Mémoire, M. de la Place examine par des méthodes analytiques cette question : *Trouver quelle figure un fluide homogène, & dont les particules s'attirent en raison inverse du quarré des distances, doit avoir pour se maintenir en équilibre, en supposant à cette masse fluide un mouvement quelconque de rotation.* Page 524.

ASTRONOMIE PRATIQUE.

OBSERVATIONS

D'une opposition de Jupiter à Rouen, le 19 Août 1772. Par M. le Chevalier d'Angos. Page 413.

Des oppositions de Mars & de Saturne, à Genève, en 1773. Par M. Mallet. Page 416.

De la Comète du 1.er Avril 1771, à Saint-Lo. Par M. Dulague. Page 422.

ASTRONOMIE THÉORIQUE.

EN rendant compte de la Pièce qui a remporté le Prix d'Astronomie, nous avons déjà parlé du Mémoire de M. de la Place *sur les Équations séculaires.*

Sur la moyenne inclinaison des Comètes.

M. de la Place applique ici ses méthodes, pour le Page 503.

calcul des probabilités, à une question relative au Système du Monde. Il s'agit de savoir, combien, dans un nombre quelconque de corps, se mouvant chacun dans un plan, il est probable que l'inclinaison moyenne de ces plans, & le rapport entre les nombres des corps mus dans chacun de deux sens opposés, seront contenus entre de cértaines limites.

ARTS.

Sur la Théorie du Jaugeage. Par M. Dez.

Page 383. L'OBJET de ce Mémoire est très-important : comme il ne peut y avoir de méthode exacte de jauger parfaitement, puisque les vaisseaux sont construits sans aucune règle certaine, on n'avoit imaginé jusqu'ici d'autre moyen que de prendre une mesure approchée ; & comme elle ne l'étoit pas assez, d'ajouter par estime à cette première mesure. Il est inutile de faire observer les inconvéniens d'une méthode que le tâtonnement rendoit arbitraire. M. Dez propose d'y substituer une méthode d'approximation assez exacte pour se passer d'y rien ajouter arbitrairement. Elle a encore l'avantage de pouvoir être vérifiée, dans les cas de contestations, par tout homme qui a quelques connoissances mathématiques : ainsi l'on n'aura plus besoin, pour faire réformer les jauges mal faites, d'avoir recours au dépotement ; moyen incommode & ruineux, auquel on ne pourroit recourir que dans les cas où les lésions seroient énormes.



PRIX



PRIX
DE
L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,
Pour l'Année 1774.



PRIX D'ASTRONOMIE PHYSIQUE SUR L'ÉQUATION SÉCULAIRE DE LA LUNE.

Nec cum fiduciâ inveniendi, nec ſine ſpe.
Senec. Nat. quæſt. VII, 29.

Par M. DE LA GRANGE, Directeur de l'Académie royale des Sciences de Berlin, & Aſſocié-Étranger de cette Académie.

AVERTISSEMENT.

LA queſtion propoſée par l'Académie royale des Sciences pour le ſujet du Prix de l'année 1774, eſt double & renferme, à proprement parler, deux queſtions différentes.

Dans la première on demande par quel moyen on peut s'assurer qu'il ne résultera aucune erreur sensible des quantités qu'on aura négligées dans le calcul des mouvemens de la Lune.

Et dans la seconde on demande si, en ayant égard non-seulement à l'action du Soleil & de la Terre sur la Lune, mais encore, s'il est nécessaire, à l'action des autres Planètes sur ce Satellite, & même à la figure non-sphérique de la Lune & de la Terre, on peut expliquer par la seule théorie de la gravitation, pourquoi la Lune paroît avoir une équation séculaire, sans que la Terre en ait une sensible.

Le Mémoire suivant est destiné uniquement à répondre à la seconde de ces deux questions. On y verra 1.° que l'équation séculaire de la Lune ne sauroit être expliquée par la seule théorie de la gravitation, du moins en prenant cette équation telle que les Astronomes l'ont adoptée d'après feu M. Mayer; 2.° que les preuves que l'on a de l'existence de cette même équation, ne sont pas à beaucoup près aussi solides & aussi convaincantes qu'on pourroit le desirer. Je serai suffisamment récompensé de mon travail, si l'illustre Compagnie à qui j'ai l'honneur de le présenter, daigne l'honorer de quelque attention, & sur-tout s'il peut exciter d'autres plus habiles que moi à le pousser plus loin & à décider irrévocablement l'importante question de l'équation séculaire de la Lune.

Quant à la première question, j'avoue qu'après y avoir médité long-temps & avec toute l'attention dont je suis capable, je n'ai rien trouvé qui pût me satisfaire, ou qu'on pût du moins ajouter à ce que M. d'Alembert a déjà dit sur ce sujet dans les derniers volumes de ses Opuscules : j'ai donc cru pouvoir me dispenser de traiter cette question, & je me flatte que l'Académie voudra bien ne pas m'en savoir mauvais gré; en récompense j'ai tâché de m'étendre d'autant plus sur l'autre question, & d'entrer dans des détails astronomiques que cette illustre Compagnie n'a pas demandés, mais que j'ai cru indispensables dans la matière dont il s'agit.

(1.) QUOIQUE la théorie de la gravitation univerſelle ait juſqu'ici parfaitement rendu raiſon des inégalités périodiques qu'on obſerve dans les mouvemens des Corps céleſtes, & ſur-tout de la Lune, elle n'a cependant pas encore fourni d'explication de l'équation ſéculaire de cette Planète. M. Halley eſt le premier qui ait ſoupçonné une accélération dans le moyen mouvement de la Lune, comme on le voit par ce paſſage de la ſeconde édition des *Principes mathématiques : Et collatis quidem obſervationibus Eclipſium Babilonicis cum iis Albategnii & cum hodiernis, Halleyus noſter motum medium Lunæ cum motu diurno Terræ collatum paulatim accelerari, primus omnium, quod ſciam, deprehendit* (page 481). Mais ſoit que ce grand Aſtronome n'ait pas cru pouvoir entièrement compter ſur l'exactitude des obſervations qui lui avoient donné l'accélération de la Lune, ſoit qu'il ait regardé cette accélération comme trop peu ſenſible pour qu'on dût en tenir compte dans le calcul du lieu de cette Planète, il eſt certain qu'il n'y a eu aucun égard dans les Tables qu'il en a publiées depuis. Cependant la remarque de M. Halley n'eſt pas demeurée infructueuſe : deux ſavans Aſtronomes, M.rs Dunthorne & Mayer, ayant entrepris d'examiner de nouveau ce point important de la théorie de la Lune, ont non-ſeulement reconnu l'exiſtence de l'équation ſéculaire de cette Planète, ils en ont de plus déterminé la quantité ; le premier l'a fixée à 10 ſec. pour le premier ſiècle, & le ſecond à 7 ſecondes dans ſes premières *Tables*, & enſuite à 9 ſecondes dans les dernières ; & comme les Tables de la Lune de M. Mayer ont été généralement adoptées par les Aſtronomes, l'accélération du mouvement de la Lune eſt maintenant regardée comme un fait dont il ſemble qu'il ne ſoit preſque pas permis de douter.

M. de la Lande a néanmoins remarqué dans ſon Aſtronomie, qu'il reſtoit encore quelque incertitude ſur les obſervations qui ont ſervi à déterminer ce nouvel élément de la théorie de la Lune, & qui ſe réduiſent à deux éclipſes de Soleil obſervées en 977 & 978 près du Caire, par Ibn

Jonis, Astronome du Calife d'Égypte Aziz; comme ces observations sont les seules que nous ayons pour servir de terme de comparaison entre les anciennes observations des Babyloniens & celles de ces derniers temps, il faut avouer que si on étoit obligé de les rejeter, on perdroit les principales & même les uniques preuves décisives que l'on ait de l'accélération du moyen mouvement de la Lune: car je ne puis croire, avec M. Mayer, que cette question puisse se décider par la simple comparaison des observations du siècle passé avec celles de ce siècle; les variations qui peuvent se trouver dans le mouvement moyen de la Lune, dans le court espace d'un siècle, étant nécessairement trop petites pour pouvoir être attribuées à d'autres causes qu'aux erreurs des observations & à l'incertitude qui a encore lieu dans quelques-unes des équations de la Lune.

Quoi qu'il en soit, en attendant que le temps & les recherches des Astronomes nous apportent de nouvelles lumières, la théorie est, ce me semble, le seul moyen que nous ayons pour décider un point d'Astronomie si important. Il s'agit donc d'examiner le plus soigneusement qu'il est possible, si la gravitation universelle peut produire dans le mouvement moyen de la Lune une altération sensible & conforme aux observations; c'est la question que je me propose de traiter dans ces Recherches.

(2.) Pour que le moyen mouvement de la Lune soit assujetti à une altération croissante comme le carré du temps, ainsi qu'on le suppose dans les Tables, il faut que la formule générale du lieu vrai de cette Planète renferme, outre le terme Z qui représente le mouvement moyen, encore un terme de la forme iZ^2, i étant un coëfficient positif & très-petit; ce dernier terme représentera donc l'équation séculaire qui sera toujours additive au mouvement moyen avant & après l'époque qu'on aura fixée pour le commencement de cette équation, & qui dans les Tables de Mayer tombe au commencement de ce siècle. Donc nommant π le rapport de la circonférence au rayon, on aura $i\pi \times 360^d$ pour la

valeur de l'équation dont il s'agit au bout d'une révolution de la Lune; & nommant ensuite r le rapport du mouvement moyen de la Lune à celui du Soleil, on aura $i\pi r^2 \times 360^d$ pour la quantité de la même équation au bout de la première année après l'époque; enfin multipliant cette quantité par 10000, on aura la quantité de l'équation pour le premier siècle, laquelle étant, suivant M. Mayer, de 9 secondes, on aura cette équation

$$10000 i\pi r^2 \times 360^d = 9'',$$

c'est-à-dire, en réduisant aussi les degrés en secondes,

$$10000 \times 360 \times 3600 \times i\pi r^2 = 9;$$

d'où l'on tire

$$i = \frac{9}{10000 \times 360 \times 3600 \times \pi r^2};$$

or on a à très-peu-près $\pi = 6$ & $r^2 = 178$; donc on aura environ

$$i = \frac{1}{15379200000000}.$$

(3.) Telle doit donc être la valeur du coëfficient i de l'équation séculaire, dans l'hypothèse que cette équation soit réelle & croisse constamment comme le carré du temps; mais comme il peut se faire aussi qu'elle ne soit qu'apparente, & que ce ne soit dans le fond qu'une équation périodique, mais dont la période soit très-longue, il est bon de voir en particulier quelle devroit être sa valeur dans ce cas: car quoique l'effet de l'équation séculaire puisse être sensiblement le même dans l'un & dans l'autre cas, pendant un intervalle de temps peu considérable, il deviendra cependant fort différent au bout d'un grand espace de temps; de sorte que si cette équation au lieu d'être réelle, n'est qu'apparente, elle devra nécessairement avoir une toute autre valeur que celle que nous venons de trouver, pour pouvoir répondre à la fois aux observations Babyloniennes & Arabes qui ont servi de données dans la détermination de cet élément. Mais pour cela il est nécessaire de commencer par examiner en peu de mots comment on

peut acoorder ces observations par l'introduction d'une équation séculaire réelle; ensuite nous verrons ce qui doit en résulter dans l'hypothèse que l'équation séculaire ne soit qu'apparente.

(4.) Comme les observations les plus distantes entr'elles sont celles qui peuvent fournir les déterminations les plus exactes des mouvemens moyens des Planètes, on a employé dans la détermination de celui de la Lune, la plus ancienne Éclipse dont la mémoire nous ait été conservée, & qui est celle que Ptolémée rapporte avoir été observée à Babylone le 19 Mars 720 avant J. C. *(Almageste, liv. IV, ch. VI)*. M. Cassini ayant comparé cette observation avec celle d'une Éclipse de l'année 1717, où la Lune s'est trouvée à-peu-près dans les mêmes circonstances, a trouvé le mouvement séculaire de la Lune de $10^{s}\ 7^{d}\ 49'\ 52''$: or si le mouvement moyen de la Lune étoit tout-à-fait uniforme, il est clair qu'on devroit toujours trouver le même résultat, en comparant ensemble d'autres observations; mais on a reconnu dans ces derniers temps que les observations Arabes dont on a parlé ci-dessus, comparées avec les observations de ce siècle, donnent environ $2'\ 36''\frac{1}{2}$ de plus pour le mouvement séculaire de la Lune. M. de la Lande, dans les Mémoires de l'Académie, *ann. 1757*, trouve qu'en employant le mouvement moyen qui résulte des observations Arabes, la longitude de la Lune dans l'Éclipse de 720 avant J. C. est moindre de $1^{d}\ 27'$ que l'observation ne l'a donnée: or comme M. de la Lande suppose le milieu de cette Éclipse 47 minutes plus tôt que M. Cassini, il s'ensuit qu'il faut ôter de $1^{d}\ 27'$ le mouvement relatif de la Lune au Soleil pendant 47 minutes, lequel est de $23'\ 52''$; ainsi on aura $1^{d}\ 3'\ 8''$, qui étant partagés en $24\frac{1}{5}$, nombre des siècles écoulés entre l'observation dont il s'agit & 1700, donne $2'\ 36''\frac{1}{2}$ dont le mouvement moyen séculaire est plus grand, parce que, comme en remontant on avance contre l'ordre des signes, une longitude moindre indique un plus grand espace parcouru. C'est ce qui a engagé les Astronomes à appliquer au mouvement moyen une équation séculaire propre à sauver cette différence.

(5.) En effet, soit x le mouvement séculaire moyen dont la marche est uniforme, & y l'équation séculaire que nous supposerons d'abord proportionnelle au carré du temps; & prenant le commencement de ce siècle pour époque, on aura après m siècles, le mouvement moyen $= mx + m^2y$; par conséquent, en faisant m négatif, on aura pour m siècles comptés en arrière, le mouvement moyen $= - mx + m^2y$. Soit maintenant α le mouvement séculaire moyen trouvé par M. Cassini d'après l'Éclipse de 720 avant J. C. & $\alpha + \beta$ le mouvement séculaire moyen trouvé d'après les observations Arabes de 977 & 978; & comme entre les années 720 avant J. C. & 1700, il s'est écoulé $24\frac{1}{5}$ siècles, & entre les années 978 & 1700 il s'est écoulé environ $7\frac{1}{5}$ siècles, on aura $-(24\frac{1}{5})\alpha$ & $-(7\frac{1}{5})(\alpha + \beta)$ pour les mouvemens moyens qui se rapportent aux années 720 avant J. C. & 978: donc si on veut que la formule $- mx + m^2y$, satisfasse à la fois aux observations de ces années, il n'y aura qu'à supposer successivement $m = 24\frac{1}{5}, = 7\frac{1}{5}$, & former ensuite les équations

$$-(24\tfrac{1}{5})x + (24\tfrac{1}{5})^2y = -(24\tfrac{1}{5})\alpha,$$
$$-(7\tfrac{1}{5})x + (7\tfrac{1}{5})^2y = -(7\tfrac{1}{5})(\alpha + \beta),$$

c'est-à-dire,

$$x - (24\tfrac{1}{5})y = \alpha, \quad x - (7\tfrac{1}{5})y = \alpha + \beta;$$

d'où l'on tire

$$y = \frac{\beta}{17}, \; x = \alpha + (24\tfrac{1}{5})y = \alpha + (24\tfrac{1}{5})\frac{\beta}{17}.$$

Or on a trouvé $\alpha = 10^s\, 7^d\, 49'\, 52''$ & $\beta = 2'\, 36''\frac{1}{2}$; donc on aura $y = 9'',2$; & de-là $x = 10^s\, 7^d\, 53'\, 34'',64$; ce qui s'accorde à très-peu-près avec les élémens que M. Mayer a employés dans ses dernières Tables, où il fait le mouvement séculaire moyen de $10^s\, 7^d\, 53'\, 35''$, & l'équation séculaire de 9 secondes pour le premier siècle, à compter depuis 1700.

(6.) Supposons maintenant que l'équation séculaire ne soit pas constamment proportionnelle au carré du temps, mais

qu'elle dépende du ſinus d'un angle qui varie peu, en ſorte qu'elle ne ſuive la loi du carré que pendant un certain eſpace de temps, ſoit $A + \mu Z$ cet angle, Z étant comme ci-deſſus, le mouvement moyen de la Lune, & μ étant un coëfficient très-petit, de manière que l'angle μZ demeure encore très-petit vis-à-vis de l'angle fini; & comptant A au bout d'un grand nombre de révolutions de la Lune, on aura pendant cet intervalle de temps $\text{ſin.}\,(A + \mu Z) = \text{ſin.}\,A + \mu Z \text{ coſ.}\,A - \frac{\mu^2 Z^2}{2} \text{ ſin.}\,A$ à très-peu près; d'où l'on tire $Z^2 = \frac{2 Z \text{ coſ.}\,A}{\mu \text{ ſin.}\,A} + \frac{2\,[(\text{ſin.}\,A - \text{ſin.}\,(A + \mu Z)]}{\mu^2 \text{ ſin.}\,A}$; de ſorte que l'équation ſéculaire apparente $i\,Z^2$, ſera véritablement repréſentée par la formule

$$\frac{2\,i}{\mu \text{ ſin.}\,A}\left[Z \text{ coſ.}\,A + \frac{\text{ſin.}\,A - \text{ſin.}\,(A + \mu Z)}{\mu}\right]$$

& par conſéquent s'éloignera à la longue, de la loi du carré du temps.

(7.) Voyons donc quelle doit être dans cette hypothèſe, la valeur du coëfficient i, pour ſatisfaire aux mêmes données de *l'article 4*. Soit θ la quantité de l'angle μZ au bout d'un ſiècle, on aura au bout de m ſiècles $\mu = m\,\theta$; donc $Z = \frac{m\,\theta}{\mu}$; ainſi l'équation ſéculaire ſera, pour m ſiècles, $\frac{2\,i}{\mu^2 \text{ ſin.}\,A}\,[m\,\theta \text{ coſ.}\,A + \text{ſin.}\,A - \text{ſin.}\,(A + m\,\theta)]$; lorſque $m = 1$, cette quantité devient (à cauſe de θ très-petit) $\frac{i\,\theta^2}{\mu^2}$, qui ſera donc la quantité de l'équation ſéculaire pour le premier ſiècle. Nommons donc comme ci-deſſus, y cette valeur de l'équation ſéculaire, & x le mouvement ſéculaire moyen, on aura après m ſiècles, le mouvement moyen $= m\,x + \frac{2\,y}{\theta^2 \text{ ſin.}\,A}\,[m\,\theta \text{ coſ.}\,A + \text{ſin.}\,A - \text{ſin.}\,(A + m\theta)]$.

Faiſant donc ſucceſſivement $m = -24\frac{1}{5}$ & $= -7\frac{1}{5}$, pour avoir les mouvemens moyens qui répondent aux années

720

720 avant J. C. & 978, on formera ces deux équations

$$-(24\tfrac{1}{5})x + \frac{2y}{\theta^2 \text{ fin. } A}[-(24\tfrac{1}{5})\theta \text{ cof. } A + \text{fin. } A - \text{fin. } (A - 24\tfrac{1}{5}\theta)] = -24\tfrac{1}{5}\alpha,$$

$$-(7\tfrac{1}{5})x + \frac{2y}{\theta^2 \text{ fin. } A}[-(7\tfrac{1}{5})\theta \text{ cof. } A + \text{fin. } A - \text{fin. } (A - 7\tfrac{1}{5}\theta)] = -(7\tfrac{1}{5})(\alpha + \beta);$$

c'eſt-à-dire, en changeant les ſignes,

$$x - \frac{2y}{\theta}(-\text{cot. } A + \frac{1}{24\frac{1}{5}\theta}(1 - \frac{\text{fin. } (A - 24\frac{1}{5}\theta)}{\text{fin. } A})] = \alpha,$$

$$x - \frac{2y}{\theta}(-\text{cot. } A + \frac{1}{7\frac{1}{5}\theta}(1 - \frac{\text{fin. } (A - 7\frac{1}{5}\theta)}{\text{fin. } A})] = \alpha + \beta;$$

d'où l'on tirera aiſément x & y quand on connoîtra A & θ; enſuite on aura comme dans l'*art.* 2, $10000 i \pi r^2 \times 360^d = y$; d'où l'on tirera $i = \frac{y}{10000 \pi r^2 \times 360^d}$.

(8.) Suppoſons, par exemple, que l'angle $A + \mu Z$ ſoit égal au double de la longitude de l'apogée du Soleil (on verra plus bas aux *articles 30 & ſuiv.* pourquoi nous choiſiſſons cette hypothèſe): on aura donc, en prenant toujours le commencement de ce ſiècle pour époque, $A =$ au double de la longitude de l'apogée du Soleil en 1700, & θ au double du mouvement ſéculaire de cette apogée; ainſi on aura par les nouvelles Tables de Mayer, $A = 6^f\, 15^d\, 25'\, 12''$, & $\theta = 3^d\, 40' =$ (en parties du rayon) 0,063994. Subſtituant ces valeurs dans les équations précédentes, on aura

$$x - \frac{2y}{3^d\,40'}[-\text{cot. } 15^d\,25' + \frac{1}{88^d\,44'}(1 + \frac{\text{fin. } 73^d\,19'}{\text{fin. } 15^d\,25'})] = \alpha.$$

$$x - \frac{2y}{3^d\,40'}[-\text{cot. } 15^d\,25' + \frac{1}{26^d\,24'}(1 + \frac{\text{fin. } 10^d\,59'}{\text{fin. } 15^d\,25'})] = \alpha + \beta.$$

c'eſt-à-dire,

$$x - \frac{2y}{0{,}06399}(-3{,}62636 + \frac{4{,}60336}{1{,}54869}) = \alpha,$$

$$x - \frac{2y}{0{,}06399}(-3{,}62636 + \frac{1{,}71669}{0{,}46077}) = \alpha + \beta;$$

ou bien en réduiſant,

$$x + \frac{1,30788}{0,06399} y = \alpha, \quad x - \frac{0,19868}{0,06399} y = \alpha + \beta;$$ d'où

$$y = - \frac{0,06399}{1,50656} \beta, \quad x = \alpha + \frac{1,30788}{1,50656} \beta;$$

& à cauſe de $\alpha = 10^{f} 7^{d} 49' 52''$ & $\beta = 2' 32''$ (*art. 5*),

$$x = 10^{f} 7^{d} 52' 4'', \quad y = - 6'',456.$$

D'où l'on voit que la valeur de y doit être négative & égale à environ deux tiers de la valeur qu'elle doit avoir dans le cas de l'équation conſtamment proportionnelle au carré du temps; quant au mouvement ſéculaire moyen, il ne diffère que de $1' 24''$ de celui qu'on a trouvé dans le cas dont nous venons de parler.

Dans l'hypothèſe préſente, on auroit donc pour l'équation ſéculaire qui devra être ajoutée au mouvement moyen au bout de m ſiècles comptés depuis 1700,

$$- 3' 21'',775 \left[m \cot. 15^{d} 25' + 15,627 \left(1 - \frac{\sin.(15^{d} 25' + m \times 3^{d} 40')}{\sin. 15^{d} 25'} \right) \right],$$

& pour les ſiècles qui précèdent 1700, il n'y aura qu'à prendre m négatif.

Et la valeur du coëfficient i ſera

$$= - \frac{6}{10000 \times 360 \times 3600 \times \pi r^{2}}$$

$$= - \frac{1}{230688000000} \text{ environ.}$$

(9.) On trouveroit des réſultats différens ſi l'on adoptoit d'autres hypothèſes à l'égard de l'angle $A + \mu Z$, & il eſt clair que tant qu'il ne s'agira que de ſatisfaire aux données de l'*article 4*, on ſera le maître de donner telles valeurs qu'on voudra à A & à μ; de ſorte que le Problème de l'équation ſéculaire de la Lune, enviſagé ſous ce point de vue, eſt entièrement indéterminé & ne peut être réſolu par le ſecours des obſervations ſeules. Il eſt vrai que les Aſtronomes ſuppoſent communément que les équations ſéculaires des Planètes ne peuvent être que proportionnelles aux carrés des

temps; mais il paroît que la ſimplicité & la facilité de cette hypothèſe ſont les ſeuls motifs qu'ils aient de l'embraſſer.

Ce n'eſt donc que par la théorie qu'on peut ſe flatter de déterminer la forme de l'équation ſéculaire des Planètes, & de la Lune en particulier; & la queſtion eſt de ſavoir ſi parmi les inégalités qui réſultent de l'attraction mutuelle des Corps céleſtes, il doit y en avoir de l'eſpèce de celles que nous avons ſuppoſées ci-deſſus dans le mouvement de la Lune, & dont l'effet ne doit être ſenſible qu'au bout de pluſieurs ſiècles: or, pour ce qui regarde la Lune, quoiqu'il ſoit démontré que ſes inégalités périodiques ſont entièrement & uniquement dûes à l'action du Soleil combinée avec celle de la Terre, cependant il paroît très-difficile & preſque impoſſible de déduire de la même cauſe l'inégalité ſéculaire de cette Planète; du moins aucun de ceux qui ont travaillé juſqu'à préſent à la ſolution du Problème des trois-corps n'a pu trouver dans la formule du lieu de la Lune des termes propres à produire une altération vraie ou même ſeulement apparente dans ſon mouvement moyen; ſur quoi on peut voir ſur-tout les judicieuſes & fines remarques de M. d'Alembert dans les *volumes V & VI de ſes Opuſcules.*

Mais il y a une circonſtance à laquelle on n'a point encore fait attention juſqu'ici dans les calculs des mouvemens de la Lune, c'eſt la non-ſphéricité de la Terre, laquelle produit une petite altération dans la force qui pouſſe la Lune vers la Terre, en ſorte qu'il en réſulte une nouvelle force perturbatrice de l'orbite de la Lune, laquelle étant combinée avec celle qui vient de l'action du Soleil, pourroit peut-être produire des termes qui donneroient l'équation ſéculaire de la Lune. Ce point mérite donc d'être diſcuté ſoigneuſement; c'eſt ce que nous allons faire avec tout le détail que la difficulté & l'importance de la matière exigent.

(10.) Soit x le rayon vecteur de l'orbite qu'un corps décrit dans un plan fixe en vertu de deux forces, l'une Ψ dirigée vers le centre des rayons vecteurs, & l'autre Π toujours perpendiculaire à ces rayons; nommant ϕ l'angle parcouru

pendant le temps t, on aura, comme l'on ſait, les deux équations

I. $\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{x\, d\varphi^2}{dt^2} + \Psi = 0.$

II. $\frac{d.(x^2 d\varphi)}{dt^2} - x\Pi = 0.$

La ſeconde étant multipliée par $2\, x^2 d\varphi$, & enſuite intégrée, donne

$$\left(\frac{x^2 d\varphi}{dt}\right)^2 - 2\int x^3 \Pi\, d\varphi = k^2,$$

k étant la valeur de $\frac{x^2 d\varphi}{dt}$, lorſque $\int x^3 \Pi\, d\varphi$ eſt nul; & de-là on tire d'abord

III. $dt = \frac{x^2 d\varphi}{\sqrt{(k^2 + 2\int x^3 \Pi\, d\varphi)}}.$

Enſuite ſubſtituant cette valeur dans la première équation & prenant $d\varphi$ conſtant, on aura

IV. $\frac{d^2.\frac{1}{x}}{d\varphi^2} + \frac{1}{x} - \frac{\Psi x^2 + \frac{\Pi x\, dx}{d\varphi}}{k^2 + 2\int \Pi x^3 d\varphi} = 0.$

Donc ſi la force Ψ eſt compoſée d'une force $\frac{M}{x^2}$ & d'une force perturbatrice Φ, on aura en faiſant $\frac{1}{x} = u.$

V. $\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u - \frac{M}{k^2} - \Omega = 0,$

où $\Omega = \frac{\Phi x^2 + \frac{\Pi x\, dx}{d\varphi} - \frac{2M}{k^2}\int \Pi x^3 d\varphi}{k^2 + 2\int \Pi x^3 d\varphi}.$

Et ſi les forces perturbatrices Π & Φ ſont très-petites par rapport à la force principale $\frac{M}{x^2}$, on aura à-très-peu-près

VI. $\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u - \frac{1}{k^2}\left(M + \frac{\Phi}{u^2} - \frac{2M}{k^2}\int \frac{\Pi d\varphi}{u^3} - \frac{\Pi\, du}{u^3 d\varphi}\right) = 0.$

VII. $dt = \frac{d\varphi}{k u^2}\left(1 - \int \frac{\Pi\, d\varphi}{k^2 u^3}\right).$

Ces formules ſont aſſez connues, mais nous avons cru

devoir les rappeler ici pour épargner à nos lecteurs la peine de les aller chercher ailleurs.

(11.) Pour appliquer maintenant ces formules au mouvement de la Lune, nous supposerons d'abord que cette Planète se meuve dans l'écliptique, c'est-à-dire que nous ferons abstraction de l'inclinaison de son orbite, qu'on sait toujours être fort petite; il sera ensuite aisé d'y avoir égard si on le juge à propos: dans cette supposition donc si on nomme σ le rayon vecteur de l'orbite du Soleil, S sa masse & n la distance ou l'élongation de la Lune au Soleil, on trouve que l'action du Soleil sur la Lune produit deux forces perturbatrices, l'une dans la direction du rayon vecteur x de l'orbite de la Lune autour de la Terre, laquelle est

$$S \left[\frac{x}{\delta^3} + \sigma \left(\frac{1}{\sigma^3} - \frac{1}{\delta^3} \right) \text{cos. } n \right],$$

l'autre perpendiculaire au même rayon vecteur, & qui est

$$S\sigma \left(\frac{1}{\sigma^3} - \frac{1}{\delta^3} \right) \text{sin. } n,$$

δ étant la distance rectiligne entre la Lune & le Soleil, en sorte que

$$\delta = \sqrt{(\sigma^2 - 2\sigma x \text{ cos. } n + x^2)}.$$

Or comme σ est environ deux cents fois plus grand que x, on aura avec une approximation suffisante

$$\frac{1}{\delta^3} = \frac{1}{\sigma^3} + \frac{3x \text{ cos. } n}{\sigma^4} + \frac{(3 - 15 \text{ cos. } n^2)\, x^2}{2\sigma^5};$$

donc substituant cette valeur, & faisant attention que $\text{cos. } n^2 = \frac{1 + \text{cos. } 2n}{2}$, $\text{cos. } n^3 = \frac{3 \text{ cos. } n + \text{cos. } 3n}{4}$, $\text{cos. } n \text{ sin. } n = \frac{\text{sin. } 2n}{2}$, $\text{cos. } n^2 \text{ sin. } n = \frac{\text{sin. } n + \text{sin. } 3n}{4}$, on aura par l'action du Soleil sur la Lune,

Force perturbatrice dans la direction du rayon,

$$-\frac{S}{2\sigma^3}(1 + 3 \text{ cos. } 2n)\, x - \frac{S}{4\sigma^4}\left(\frac{9 \text{ cos. } n}{2} + 15 \text{ cos. } 3n\right) x^2.$$

Force perturbatrice perpendiculaire au rayon.

$$-\frac{3S}{2\sigma^3}\ \text{fin.}\ 2\eta \times x - \frac{S}{8\sigma^4}\ (3\ \text{fin.}\ \eta + 15\ \text{fin.}\ 3\eta)\ x^2.$$

(12.) A ces forces provenantes de l'attraction du Soleil, il faut maintenant ajouter celles qui viennent de l'attraction de la Terre; & comme on veut avoir égard à la non-sphéricité de sa figure, il est nécessaire de considérer en particulier l'attraction de chaque particule de la Terre sur la Lune, & d'en chercher les forces résultantes.

Pour faciliter cette recherche, nous commencerons par établir cette proposition préliminaire, qui est assez facile à démontrer & qui peut être aussi utile dans d'autres occasions.

« Si un point A attire un autre point B avec une force
» quelconque F, & qu'on propose de décomposer cette force
» suivant trois directions données perpendiculaires entr'elles;
» soit Δ la distance entre les deux corps, & soit $d\Delta$ l'accroisse-
» sement de cette distance en supposant que le corps attiré B
» parcoure, suivant l'une des directions dont il s'agit, l'espace
» infiniment petit $d\alpha$, on aura $-F\frac{d\Delta}{d\alpha}$ pour la partie de
la force F qui agit suivant cette même direction. »

De-là, il s'ensuit que si on détermine la position du point B, par rapport au point A, par trois variables α, β, γ dont les différentielles $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ soient dans les directions suivant lesquelles il s'agit de décomposer la force F; en sorte que la distance Δ soit une fonction de α, β, γ, & qu'on dénote, comme à l'ordinaire, par $\frac{d\Delta}{d\alpha}$, $\frac{d\Delta}{d\beta}$, $\frac{d\Delta}{d\gamma}$ les coëfficiens de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ dans la différentielle de Δ, on aura $-F\frac{d\Delta}{d\alpha}$, $-F\frac{d\Delta}{d\beta}$, $-F\frac{d\Delta}{d\gamma}$ pour les trois forces résultantes de la force F.

Si F est proportionnelle à $\frac{1}{\Delta^2}$, ce qui est le cas de

l'attraction céleste, on aura $F d\Delta = \frac{d\Delta}{\Delta^2} = -d.\frac{1}{\Delta}$; par conséquent, les trois forces dont il s'agit, pourront se représenter par les coëfficiens de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, dans la différentielle de $\frac{1}{\Delta}$; en sorte qu'il suffira de trouver la valeur de $\frac{1}{\Delta}$ & de la différentier par les méthodes ordinaires.

Si le point B est attiré en même temps vers différens points A, A', A'' &c, dont les distances à B soient Δ, Δ', Δ'' &c, & dont les attractions soient $\frac{M}{\Delta^2}$, $\frac{M'}{\Delta'^2}$, $\frac{M''}{\Delta''^2}$ &c: il est visible qu'il n'y aura qu'à chercher la valeur de la quantité $\frac{M}{\Delta} + \frac{M'}{\Delta'} + \frac{M''}{\Delta''} +$ &c, & la différentier suivant α, β, γ; les coëfficiens de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ dans cette différentielle, donneront immédiatement les forces cherchées. Donc en général, si le point B est attiré par un corps de figure quelconque, & dont la masse soit M, en considérant chaque élément dM de ce corps, comme un point attirant, il faudra prendre d'abord la somme de tous les $\frac{dM}{\Delta}$ en faisant varier uniquement les quantités qui se rapportent aux élémens dM, & regardant les α, β, γ comme constantes; dénotant cette somme par Σ, on y fera varier ensuite les quantités α, β, γ relatives à la position du point B, & l'on aura $\frac{d\Sigma}{d\alpha}$, $\frac{d\Sigma}{d\beta}$, $\frac{d\Sigma}{d\gamma}$ pour les trois forces suivant $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, auxquelles se réduira l'effet de l'attraction totale du corps M sur le point B.

(13.) Cela posé, pour pouvoir appliquer avec facilité, cette méthode à la recherche des forces qui résultent de l'attraction de toutes les parties de la Terre sur la Lune, nous considérerons le centre de la Terre, ainsi que le plan de son équateur, comme fixes; & nous y rapporterons, tant la position de chaque particule dM de la Terre, que celle du

centre de la Lune, en ayant attention d'employer, pour déterminer la position de ce centre des lignes variables, dont les différentielles aient les mêmes directions qu'on veut donner aux forces résultantes de l'attraction totale de la Terre sur la Lune.

Nous supposerons de plus que l'axe de la Terre soit un de ses trois axes naturels de rotation, & que par conséquent, les deux autres se trouvent dans le plan de l'Équateur; car quelle que soit la figure de la Terre & la disposition intérieure de ses parties, la rotation constante & uniforme qu'elle a autour de son axe, suffit pour nous convaincre que cet axe est nécessairement un de ses axes naturels de rotation; de sorte que, comme les deux autres doivent être perpendiculaires à celui-là, ils ne peuvent être placés que dans le plan de l'Équateur.

Donc, si on nomme l la distance d'une particule quelconque dM de la Terre au plan de l'Équateur, & m, n les distances de cette même particule aux plans des méridiens qui passent par le second & par le troisième axe naturel de rotation de la Terre, on aura d'abord par les propriétés du centre de gravité,

$$\int l\,dm = 0, \quad \int m\,dM = 0, \quad \int n\,dM = 0,$$

& par les propriétés des axes naturels de rotation, on aura en même temps

$$\int lm\,dM = 0, \quad \int ln\,dM = 0, \quad \int mn\,dM = 0.$$

(14.) Dans le cas où les deux hémisphères de la Terre sont supposés semblables & de densité uniforme, il est facile de voir qu'on aura de plus en général $\int l^{\rho} P\,dM = 0$, ρ étant un nombre quelconque impair, & P une fonction quelconque de m & de n. Et si la Terre est un sphéroïde de révolution, on aura $\int n^{\rho} Q\,dM = 0$, $\int m^{\rho} R\,dM = 0$, Q étant une fonction quelconque de l & n, & R une fonction quelconque de l & m; mais ces quantités ne seront plus nulles dès qu'on voudra abandonner ces hypothèses & regarder la Terre comme ayant une figure quelconque.

(15).

(15.) Soit maintenant ω l'obliquité de l'Écliptique, z la longitude de la Lune comptée depuis l'équinoxe du printemps, & y sa latitude; nommant q son ascension droite & p sa déclinaison, on aura par la Trigonométrie ces deux équations

$$\text{cos.}\, p \ \text{cos.}\, q = \text{cos.}\, y \ \text{cos.}\, z,$$

$$\text{sin.}\, p = \text{cos.}\, \omega \ \text{sin.}\, y + \text{sin.}\, \omega \ \text{cos.}\, y \ \text{sin.}\, z;$$

d'où il est facile de tirer

$$\text{cos.}\, p \ \text{sin.}\, q = - \text{sin.}\, \omega \ \text{sin.}\, y + \text{cos.}\, \omega \ \text{cos.}\, y \ \text{sin.}\, z.$$

De plus, il est aisé de voir que si on nomme ϱ le rayon de l'orbite lunaire, & que λ soit la distance de la Lune au plan de l'Équateur, μ sa distance au plan passant par le colure des équinoxes, & ν celle au plan qui passe par le colure des solstices, il est aisé de voir, dis-je, que l'on aura

$$\lambda = \varrho \ \text{sin.}\, p, \quad \mu = \varrho \ \text{cos.}\, p \ \text{sin.}\, q, \quad \nu = \varrho \ \text{cos.}\, p \ \text{cos.}\, q;$$

& par conséquent

$$\lambda = \varrho \ (\text{cos.}\, \omega \ \text{sin.}\, y + \text{sin.}\, \omega \ \text{cos.}\, y \ \text{sin.}\, z),$$

$$\mu = - \varrho \ (\text{sin.}\, \omega \ \text{sin.}\, y - \text{cos.}\, \omega \ \text{cos.}\, y \ \text{sin.}\, z),$$

$$\nu = \varrho \ \text{cos.}\, y \ \text{cos.}\, z.$$

Ainsi on connoîtra les coordonnées rectangles λ, μ, ν de la Lune, rapportées au plan de l'Équateur.

(16.) Or il est clair que l'ordonnée λ est toujours parallèle à l'ordonnée l, mais les autres ordonnées μ & ν ne peuvent être parallèles aux ordonnées m & n, que dans le cas où le second axe de rotation de la Terre passeroit par les équinoxes; ainsi il faudra encore changer les coordonnées μ & ν en deux autres qui soient toujours parallèles aux coordonnées m & n, ou bien on changera ces dernières en deux autres parallèles à celles-là; ce qui est d'ailleurs plus convenable, à cause que la ligne des équinoxes est à peu-près fixe, au lieu que le second & le troisième axe de rotation naturelle de la Terre changent continuellement de position à cause de sa révolution diurne autour du premier axe.

Soit donc ψ l'angle que le second axe de rotation de la Terre fait avec la ligne des équinoxes, c'est-à-dire la distance

du premier méridien à l'équinoxe, en nommant, ce qui eſt permis, premier méridien celui qui paſſe par ce même axe, & qui eſt par conſéquent fixe ſur la ſurface de la Terre; on verra aiſément que ſi on déſigne par m' & n' les nouvelles coordonnées dont l'une ſeroit perpendiculaire & l'autre parallèle à la ligne des équinoxes dans le plan de l'équateur, on aura $m' = m \operatorname{cof.} \psi + n \operatorname{fin.} \psi$, $n' = n \operatorname{cof.} \psi - m \operatorname{fin.} \psi$. Et comme les coordonnées l, m', n' qui répondent à la particule dM de la Terre ſont reſpectivement parallèles aux coordonnées λ, μ, ν qui répondent au centre de la Lune, il eſt clair que la diſtance Δ de cette particule à la Lune ſera exprimée par la formule

$$\sqrt{[(\lambda - l)^2 + (\mu - m')^2 + (\nu - n')^2]}.$$

(17.) Soit pour abréger, $l^2 + m^2 + n^2 = r^2$ (r étant la diſtance de la particule dM au centre de la Terre) on aura auſſi $l^2 + m'^2 + n'^2 = r^2$; & comme on a déjà $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \varrho^2$, on aura en ſubſtituant les valeurs de λ, μ, ν & développant les termes,

$$\begin{aligned}\Delta^2 = \varrho^2 &- 2\varrho l \,(\operatorname{cof.} \omega \operatorname{fin.} y + \operatorname{fin.} \omega \operatorname{cof.} y \operatorname{fin.} z) \\ &+ 2\varrho m' \,(\operatorname{fin.} \omega \operatorname{fin.} y - \operatorname{cof.} \omega \operatorname{cof.} y \operatorname{fin.} z) \\ &- 2\varrho n' \operatorname{cof.} y \operatorname{cof.} z + r^2;\end{aligned}$$

où l'on remarquera que le rayon ϱ de l'orbite de la Lune eſt infiniment plus grand que les quantités l, m, n, r; en ſorte qu'on pourra exprimer commodément la valeur de $\frac{1}{\Delta}$ une ſérie fort convergente.

Pour cela je ſuppoſe

$$\begin{aligned}p = l \,&(\operatorname{cof.} \omega \operatorname{fin.} y + \operatorname{fin.} \omega \operatorname{cof.} y \operatorname{fin.} z) \\ - m' \,&(\operatorname{fin.} \omega \operatorname{fin.} y - \operatorname{cof.} \omega \operatorname{cof.} y \operatorname{fin.} z) \\ + n' \,&\operatorname{cof.} y \operatorname{cof.} z;\end{aligned}$$

ou bien, en ſubſtituant les valeurs de m' & n',

$$\begin{aligned}p = l \,&(\operatorname{cof.} \omega \operatorname{fin.} y + \operatorname{fin.} \omega \operatorname{cof.} y \operatorname{fin.} z) \\ - m \,&[(\operatorname{fin.} \omega \operatorname{fin.} y - \operatorname{cof.} \omega \operatorname{cof.} y \operatorname{fin.} z) \operatorname{cof.} \psi + \operatorname{cof.} y \operatorname{cof.} z \operatorname{fin.} \psi] \\ - n \,&[(\operatorname{fin.} \omega \operatorname{fin.} y - \operatorname{cof.} \omega \operatorname{cof.} y \operatorname{fin.} z) \operatorname{fin.} \psi - \operatorname{cof.} y \operatorname{cof.} z \operatorname{cof.} \psi]\end{aligned}$$

en forte que l'on ait

$$\Delta = \sqrt{(\rho^2 - 2\rho p + r^2)};$$

& regardant les quantités p & r comme très-petites du même ordre vis-à-vis de ρ, on aura

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{2\rho^3}(-2\rho p + r^2) + \frac{1.3}{2.4\rho^5}(-2\rho p + r^2)^2$$

$$- \frac{1.3.5}{2.4.6\rho^7}(-2\rho p + r^2)^3 + \&c.$$

c'est-à-dire en ordonnant les termes par rapport aux puissances de ρ, & ne poussant la précision que jusqu'aux infiniment petits du troisième ordre

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\rho} + \frac{p}{\rho^2} + \frac{3p^2 - r^2}{2\rho^3} + \frac{5p^3 - 3pr^2}{2\rho^4} + \&c.$$

(18.) Faisons encore pour abréger,

$P = \text{cof.}\,\omega\ \text{fin.}\,y + \text{fin.}\,\omega\ \text{cof.}\,y\ \text{fin.}\,z$,

$Q = -(\text{fin.}\,\omega\ \text{fin.}\,y - \text{cof.}\,\omega\ \text{cof.}\,y\ \text{fin.}\,z)\ \text{cof.}\,\psi - \text{cof.}\,y\ \text{cof.}\,z\ \text{fin.}\,\psi$,

$R = -(\text{fin.}\,\omega\ \text{fin.}\,y - \text{cof.}\,\omega\ \text{cof.}\,y\ \text{fin.}\,z)\ \text{fin.}\,\psi + \text{cof.}\,y\ \text{cof.}\,z\ \text{cof.}\,\psi$,

de manière que la valeur de p soit représentée par $lP + mQ + nR$, & substituant cette quantité à la place de p dans l'expression précédente de $\frac{1}{\Delta}$, on aura, à cause de $r^2 = l^2 + m^2 + n^2$,

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\rho} + \frac{lP + mQ + nR}{\rho^2},$$

$$+ \frac{l^2(3P^2 - 1) + m^2(3Q^2 - 1) + n^2(3R^2 - 1) + 6(lmPQ + lnPR + mnQR)}{2\rho^3},$$

$$+ \frac{l^3(5p^3 - 3P) + m^3(5Q^3 - 3Q) + n^3(5R^3 - 3R)}{2\rho^4},$$

$$+ \frac{3(l^2mQ + l^2nR)(5p^2 - 1) + 3(m^2lP + m^2nR)(5Q^2 - 1) + 3(n^2lP + n^2mQ)(5R - 1)}{2\rho^4}.$$

Donc multipliant cette quantité par dM, & intégrant en ne faisant varier que les quantités l, m, n, on aura la valeur de $\int \frac{dM}{\Delta}$ ou de Σ (*art. 12*); ainsi en faisant attention que $\int l\,dM = 0$, $\int m\,dM = 0$, $\int n\,dM = 0$, $\int lm\,dM = 0$,

$\int l n\, dM = 0$, $\int m n\, dM = 0$ (*art.* 13), & ſuppoſant pour plus de ſimplicité,

$$\int l^2\, dM = a^2 M,\ \int m^2\, dM = b^2 M,\ \int n^2\, dM = c^2 M,$$
$$\int l^3\, dM = f^3 M,\ \int l m^2\, dM = f'^3 M,\ \int l n^2\, dM = f''^3\, dM,$$
$$\int m^3 dM = g^3 M,\ \int m l^2\, dM = g'^3 M,\ \int m n^2 dM = g''^3 M,$$
$$\int n^3 dM = h^3 M,\ \int n l^2 dM = h'^3 M,\ \int n m^2 dM = h''^3 M;$$

on aura

$$\Sigma = \frac{M}{\rho} + \frac{a^2(3P^2-1)+b^2(3Q^2-1)+c^2(3R^2-1)}{2\rho^3} M$$
$$+ \frac{f^3(5P^3-3P)+3f'^3P(5Q^2-1)+3f''^3P(5R^2-1)}{2\rho^4} M$$
$$+ \frac{g^3(5Q^3-3Q)+3g'^3Q(5P^2-1)+3g''^3Q(5R^2-1)}{2\rho^4} M$$
$$+ \frac{h^3(5R^3-3R)+3h'^3R(5P^2-1)+3h''^3R(5Q^2-1)}{2\rho^4} M$$

(19.) Or comme ρ eſt la diſtance du centre de la Lune au centre de la Terre, & que z, y ſont deux angles dont l'un repréſente la Longitude de la Lune ſur l'écliptique & l'autre ſa Latitude, il eſt clair qu'en faiſant varier ces trois quantités à la fois, on aura $= d\rho$, $\rho \operatorname{coſ.} y\, dz$, & $\rho\, dy$ pour les trois petits eſpaces que le centre de la Lune parcourra ſuivant la direction du rayon ρ & ſuivant deux autres directions perpendiculaires à celle-ci, dont l'une parallèle au plan de l'écliptique & l'autre dans un plan perpendiculaire à l'écliptique. Ainſi prenant ces trois quantités pour les différences $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ (*art.* 12), on aura $\frac{d\Sigma}{-d\rho}$, $\frac{d\Sigma}{\rho \operatorname{coſ.} y\, dz}$, $\frac{d\Sigma}{\rho\, dy}$ pour les expreſſions des forces réſultantes de l'attraction de toutes les parties de la Terre ſur la Lune, & dont les directions ſeront les mêmes que celles des petits eſpaces $-d\rho$, $p \operatorname{coſ.} y\, dz$, $\rho\, dy$.

Si au lieu du rayon ρ de l'orbite réelle de la Lune, on introduiſoit le rayon x de ſon orbite projetée ſur l'écliptique, & qu'au lieu de la latitude y, on introduiſit la diſtance perpendiculaire de la Lune au plan de l'écliptique q, ce qui ne demande que de mettre par-tout dans l'expreſſion de Σ,

$\sqrt{(x^2 + q^2)}$ à la place de ϱ, & $\frac{q}{\sqrt{(x^2+q^2)}}$, $\frac{x}{\sqrt{(x^2+q^2)}}$ à la place de *fin.* y & *cof.* y; alors en faifant varier les trois quantités x, z, q, & prenant $- dx, x dz$ & dq pour $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, on auroit les trois forces $\frac{d\Sigma}{-dx}$, $\frac{d\Sigma}{x dz}$, $\frac{d\Sigma}{dq}$, qui feroient équivalentes aux précédentes, mais dont la première agiroit fuivant la direction du rayon x, la feconde perpendiculairement à ce rayon & parallèlement à l'écliptique, la troifième perpendiculairement à ces deux-là.

Comme cette dernière manière d'envifager les forces qui proviennent de l'action de la Terre fur la Lune eft beaucoup plus convenable, lorfqu'on ne veut pas confidérer l'orbite réelle de la Lune, mais fon orbite projetée fur l'écliptique, ainfi que nous l'avons fait plus haut, nous nous y tiendrons dans la recherche préfente, & nous remarquerons d'abord qu'on peut faire abftraction de la latitude de la Lune y, qui étant toujours affez petite, & étant d'ailleurs tantôt pofitive, tantôt négative, ne fauroit influer que très-peu fur fon mouvement moyen; c'eft pourquoi on pourra fimplifier nos formules en y fuppofant d'avance $y = 0$ & $\varrho = x$, ce qui donnera

$$P = \text{fin.}\,\omega\ \text{fin.}\,z,$$
$$Q = \text{cof.}\,\omega\ \text{fin.}\,z\ \text{cof.}\,\psi - \text{cof.}\,z\ \text{fin.}\,\psi,$$
$$R = \text{cof.}\,\omega\ \text{fin.}\,z\ \text{fin.}\,\psi + \text{cof.}\,z\ \text{cof.}\,\psi;$$

& l'on n'aura plus qu'à confidérer les deux forces $\frac{d\Sigma}{-dx}$, $\frac{d\Sigma}{x dz}$ parallèles à l'écliptique & dirigées, la première fuivant le rayon x, & la feconde perpendiculairement à ce rayon; de forte que fi on fait pour abréger

$$P' = \text{fin.}\,\omega\ \text{cof.}\,z = \frac{dP}{dz},$$
$$Q' = \text{cof.}\,\omega\ \text{cof.}\,z\ \text{cof.}\,\psi + \text{fin.}\,z\ \text{fin.}\,\psi = \frac{dQ}{dz},$$
$$R' = \text{cof.}\,\omega\ \text{cof.}\,z\ \text{fin.}\,\psi - \text{fin.}\,z\ \text{cof.}\,\psi = \frac{dR}{dz};$$

on aura pour la force qui agit ſuivant la direction du rayon x, cette expreſſion

$$\frac{M}{x^2} + 3\,\frac{a^2(3P^2-1)+b^2(3Q^2-1)+c^2(3R^2-1)}{2x^4}\,M$$
$$+\ 2\,\frac{f^3(5P^3-3P)+3f'^3P(5Q^2-1)+3f''^3P(5R^2-1)}{x^5}\,M$$
$$+\ 2\,\frac{g^3(5Q^3-3Q)+3g'^3Q(5P^2-1)+3g''^3Q(5R^2-1)}{x^5}\,M$$
$$+\ 2\,\frac{h^3(5R^3-3R)+3h'^3R(5P^2-1)+3h''^3R(5Q^2-1)}{x^5}\,M,$$

& pour celle qui agit perpendiculairement au rayon, celle-ci

$$3\,\frac{a^2PP'+b^2QQ'+c^2RR'}{x^4}\,M$$
$$+\ 3\,\frac{f^3(5P^2-1)P'+f'^3[(5Q^2-1)P'+10PQQ']+f''^3[(5R^2-1)P'+10PRR']}{2x^5}\,M$$
$$+\ 3\,\frac{g^3(5Q^2-1)Q'+g'^3[(5P^2-1)Q'+10QPP']+g''^3[(5R^2-1)Q'+10QRR']}{2x^5}\,M$$
$$+\ 3\,\frac{h^3(5R^2-1)R'+h'^3[(5P^2-1)R'+10RPP']+h''^3[(5Q^2-1)R'+10RQQ']}{2x^5}\,M.$$

La première de ces deux forces ſera donc celle qui pouſſe la Lune vers le centre de la Terre, en vertu de l'attraction de toutes les parties de la Terre; & il eſt viſible que le premier terme $\frac{M}{x^2}$ de l'expreſſion de cette force, repréſentera l'attraction de la Terre ſur la Lune, lorſqu'on n'a point d'égard à ſa figure, & qu'on la ſuppoſe toute concentrée dans un point; de ſorte que les autres termes de la même formule, exprimeront la force perturbatrice de la Lune, dans la direction du rayon vecteur, provenante de la non-ſphéricité de la Terre; ainſi joignant cette force à celle qu'on a trouvée plus haut *(article 2)* ſuivant la même direction, on aura la valeur de la force totale perturbatrice Φ *(art. 10)*.

La ſeconde des forces trouvées ci-deſſus, agiſſant perpendiculairement au rayon vecteur de l'orbite de la Lune, devra être pareillement ajoutée à celle qu'on a trouvée ſuivant la même direction, en vertu de l'action du Soleil; & l'on aura la valeur de l'autre force perturbatrice Π *(articles cités.)*

(20.) Si la Terre étoit ſphérique & compoſée de couches concentriques de denſité uniforme, il eſt facile de voir qu'on auroit néceſſairement $a^3 = b^3 = c^3$, & $f^3 = 0$, $f'^3 = 0$, $f''^3 = 0$, $g^3 = \alpha$ *(art. 18)*; par conſéquent les deux forces ci-deſſus ſe réduiroient à

$$\frac{M}{x^2} + \frac{3a^2(P^2 + Q^2 + R^2 - 1)}{2x^4} M, \text{ \& } \frac{3a^2(PP' + QQ' + RR')}{x^4} M;$$

mais on a $P^2 + Q^2 + R^2 = 1$, & $PP' + QQ' + RR' = 0$, comme on peut s'en convaincre par les valeurs de P, Q, R, P', α: donc, la première des deux forces précédentes, celle qui agit dans la direction du rayon vecteur, ſe réduira à $\frac{M}{x^2}$, c'eſt-à-dire, à ce qu'elle ſeroit ſi la Terre étoit concentrée dans un point; & la ſeconde deviendra entièrement nulle, ce qui s'accorde avec ce que l'on ſait d'ailleurs.

Au reſte, les conditions de $a^3 = b^3 = c^3$, & de $f^3 = 0$, $f'^3 = 0\,\alpha$, peuvent avoir lieu d'une infinité de manières différentes, & ſans que le corps ſoit ſphérique, & de denſité uniforme dans chaque couche; mais quoique ces conditions ſuffiſent pour rendre nulles les forces perturbatrices que nous venons de trouver, cependant comme les expreſſions précédentes ne ſont qu'approchées, il eſt clair que les forces perturbatrices ne ſeront réellement nulles que lorſque tous les autres termes qu'on a négligés, s'évanouiront auſſi en même temps. Il n'y a peut-être que le ſeul cas où le corps eſt *ſphérique*, & de denſité uniforme dans chaque couche, dans lequel les forces perturbatrices ſoient exactement & rigoureuſement nulles; mais c'eſt ce qui paroît aſſez difficile à démontrer.

Si on ſuppoſe que la Terre ſoit un ſolide quelconque de révolution, en ſorte que tous ſes méridiens aient la même figure, & que de plus toutes les parties de même denſité y ſoient diſtribuées de manière qu'elles forment des couches ſemblables: ſuppoſition qui paroît la plus naturelle & la plus générale qu'on puiſſe faire, du moins, en tant qu'on regarde

la Terre comme ayant été originairement fluide; on aura dans cette hypothèse $b^2 = c^2$, $f'^3 = f''^3$, & $g^3 = 0$, $g'^3 = 0$, $g''^3 = 0$, $h^3 = 0$, $h'^3 = 0$, $h''^3 = 0$, comme il est facile de s'en convaincre avec un peu de réflexion; ainsi, à cause de $P^2 + Q^2 + R^2 = I$, & $PP' + QQ' + RR' = 0$, les deux forces perturbatrices provenantes de la non-sphéricité de la Terre, deviendront

$$\frac{3(a^2-b^2)(3P^2-1)}{2x^4}M + \frac{2(f^3-3f'^3)(5P^3-3P)}{x^5}M,$$

$$\frac{3(a^2-b^2)PP'}{x^4}M + \frac{3(f^3-3f'^3)(5P^2-1)P'}{2x^5}M;$$

dont la première agira suivant le rayon vecteur x, & l'autre perpendiculairement à ce rayon.

En supposant que la Terre soit un sphéroïde elliptique & homogène, on aura, en nommant α le demi-axe, & β le demi-diamètre de l'Équateur, $a^2 = \frac{\alpha^2}{5}$, $b^2 = \frac{\beta^2}{5}$; & le rapport de β à α est, par la théorie de la Figure de la Terre $= 1 + \frac{1}{230}$, & par les observations $= 1 + \frac{1}{178}$.

En général, quelle que soit la figure de la Terre & l'arrangement intérieur de ses parties, pourvu que $b^2 = c^2$, on trouve par la théorie de la précession des équinoxes, que la précession moyenne annuelle des équinoxes, en vertu de l'action combinée du Soleil & de la Lune, est exprimée par

$$\frac{3(b^2-a^2)}{4b^2}(1+\sigma\nu^2)\ \text{cos.}\ \omega \times \text{mouv. diur.} \odot,$$

σ étant le rapport de la masse de la Lune à celle de la Terre, ν le rapport du mouvement de la Lune à celui du Soleil, & ω l'obliquité de l'écliptique. Or, par les observations, on sait que la précession moyenne est de 50 secondes; donc, exprimant aussi en secondes le mouvement diurne du Soleil, qui est de $59' 8'' = 3548''$, on aura, à cause de cos. $\omega =$ cos. $23^d 29' = \frac{917}{1000}$, & $\nu^2 = 178$,

$\frac{b^2-a^2}{b^2}$

$$\frac{b^2 - a^2}{b^2} = \frac{200000}{9760548\,(1+1786)} = \frac{1}{48,80274\,(1+1786)};$$

donc, si C est $\frac{1}{70}$ suivant M. Daniel Bernoulli, on aura

$$\frac{b^2 - a^2}{b^2} = \frac{7}{4,880274 \times 248} = \frac{1}{173} \text{ à peu près.}$$

(21.) Ayant donc trouvé les valeurs des forces perturbatrices Φ & Π, tant en vertu de l'action du Soleil que de celle de la Terre regardée comme non-sphérique, il ne faudra plus que les substituer dans les *équations VI & VII* de l'*article 10*, pour pouvoir déterminer les inégalités de la Lune, qui résultent de ces deux causes; mais comme les effets de la première ont déjà été suffisamment examinés par les Géomètres qui ont travaillé sur la théorie de la Lune, & que notre objet n'est que de rechercher, si la non-sphéricité de la Terre peut servir à expliquer l'équation séculaire de la Lune, il suffira d'avoir égard, dans les équations dont nous venons de parler, aux termes provenans de l'action de la Terre, soit seule, soit combinée avec celle du Soleil, & même parmi ces termes, à ceux-là seuls qui paroîtront pouvoir produire une altération dans le mouvement moyen. Nous ferons, pour cet effet, les remarques suivantes.

(22.) Nous avons déjà vu que pour que la Lune ait une équation séculaire réelle, il faut que l'angle du mouvement vrai φ, renferme, outre l'angle du mouvement moyen Z, qui est proportionnel au temps t, encore le terme $i z^2$ *(art. 2)* & si l'équation séculaire n'est qu'apparente, alors au lieu du terme $i z^2$, il faudra qu'il y en ait un de cette forme

$$\frac{2i}{\mu \sin. A}\left(Z \cos. A + \frac{\sin. A - \sin. (A+\mu Z)}{\mu}\right),$$

μ étant un coëfficient très-petit *(article 6)*; donc, on aura dans le premier cas, abstraction faite des autres inégalités, $\varphi = Z + i\,Z^2$; d'où l'on tire à très-peu près $Z = \varphi - i\,\varphi^2$, & supposant $dt = n\,dZ$, $\frac{dt}{d\varphi} = n\,(1 - 2i\varphi)$.

Dans le second cas, on aura

$$\varphi = Z + \frac{2i}{\mu \text{ſin.} B}\left(Z \text{ coſ.} A + \frac{\text{ſin.} A - \text{ſin.}(A + \mu Z)}{\mu}\right);$$

d'où l'on tire de même,

$$Z = \varphi - \frac{2i}{\mu \text{ſin.} B}\left(\varphi \text{ coſ.} A + \frac{\text{ſin.} A - \text{ſin.}(A + \mu\varphi)}{\mu}\right)$$

& de-là,

$$\frac{dt}{d\varphi} = n\left(1 - \frac{2i}{\text{ſin.} A} \times \frac{\text{coſ.} A - \text{coſ.}(A + \mu\varphi)}{\mu}\right).$$

Or l'*équation VII*, donne $\frac{dt}{d\varphi} = \frac{1}{ku^2}\left(1 - \int \frac{\Pi d\varphi}{k^2 u^3}\right)$;

donc, on aura dans le premier cas $nu^2(1 - 2i\varphi) = \frac{1}{k} - \int \frac{\Pi d\varphi}{k^3 u^3}$, & différentiant, on trouvera $\frac{\Pi}{k^3 u^3} = - \frac{2nudu}{d\varphi}(1 - 2i\varphi) + 2inu^2$;

or, comme $\frac{1}{u}$, rayon vecteur de l'orbite de la Lune, eſt une quantité à très-peu-près conſtante, il s'enſuit que la valeur de $\frac{\Pi}{u^3}$ contiendra néceſſairement un terme tout conſtant qui ſera exprimé par $2ink^3\gamma^2$, γ^2 étant le terme tout conſtant de la valeur de u^2.

Dans l'autre cas, on aura l'équation

$$nu^2\left[1 - \frac{2i}{\text{ſin.} A} \times \frac{\text{coſ.} A - \text{coſ.}(A + \mu\varphi)}{\mu}\right] = \frac{1}{k} - \int \frac{\Pi d\varphi}{k^3 u^3};$$

d'où l'on tire

$$\frac{\Pi}{k^3 u^3} = - \frac{2nudu}{d\varphi}\left[1 - \frac{2i}{\text{ſin.} A} \times \frac{\text{coſ.} A - \text{coſ.}(A + \mu\varphi)}{\mu}\right] + 2inu^2 \times \frac{\text{ſin.}(A + \mu\varphi)}{\text{ſin.} A};$$

de ſorte que dans ce cas il faudra que la valeur de $\frac{\Pi}{u^3}$ contienne un terme de la forme $2ink^3\gamma^2 \frac{\text{ſin.}(A + \mu\varphi)}{\text{ſin.} A}$, μ étant un coëfficient extrêmement petit.

On peut conclure de-là en général que l'équation ſéculaire

de la Lune ne peut avoir lieu à moins que la quantité $\frac{\Pi}{u^3}$ ne contienne ou un terme tout constant, ou un terme qui renferme le sinus d'un angle qui varie infiniment peu, & qui soit par conséquent à très-peu-près constant, au moins pendant un grand nombre de révolutions; dans le premier cas l'équation séculaire de la Lune sera réelle & ira en augmentant, comme les carrés des temps; dans le second elle ne sera qu'apparente & ne différera des autres équations du mouvement de la Lune que par la longueur de sa période.

(23.) Tout se réduit donc à examiner si la quantité $\frac{\Pi}{u^3}$ peut contenir des termes de l'espèce de ceux dont nous venons de parler, & pour cela il n'y aura qu'à considérer les différens angles dont les sinus ou cosinus entreront dans la valeur de $\frac{\Pi}{u^3}$, & voir s'il y a quelque combinaison de ces angles qui puisse donner un angle constant ou à-peu-près constant; alors on n'aura d'égard qu'aux termes qui pourront donner de telles combinaisons dans les équations VI & VII, & il sera facile d'en déduire l'équation séculaire cherchée.

Je remarque donc d'abord que les forces perturbatrices de la Lune, qui dépendent de l'action du Soleil, ne renferment que les sinus ou cosinus de l'angle n & de ses multiples, avec les deux variables x ou $\frac{1}{u}$ & σ; & que celles qui viennent de la *non-sphéricité* de la Terre ne contiennent que les sinus ou cosinus des angles ζ & ψ avec la variable x; car pour ce qui regarde l'angle ω, qui exprime l'obliquité de l'écliptique, on doit le considérer comme une quantité constante.

Je remarque en second lieu que σ étant le rayon vecteur de l'orbite du Soleil, on aura, comme l'on sait, $\frac{1}{\sigma} = \frac{1 + \epsilon \cos \xi}{\lambda}$, λ étant la distance moyenne, ϵ l'excentricité & ξ l'anomalie vraie; de même x étant le rayon vecteur de

l'orbite de la Lune, on auroit ſans les forces perturbatrices, $\frac{1}{x} = u = \frac{1 + e \operatorname{cof.} s}{l}$, l étant la diſtance moyenne de la Lune, e l'excentricité de ſon orbite, & s l'anomalie vraie; mais à cauſe des forces perturbatrices, on aura $\frac{1}{x} = u = \frac{1 + e \operatorname{cof.} s + v}{b}$, v étant une variable très-petite & dépendant uniquement de ces forces. De-là il eſt facile de conclure que les inégalités du mouvement de la Lune, abſtraction faite de l'inclinaiſon de l'orbite, mais en ayant égard à la non-ſphéricité de la Terre, ne pourront dépendre que de ces cinq angles ξ, s, n, z & ψ; & il eſt facile de ſe convaincre en particulier que la valeur de $\frac{\Pi}{u^3}$ ſe réduira à une ſuite de termes de la forme

$$A \operatorname{fin.}(m\xi + ns + pn + qz + r\psi),$$

m, n, p, q, r étant des coëfficiens indéterminés exprimés par des nombres entiers poſitifs, ou négatifs en y comprenant zéro & l'unité: or ſi on ſe rappelle que l'on a

ξ = à l'anomalie du Soleil,

s = à l'anomalie de la Lune,

n = à la diſtance de la Lune au Soleil,

z = à la longitude de la Lune comptée depuis l'équinoxe.

ψ = à la diſtance du premier méridien de la Terre au colure des équinoxes,

& qu'on examine les rapports de ces angles entr'eux, leſquels ſont à très-peu-près connus par les obſervations, on verra aiſément qu'il n'y a que cette combinaiſon $z - \xi - n$ & ſes multiples qui puiſſent former des angles preſque conſtans; en effet, il eſt clair que $z - \xi$ ſera égale à la longitude de la Lune moins celle du Soleil, plus la longitude de l'apogée du Soleil; c'eſt-à-dire, égale à la diſtance de la Lune au Soleil plus la longitude de l'apogée du Soleil: par conſéquent nommant α la longitude de l'apogée du Soleil, on aura $z - \xi = n + \alpha$; donc $z - \xi - n = \alpha$.

Or on ſait que α eſt une quantité preſque conſtante, qui ne varie que de $1^d\ 50'$ par ſiècle, ſuivant les Tables de Mayer, de ſorte que l'angle $\zeta - \xi - \pi$ & ſes multiples, ſeront dans le cas dont il s'agit; ainſi dans la recherche de l'équation ſéculaire de la Lune, il ſuffira de tenir compte des termes qui renfermeront les trois angles ζ, ξ, π; d'où je conclus d'abord que dans les expreſſions des forces perturbatrices, provenantes de la non-ſphéricité de la Terre, on pourra rejeter les termes qui contiendront les ſinus ou coſinus de l'angle ψ; ce qui ſervira beaucoup à ſimplifier ces expreſſions.

(24.) De cette manière on aura donc, d'après les formules de l'*article 19*,

$$P^2 = \frac{\text{ſin.}\,\omega^2\,(1 - \text{coſ.}\,2\zeta)}{2},$$

$$Q^2 = R^2 = \frac{2 - \text{ſin.}\,\omega^2\,(1 - \text{coſ.}\,2\zeta)}{4},$$

$$P^3 = \frac{\text{ſin.}\,\omega^3\,(3\,\text{ſin.}\,\zeta - \text{ſin.}\,3\zeta)}{4},$$

$$PQ^2 = PR^2 = \frac{(4 - 3\,\text{ſin.}\,\omega^2)\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{ſin.}\,\zeta + \text{ſin.}\,\omega^3\,\text{ſin.}\,3\zeta}{8},$$

& toutes les autres quantités Q^3, QP^2, &c. ſeront nulles.

Et comme $P' = \frac{dP}{d\zeta}$, $Q' = \frac{dQ}{d\zeta}$, $R' = \frac{dR}{d\zeta}$, on aura par la différenciation,

$$PP' = \frac{\text{ſin.}\,\omega^2\,\text{ſin.}\,2\zeta}{2},$$

$$QQ' = RR' = -\frac{\text{ſin.}\,\omega^2\,\text{ſin.}\,2\zeta}{2},$$

$$P^2P' = \frac{\text{ſin.}\,\omega^3\,(\text{coſ.}\,\zeta - \text{coſ.}\,3\zeta)}{4},$$

$$\left.\begin{array}{l} Q^2P' + 2PQQ' \\ = R^2P' + 2PRR' \end{array}\right\} = \frac{(4 - 3\,\text{ſin.}\,\omega^2)\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{coſ.}\,\zeta + 3\,\text{ſin.}\,\omega^3\,\text{coſ.}\,3\zeta}{8},$$

toutes les autres quantités Q^2Q', R^2R', &c. étant nulles.

Faiſant donc ces ſubſtitutions dans les formules de l'*art. 19*, & ſuppoſant pour abréger,

$$B = M\left(a^2 - \frac{b^2 + c^2}{2}\right)\left(1 - \frac{3\,\text{fin.}\,\omega^2}{2}\right),$$

$$C = \frac{3M}{2}\left(a^2 - \frac{b^2 + c^2}{2}\right)\text{fin.}\,\omega^2,$$

$$D = \frac{3M}{2}\left(2f^3 - 3f'^3 - 3f''^3\right)\left(\text{fin.}\,\omega - \frac{5}{4}\,\text{fin.}\,\omega^3\right),$$

$$E = \frac{5M}{8}\left(2f^3 - 2f'^3 - 3f''^3\right)\text{fin.}\,\omega^3,$$

on aura à cauſe de la non-ſphéricité de la Terre,

Force perturbatrice dans la direction du rayon.

$$-\frac{3}{2}\cdot\frac{B + C\,\text{cof.}\,2z}{x^4} - 2\,\frac{D\,\text{fin.}\,z + E\,\text{fin.}\,3z}{x^5}.$$

Force perturbatrice perpendiculaire au rayon.

$$\frac{C\,\text{fin.}\,2z}{x^4} - \frac{D\,\text{cof.}\,z + 3E\,\text{cof.}\,3z}{2x^5}.$$

(25.) Il faut maintenant reprendre les expreſſions des forces perturbatrices réſultantes de l'action du Soleil *(art. 11)* & y ſubſtituer à la place de σ ſa valeur $\frac{\lambda}{1 + e\,\text{cof.}\,\xi}$; mais il ne ſera pas néceſſaire de faire cette ſubſtitution en entier: car par ce que nous venons de remarquer dans l'*art. précéd.* il eſt viſible qu'il ſuffira d'avoir égard aux termes qui contiendront des ſinus ou des coſinus de l'angle $\xi + n$ ou de ſes multiples. Or la valeur précédente de σ donne celles-ci:

$$\frac{1}{\sigma^3} = \frac{1 + \frac{3e^2}{2}}{\lambda^3} + \frac{3e + \frac{3e^3}{4}}{\lambda^3}\,\text{cof.}\,\xi + \frac{3e^2}{2\lambda^3}\,\text{cof.}\,2\xi + \frac{e^3}{4\lambda^3}\,\text{cof.}\,3\xi.$$

$$\frac{1}{\sigma^4} = \frac{1 + 3e^2 + \frac{3e^4}{8}}{\lambda^4} + \frac{4e + 3e^3}{\lambda^4}\,\text{cof.}\,\xi + \frac{3e^2 + \frac{e^4}{2}}{\lambda^4}\,\text{cof.}\,2\xi + \frac{e^3}{\lambda^4}\,\text{cof.}\,3\xi + \frac{e^4}{8\lambda^4}\,\text{cof.}\,4\xi;$$

donc ſubſtituant ces valeurs & rejetant tous les termes qui contiendroient d'autres angles que $\xi + n$, on aura par l'action du Soleil,

Force perturbatrice dans la direction du rayon.

$$-\frac{S}{2\lambda^3}\left[1+\frac{3\epsilon^2}{2}+\frac{9\epsilon^2}{4}\,\text{cos.}\,2\,(\xi+n)\right]x,$$

$$-\frac{S}{4\lambda^4}\left[\tfrac{9}{4}\,(4\epsilon+3\epsilon^3)\,\text{cos.}\,(\xi+n)+\frac{15\epsilon^3}{2}\,\text{cos.}\,3\,(\xi+n)\right]x^2.$$

Force perturbatrice perpendiculaire au rayon.

$$-\frac{3S}{2\lambda^3}\times\frac{3\epsilon^2}{4}\,\text{sin.}\,2\,(\xi+n)\,.\,x,$$

$$-\frac{S}{8\lambda^4}\left[\tfrac{3}{2}\,(4\epsilon+3\epsilon^3)\,\text{sin.}\,(\xi+n)+\frac{15\epsilon^3}{2}\,\text{sin.}\,3\,(\xi+n)\right]x^2.$$

Joignant donc ces forces à celles de l'*article précédent*, on aura les valeurs des quantités Φ & Π; lesquelles, en mettant pour plus de simplicité $\frac{1}{\nu^2}$ à la place de $\frac{S}{\lambda^3}$, se trouveront exprimées de la manière suivante,

$$\Phi=-\frac{1}{2\nu^2}\left(1+\frac{3\epsilon^2}{2}+\frac{9\epsilon^2}{4}\,\text{cos.}\,2\,(\xi+n)\right]$$
$$-\frac{3\epsilon}{4\nu^2\lambda}\left[\left(3+\frac{9\epsilon^2}{4}\right)\text{cos.}\,(\xi+n)+\frac{5\epsilon^2}{2}\,\text{cos.}\,3\,(\xi+n)\right]x^2$$
$$-\frac{3}{2}\,.\,\frac{B+C\,\text{cos.}\,2\,\zeta}{x^4}-2\,\frac{D\,\text{sin.}\,\zeta+E\,\text{sin.}\,3\,\zeta}{x^5},$$

$$\Pi=-\frac{9\epsilon^2}{8\nu^2}\,\text{sin.}\,2\,(\xi+n)\,.\,x$$
$$-\frac{3\epsilon}{4\nu^2\lambda}\left[\left(1+\frac{3\epsilon^2}{4}\right)\text{sin.}\,(\xi+n)+\frac{5\epsilon^2}{4}\,\text{sin.}\,3\,(\xi+n)\right)x^2$$
$$+\frac{C\,\text{sin.}\,2\,\zeta}{x^4}-\frac{D\,\text{cos.}\,3\,E\,\text{cos.}\,3\,\zeta}{2\,x^5}.$$

(26.) On substituera maintenant ces valeurs de Φ & de Π dans l'*équation VI* de l'orbite de la Lune, laquelle deviendra par-là, à cause de $x=\frac{1}{u}$,

$$\text{VIII.}\ \frac{d^2u}{d\varphi^2}+u+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{2\nu^2k^2u^2}\left[\left(1+\frac{3\epsilon^2}{2}+\frac{9\epsilon^2}{4}\,\text{cos.}\,2\,(\xi+n)\right]\right.$$
$$+\frac{3\epsilon}{4\nu^2k^2\lambda u^2}\left[\left(3+\frac{9\epsilon^2}{4}\right)\text{cos.}\,(\xi+n)+\frac{5\epsilon^2}{2}\,\text{cos.}\,3\,(\xi+n)\right]$$

$$+ \frac{3u^2}{2k^2}(B + C \operatorname{cos.} 2z) + \frac{2u^3}{k^2}(D \operatorname{sin.} z + E \operatorname{sin.} 3z)$$

$$- \frac{9\varepsilon^2}{4k^4r^2}\int \frac{\operatorname{sin.} 2(\xi + n)}{u^4} d\varphi - \frac{9\varepsilon^2}{8r^2} \cdot \frac{\operatorname{sin.} 2(\xi + n)\, du}{u^4\, d\varphi}$$

$$- \frac{3\varepsilon}{2k^4r^2\lambda}\left[\left(1 + \frac{3\varepsilon^2}{4}\right)\int \frac{\operatorname{sin.}(\xi + n)\, d\varphi}{u^5} - \frac{5\varepsilon^2}{4}\int \frac{\operatorname{sin.} 3(\xi + n)\, d\varphi}{u^5}\right)$$

$$- \frac{3\varepsilon}{2k^4r^2\lambda}\left[\left(1 + \frac{3\varepsilon^2}{4}\right)\frac{\operatorname{sin.}(\xi + n)\, du}{u^5\, d\varphi} - \frac{5\varepsilon^2}{4} \cdot \frac{\operatorname{sin.} 3(\xi + n)\, du}{u^5\, d\varphi}\right)$$

$$+ \frac{2}{k^4}\left(C\int u \operatorname{sin.} 2z\, d\varphi - \frac{D}{2}\int u^2 \operatorname{cos.} z\, d\varphi - \frac{3E}{2}\int u^2 \operatorname{cos.} 3z\, d\varphi\right)$$

$$+ \frac{1}{k^2}\left(C \frac{\operatorname{sin.} 2z \,.\, u\, du}{d\varphi} - \frac{D}{2}\,\frac{\operatorname{cos.} z \,.\, u^2\, du}{d\varphi} - \frac{3E}{2}\,\frac{\operatorname{cos.} 3z \,.\, u^2\, du}{d\varphi}\right)$$

$$= 0.$$

J'ai ſuppoſé dans cette équation la maſſe M de la Terre égale à l'unité; de ſorte que, ſi on ſuppoſe auſſi (ce qui eſt également permis) que la diſtance moyenne l de la Lune à la Terre ſoit $= 1$, on aura $\frac{M}{l^3} = 1$; par conſéquent, comme on a par les théorèmes de Hughens, $\sqrt{\frac{S}{\lambda^3}} : \sqrt{\frac{M}{l^3}}$ égal au rapport du temps périodique de la Lune au temps périodique de la Terre, ou (ce qui eſt la même choſe) au rapport du mouvement moyen de la Terre à celui de la Lune; la quantité $\frac{1}{\sqrt{\frac{S}{\lambda^3}}}$, ou bien r exprimera le rapport du mouvement moyen de la Lune à celui du Soleil, lequel eſt environ de $13 : 1$; ou plus exactement $\sqrt{178 \frac{29}{40}} : 1$.

(27.) De plus, on aura, à cauſe de $l = 1$, $u = 1 + e \operatorname{cos.} s + v$ *(art. 23)*, & il faudra que la quantité v ne contienne, ni aucun terme tout conſtant, ni aucun terme affecté de $\operatorname{cos.} s$; ainſi, après avoir ſubſtitué cette valeur dans l'équation précédente, on y fera diſparoître tous les termes qui renfermeront $\operatorname{cos.} s$, ainſi que ceux qui ne contiendront aucun ſinus ou coſinus; ce qui donnera deux équations dont l'une ſervira

servira à déterminer le rapport $\frac{ds}{d\varphi}$ qui est supposé constant, & l'autre servira à déterminer la constante k; mais comme *l'équation VII* n'est pas exacte à cause des différens termes qu'on y a négligés comme inutiles dans la recherche de l'équation séculaire, on ne pourra déterminer de cette manière les deux quantités dont il s'agit; ainsi on se contentera de rejeter les termes en question sans faire attention aux conditions nécessaires pour la destruction rigoureuse de ces termes, & on pourra prendre, sans erreur sensible, pour k sa valeur approchée 1, & pour $\frac{ds}{d\varphi}$ sa valeur donnée par les observations.

Supposons donc $\frac{ds}{d\varphi} = p$, & soit de plus $\frac{d\xi + dn}{d\varphi} = \pi$, $\frac{d\xi}{d\varphi} = q$, en sorte que $p - 1$ désigne le rapport du mouvement de l'apogée de la Lune à son mouvement moyen en longitude, $\pi - 1$ le rapport du mouvement de l'apogée du Soleil au mouvement moyen de la Lune, & $q - 1$ le rapport du mouvement des points équinoxiaux à ce même mouvement moyen *(article 23)*, il est facile de voir que *l'équation VII* deviendra de cette forme,

$$\frac{d^2 v}{d\varphi^2} + n^2 v + \Omega = 0,$$

où $n^2 = 1 - 3\,\frac{1 + \frac{3e^2}{2}}{2\gamma^2 k^2} + \frac{6B}{k^2}$ & Ω sera composée de différens termes de la forme A cos. $(a + \alpha\varphi)$; & on sait que chacun de ces termes donnera dans la valeur de v le terme correspondant $\frac{A}{\alpha^2 - n^2}$ cos. $(a + \alpha\varphi)$; de sorte qu'on aura facilement par ce moyen la valeur complète de v.

(28.) Pour avoir les termes qui doivent composer la valeur de Ω, il n'y aura qu'à substituer dans les termes de *l'équation VII*, qui sont affectés de quelques sinus ou cosinus, $1 + e$ cos. s à la place de u, parce qu'on peut négliger dans

la première approximation la quantité très-petite v; on pourroit même négliger auſſi le terme e coſ. s qui eſt fort petit vis-à-vis de 1, la valeur de e étant environ $= \frac{1}{20}$; mais comme on ſait que dans la théorie de la Lune, il ſe rencontre des termes qui augmentent beaucoup par l'intégration, il faut voir ſi de pareils termes ne peuvent pas venir du terme e coſ. s; or comme les coëfficiens p, π, q & n diffèrent peu de l'unité, il eſt d'abord clair que les deux termes qui contiennent ſin. $(\xi + n)$ & ſin. ζ ſous le ſigne $\int$, étant multipliés par coſ. s, en donneront deux autres qui contiendront ſin. $(\xi + n - s)$ & ſin. $(\zeta - s)$, & qui étant multipliés par $d\varphi$ & intégrés enſuite, ſe trouveront augmentés dans les raiſons de 1 à $\frac{1}{\pi - n}$ & de 1 à $\frac{1}{q - n}$; ainſi il ſera bon de conſerver ces termes.

De plus, les termes qui contiennent des ſinus ou coſinus de $2(\xi + n)$ & de 2ζ, étant multipliés par coſ. s, en donneront d'autres qui contiendront des ſinus ou coſinus de $2(\xi + n) - s$ & de $2\zeta - s$; & ces ſortes de termes augmenteront beaucoup dans la valeur de v, puiſqu'ils devront être diviſés par les quantités très-petites $(2\pi - p)^2 - n^2$ & $(2q - p)^2 - n^2$; il faudra donc auſſi avoir recours aux termes de cette eſpèce.

A l'exception des termes dont nous venons de parler, on pourra mettre par-tout ailleurs 1 à la place de u, & on trouvera, toutes réductions faites,

$$\Omega = L \text{ coſ. } 2(\xi + n) + M \text{ coſ. } (\xi + n) + N \text{ coſ. } 3(\xi + n) + P \text{ coſ. } 2\zeta + Q \text{ ſin. } \zeta + R \text{ ſin. } 3\zeta + S \text{ coſ. } [2(\xi + n) - s] + T \text{ coſ. } (\xi + n - s) + V \text{ coſ. } (2\zeta - s) + X \text{ ſin. } (\zeta - s);$$

où les coëfficiens L, M, &c. auront les valeurs ſuivantes.

$$L = \frac{9\epsilon^2}{8r^2k^2} + \frac{9\epsilon^2}{8r^2k^4\pi},$$

$$M = \frac{9\epsilon\left(1 + \frac{3\epsilon^2}{4}\right)}{4r^2k^2\lambda} + \frac{3\epsilon\left(1 + \frac{3\epsilon^2}{4}\right)}{2r^2k^4\lambda\pi},$$

$$N = \frac{15\varepsilon^3}{8r^2k^2\lambda} + \frac{5\varepsilon^3}{8r^2k^4\lambda\pi},$$

$$P = \frac{3C}{2k^2} - \frac{C}{k^4q},$$

$$Q = \frac{2D}{k^2} - \frac{D}{k^4q},$$

$$R = \frac{2E}{k^2} - \frac{E}{k^4q},$$

$$S = -\frac{27\varepsilon^2e}{16r^2k^2} - \frac{9\varepsilon^2e}{2r^2k^4(2\pi - p)} + \frac{9\varepsilon^2ep}{16p^2},$$

$$T = -\frac{15\varepsilon\left(1 + \frac{3\varepsilon^2}{4}\right)e}{4r^2k^4\lambda(\pi - p)},$$

$$V = \frac{3Ce}{2k^2} - \frac{Ce}{k^4(2q - p)} - \frac{Cpe}{2k^2},$$

$$X = -\frac{2De}{k^4(q - p)}.$$

Et de-là on trouvera

$$v = \frac{L\,\text{cof.}\,2(\xi + n)}{4\pi^2 - n^2} + \frac{M\,\text{cof.}(\xi + n)}{\pi^2 - n^2} + \frac{N\,\text{cof.}\,3(\xi + n)}{9\pi^2 - n^2}$$
$$+ \frac{P\,\text{cof.}\,2\zeta}{4q^2 - n^2} + \frac{Q\,\text{fin.}\,\zeta}{q^2 - n^2} + \frac{R\,\text{fin.}\,3\zeta}{9q^2 - n^2} + \frac{S\,\text{cof.}[2(\xi + n) - s]}{(2\pi - p)^2 - n^2}$$
$$+ \frac{T\,\text{cof.}(\xi + n - s)}{(\pi - p)^2 - n^2} + \frac{V\,\text{cof.}(2\zeta - s)}{(2q - p^2 - n^2} + \frac{X\,\text{fin.}(\zeta - s)}{(q - p)^2 - n^2}.$$

(29.) Il ne s'agit plus maintenant que de ſubſtituer dans la quantité $\frac{\Pi}{u^3}$, c'eſt-à-dire *(art. 25)* dans celle-ci (x étant $= \frac{1}{u}$)

$$-\frac{9\varepsilon^2}{8r^2u^4}\,\text{fin.}\,2(\xi + n) - \frac{3\varepsilon\left(1 + \frac{3\varepsilon^2}{4}\right)}{4r^2\lambda u^5}\,\text{fin.}(\xi + n)$$
$$-\frac{15\varepsilon^3}{16r^2\lambda u^3}\,\text{fin.}\,3(\xi + n) + Cu\,\text{fin.}\,2\zeta - \frac{Du^2}{2}\,\text{cof.}\,\zeta$$
$$-\frac{3E}{2}u^2\,\text{cof.}\,3\zeta,$$

à la place de u ſa valeur $1 + e\,\text{cof.}\,s + v$, & de tenir compte uniquement des termes qui contiendront des ſinus ou coſinus de l'angle $\xi + n - \zeta$ ou de ſes multiples quelconques *(art. 23)*; nous allons pour cela examiner ſéparément chacun des termes de la quantité dont il

s'agit, & nous supposerons, pour abréger, l'angle $\xi + n - z$ égal à α, ainsi qu'on l'a déjà fait plus haut.

Et 1.° il est clair que le terme $-\frac{9\epsilon^2}{8r^2u^4}$ sin. $2(\xi + n)$ pourra donner un terme de la forme sin. 2α, pourvu que la quantité $\frac{1}{u^4}$ en contienne un de la forme cos. $2z$; or $\frac{1}{u^4} = 1 - 4(e\,\text{cos.}\,s + v) + 10(e\,\text{cos.}\,s + v)^2 - \alpha$; ainsi on aura d'abord dans la valeur de $\frac{1}{u^4}$, en vertu du terme $-4v$, celui-ci $-\frac{4P}{4q^2 - n^2}$ cos. $2z$; ensuite on trouvera, en vertu du terme 10.2 cos. $s.v$ cet autre-ci $\frac{10eV}{(2q-p)^2 - n^2}$ cos. $2z$; de sorte que le terme dont il s'agit donnera le suivant $\frac{9\epsilon^2}{8r^2}\left(-\frac{2P}{4q^2 - n^2} + \frac{5eV}{(2q-p)^2 - n^2}\right)$ sin. 2α.

2.° Le terme $-\frac{3\epsilon\left(1 + \frac{3\epsilon^2}{4}\right)}{4r^2\lambda u^5}$ sin. $(\xi + n)$ donnera un terme de cette forme sin. α ou cos. α, pourvu que la quantité $\frac{1}{u^5}$ en contienne de la forme cos. z ou sin. z; or $\frac{1}{u^5} = 1 - 5(e\,\text{cos.}\,s + v) + 15(e\,\text{cos.}\,s + v)^2 - \alpha$; & il est visible que le terme $-5v$ donnera d'abord celui-ci $\frac{5Q\,\text{sin.}\,z}{q^2 - n^2}$, & que le terme $15.2e$ cos. $s.v$ donnera celui-ci $\frac{15eX}{(q-p)^2 - n^2}$ sin. z; ainsi le terme en question donnera le suivant $-\frac{3\epsilon\left(1 + \frac{3\epsilon^2}{4}\right)}{4r^2\lambda}\left(-\frac{5Q}{2(q^2 - n^2)} + \frac{15eX}{2[(q-p)^2 - n^2]}\right)$ cos. α.

3.° Le terme $-\frac{15\epsilon^3}{16r^2\lambda u^5}$ sin. $3(\xi + n)$ donnera un terme de la forme sin. 3α ou cos. 3α, pourvu que la quantité

$\frac{1}{u^5}$ en contienne de la forme cof. $3\,z$ ou fin. $3\,z$; mais $\frac{1}{u^5} = 1 - 5\,(e \text{ cof. } s + v) + 15\,(e \text{ cof. } s + v)^2$ &c. & l'on trouvera que le terme $-\,5\,v$, produira celui-ci $-\,\frac{5\,R}{9\,q^2 - n^2}$ fin. $3\,z$, & que les autres termes n'en produiront aucun de cette efpèce; donc le terme dont il s'agit donnera fimplement celui-ci $\frac{15\,e^2}{16\,r^2\,\lambda} \times \frac{5\,R}{2\,(9\,q^2 - n^2)}$ cof. $3\,\alpha$.

4.° Le terme $C\,u$ fin. $2\,z$, en donnera un de la forme fin. $2\,\alpha$, fi u ou v en contient un de la forme cof. $2\,(\xi + n)$; or le terme de cette forme qui eft contenu dans v, eft $\frac{L \text{ cof. } 2\,(\xi + n)}{4\,\pi^2 - n^2}$; ainfi on aura pour le terme dont il s'agit, celui-ci $\frac{CL}{2\,(4\,\pi^2 - n^2)}$ fin. $2\,\alpha$.

5.° Le terme $-\,\frac{D}{2}\,u^2$ cof. z en donnera de la forme cof. α, fi u^2 en contient de la forme cof. $(\xi + n)$; mais $u^2 = 1 + 2\,e \text{ cof. } s + 2\,v + (e \text{ cof. } s + v)^2$, & l'on trouve que $2\,v$ contient d'abord le terme $\frac{2\,M \text{ cof. } (\xi + n)}{\pi^2 - n^2}$, & que $2\,e$ cof. $s \,.\, v$ contiendra le terme $\frac{e\,T}{(\pi - p)^2 - n^2}$ cof. $(\xi + n)$; donc on aura par le terme en queftion, celui-ci $-\,\frac{D}{2}\left(\frac{M}{\pi^2 - n^2} + \frac{e\,T}{2\,[(\pi - p)^2 - n^2]}\right)$ cof. α.

Enfin le terme $-\,\frac{3\,E}{2}\,u^2$ cof. $3\,z$, donnera un terme de la forme cof. $3\,\alpha$, fi u^2 en contient de la forme cof. $3\,(\xi + n)$; or on trouve que $2\,v$ contient celui-ci $\frac{2\,N \text{ cof. } 3\,(\xi + n)}{9\,\pi^2 - n^2}$, & que les autres termes de la valeur de u^2 n'en contiennent aucun de cette efpèce; ainfi on aura fimplement le terme $-\,\frac{3\,E}{2} \times \frac{N}{9\,\pi^2 - n^2}$ cof. $3\,\alpha$.

Raſſemblant donc tous les termes qu'on vient de trouver, on aura les trois ſuivans

$$\left[\frac{9\epsilon^2}{8r^2}\left(-\frac{2P}{4q^2-n^2}+\frac{5eV}{(2q-p)^2-n^2}\right)+\frac{C.L}{2(4\pi^2-n^2)}\right]\text{ſin. }2\alpha,$$

$$\left.\begin{array}{l}+\left[\dfrac{3\epsilon\left(1+\dfrac{3\epsilon^2}{4}\right)}{8r^2\lambda}\left(\dfrac{5Q}{q^2-n^2}-\dfrac{15eX}{(q-p)^2-n^2}\right)\right.\\ \left.\quad-\dfrac{D}{2}\left(\dfrac{M}{\pi^2-n^2}+\dfrac{eT}{2[(\pi-p)^2-n^2]}\right)\right]\end{array}\right\}\text{coſ. }\alpha,$$

$$+\left(\frac{15\epsilon^3}{16r^2\lambda}\times\frac{5R}{2(9q^2-n^2)}-\frac{3E}{2}\times\frac{N}{9\pi^2-n^2}\right)\text{coſ. }3\alpha,$$

qui ſeront contenus dans la valeur de $\frac{\Pi}{n^3}$, & qui pourront par conſéquent donner une équation ſéculaire; & il eſt facile de ſe convaincre, avec un peu de réflexion, que ces termes ſeront effectivement les ſeuls de cette eſpèce qui pourront entrer dans la valeur de $\frac{\Pi}{n^3}$, du moins dans la première approximation; ainſi il n'y aura qu'à voir ſi l'équation ſéculaire qui en réſulte eſt conforme ou non aux obſervations.

(30.) J'obſerve d'abord que ſi on ſuppoſe que les deux hémiſphères de la Terre ſoient ſemblables, ſuppoſition à laquelle il n'eſt preſque pas permis de renoncer, du moins ſans les raiſons les plus fortes & les plus déciſives, on aura *(art. 14 & 18)* $f = 0$, $f' = 0$, $f'' = 0$; $g = 0$, $g' = 0$, $g'' = 0$; $h = 0$, $h' = 0$, $h'' = 0$; donc *(art. 24)* $D = 0$ & $E = 0$; & de-là *(article 28)* $Q = 0$, $R = 0$, $X = 0$; d'où il s'enſuit que dans ce cas les trois termes ci-deſſus ſe réduiront à celui-ci unique

$$\left[\frac{9\epsilon^2}{8r^2}\left(-\frac{2P}{4q^2-n^2}+\frac{5eV}{(2q-p)^2-n^2}\right)+\frac{CL}{2(4\pi^2-n^2)}\right]\text{ſin. }2\alpha;$$

de ſorte que comme α exprime la longitude de l'apogée du Soleil *(art. 23)*, on aura une équation ſéculaire apparente & analogue à celle que nous avons examinée dans l'*art. 8;* ainſi il n'y aura plus qu'à voir ſi le coëfficient de cette équation eſt tel qu'il faut pour répondre aux obſervations.

Pour cela, je remarque que suivant les observations on a $p - 1 = - \frac{6' 41''}{13^d 10' 35''} = \frac{-1}{108\frac{1}{7}}$; ce qui, à cause de $r^2 = 178$, ne diffère pas beaucoup de $\frac{-3}{2r^2}$; ensuite on a aussi par les observations $\pi - 1 = - \frac{16''}{365\frac{1}{4}(13^d 10' 35'')}$ & $q - 1 = - \frac{50''}{365\frac{1}{4}(13^d 10' 35'')}$; d'où l'on voit que les quantités π & q sont presque égales à l'unité ; du moins la différence en est si petite, qu'il seroit inutile d'en tenir compte dans les coëfficiens.

De plus, on a déjà observé que la constante k est aussi à très-peu-près égale à l'unité ; du moins la différence ne peut être que de l'ordre de ϵ^2 & de $\frac{1}{r^2}$; c'est pourquoi on aura, sans erreur sensible *(art. 27)* $L = \frac{9\epsilon^2}{4r^2}$, $P = \frac{C}{2}$, $V = 0$; & faisant ces substitutions dans le coëfficient du terme sin. 2α trouvé ci-dessus, on verra que tout se détruira, en sorte que ce coëfficient deviendra nul de lui-même.

(31.) Si les deux termes $\frac{9\epsilon^2}{8r^2} \times \frac{-2P}{4q^2 - n^2} + \frac{CL}{2(4\pi^2 - n^2)}$ ne se détruisoient pas, on auroit une quantité de l'ordre de $\frac{\epsilon^2 C}{r^2}$; de même si les différens termes de la valeur de V ne se détruisoient pas entr'eux, cette quantité seroit de l'ordre de Ce, & par conséquent, à cause de $(2p - q)^2 - n^2 = (1 - \frac{3}{r^2})^2 - 1 + \frac{3}{2r^2} - 6B = - \frac{9}{2r^2} - 6B$, le terme $\frac{9\epsilon^2}{8r^2} \times \frac{5eV}{(2q - p)^2 - n^2}$ seroit de l'ordre $\epsilon^2 e^2 C$, c'est-à-dire du même ordre que les autres termes, à cause que $\frac{1}{r^2}$ & e^2 sont à-peu-près des quantités du même ordre.

Ainsi le coëfficient de sin. 2α dans la quantité $\frac{\Pi}{n^3}$, seroit

de l'ordre de $\frac{\epsilon^2 C}{r^2}$, c'eſt-à-dire de l'ordre $\frac{C}{(60)^2 . 180}$, à cauſe de $\epsilon =$ environ $\frac{1}{60}$ & de $r^2 =$ environ 180.

Dénotons, pour plus de ſimplicité, ce coëfficient par β, en ſorte que la quantité $\frac{\Pi}{u^3}$ renferme le terme β ſin. 2α; & ſi on regarde l'angle α comme conſtant, on aura $\int \frac{\Pi \, d\varphi}{u^3} =$ β ſin. $2\alpha \times \varphi$; donc *(équat. VII)* $dt = \frac{d\varphi}{k u^2} - \frac{\beta \text{ ſin. } 2\alpha}{k u^2} \varphi \, d\varphi$, & à cauſe que le terme tout conſtant de u^2 eſt à très-peu-près $= 1$, & que k eſt auſſi preſque $= 1$, on aura en intégrant, t ou $Z = \varphi - \frac{\beta \text{ ſin. } 2\alpha}{2} \varphi^2$ (Z étant l'angle du mouvement moyen répondant à l'angle du mouvement vrai φ); d'où $\varphi = Z + \frac{\beta \text{ ſin. } 2\alpha}{2} Z^2$; donc *(art. 2)* $\frac{\beta \text{ ſin. } 2\alpha}{2} = i$ $= \frac{9}{10000 \times 360 \times 3600 \times \pi r^2}$, & de-là $\beta = \frac{18}{10000 \times 360 \times 3600 \times \pi r^2 \text{ ſin. } 2\alpha}$; c'eſt la valeur que doit avoir le coëfficient β pour pouvoir répondre aux obſervations. Or nous avons vu ci-deſſus que ſi les termes qui compoſent la valeur de ce coëfficient ne ſe détruiſoient pas entr'eux, du moins à très-peu-près, ce coëfficient ſeroit de l'ordre de $\frac{C}{(60)^2 . 180}$; d'où il s'enſuit que l'on devroit avoir alors pour la valeur de C, une quantité de l'ordre $\frac{18}{(100)^2 \times 360 \times \pi \text{ ſin. } 2\alpha}$, ou bien (à cauſe de $\pi =$ environ 3) de l'ordre $\frac{1}{(100)^2 \times 60 \times \text{ ſin. } 2\alpha}$; mais on a *(art. 24)* $C = \frac{3}{2} (a^2 - \frac{b^2 + c^2}{2})$ ſin. ω^2; donc il faudroit que la quantité $a^2 - \frac{b^2 + c^2}{2}$ fût de l'ordre de $\frac{1}{(100)^2 \times 90 \times \text{ ſin. } 2\alpha \text{ ſin. } \omega^2}$.

Si on ſuppoſe la Terre elliptique & homogène, on a *(art. 20)*

(art. 20), à cauſe que la diſtance de la Lune à la Terre ayant été ſuppoſée $= 1$, le rayon de la Terre eſt environ $= \frac{1}{60}$, on a, dis-je, $a^2 = \frac{1}{5(60)^2}$, $b^2 = c^2 = \frac{1}{5}$ $\frac{1}{(60)^2} \times (1 + \frac{1}{230})^2$; donc, on aura à très-peu près dans cette hypothèſe, $a^2 - \frac{b^2 + c^2}{2} = - \frac{1}{5(60)^2} \times \frac{1}{115} =$ $- \frac{1}{(60)^2 575}$; or, il eſt viſible que cette quantité eſt à peu près du même ordre que la précédente, à cauſe de $(100)^2$ $90 = 900000$, & de $(60)^2 575 = 2070000$; d'où l'on peut d'abord conclure que ſi les principaux termes du coëfficient de ſin. 2α ne ſe détruiſoient pas, ce coëfficient ſeroit à peine ſuffiſant pour donner une équation ſéculaire conforme aux obſervations.

En général, quelle que ſoit la figure de la Terre, pourvu qu'elle ſoit un ſolide de révolution, on a, par la théorie de la préceſſion des équinoxes, $\frac{b^2 - a^2}{b^2} = \frac{1}{173}$ à peu près; or, il eſt bien aiſé de ſe convaincre que la quantité b^2 eſt néceſſairement moindre que le carré du rayon de l'équateur, c'eſt-à-dire $< \frac{1}{(60)^2}$ (la diſtance de la Lune à la Terre étant priſe pour l'unité); de ſorte qu'on aura (b^2 étant $= c^2$) $\frac{b^2 + c^2}{2}$ $- a^2 < \frac{1}{173(60)^2} < \frac{1}{622800}$.

D'un autre côté, on a trouvé que, pour que le coëfficient de ſin. 2α, répondît aux obſervations dans l'hypothèſe où les principaux termes de ce coëfficient ne ſe détruiroient pas, il faudroit que la même quantité $\frac{b^2 + c^2}{2} - a^2$ fût de l'ordre de $\frac{1}{(100)^2 \, 90 \text{ ſin. } 2\alpha \,.\, \text{ſin.} \omega^2}$, c'eſt-à-dire (à cauſe que ω eſt l'obliquité de l'écliptique, & α la longitude de l'apogée

du Soleil) de l'ordre $\frac{1}{(100)^2 \,.\, 90 \,.\, \text{sin.}\, 15^d \frac{1}{2} \,.\, (\text{sin.}\, 23^d \frac{1}{2})^2} = \frac{1}{38242}$; quantité qui eſt de beaucoup plus grande que la précédente; d'où il s'enſuit que même dans cette hypothèſe on auroit peine à expliquer l'équation ſéculaire de la Lune, par le moyen du terme dont il s'agit.

Mais, puiſque nous avons trouvé que le coëfficient de ce terme eſt à peu-près nul, du moins aux quantités de l'ordre de $\frac{1}{r^2}$ près (car les valeurs de p & de k que nous avons priſes égales à l'unité, n'en diffèrent réellement que par des quantités de ce même ordre); il eſt clair que la vraie valeur de ce coëfficient ſera néceſſairement de l'ordre de $\frac{\epsilon^2 \epsilon}{r^2}$; par conſéquent le terme dont nous parlons, ſera tout-à-fait inſuffiſant pour produire l'équation ſéculaire de la Lune, telle que les Tables de Mayer la donnent.

On trouvera à peu-près le même réſultat, ſi l'on a égard à la variabilité de l'angle α, auquel cas l'équation ſéculaire ne ſera qu'apparente, & devra avoir la valeur déterminée dans l'*article 8*.

On conclura donc de-là, que l'équation ſéculaire dont il s'agit, ne ſauroit venir de la non-ſphéricité de la Terre, tant qu'on y ſuppoſe les deux hémiſphères ſemblables; mais avant de prononcer ſur l'impoſſibilité d'expliquer cette équation par l'attraction de la Terre ſuppoſée non-ſphérique, il eſt à propos de voir ce que la diſſimilitude des hémiſphères peut donner ſur ce point.

(32.) Pour cela, il ne s'agit que d'examiner l'effet des autres termes de la formule de l'*art. 29*, c'eſt-à-dire, de ceux qui contiennent $\text{coſ.}\, \alpha$ & $\text{coſ.}\, 3\,\alpha$, & que nous avons vu devoir diſparoître lorſque les deux hémiſphères de la Terre ſont ſemblables. Or, on a *(art. 27)* aux infiniment petits de l'ordre ϵ^2 près,

$$M = \frac{15\,\epsilon}{4\,r^2\,\lambda},\ N = \frac{5\,\epsilon^3}{2\,r^2\,\lambda},\ Q = D,\ R = E;$$

$$T = -\frac{15\epsilon\epsilon}{4r^2\lambda(1-p)},\quad x = -\frac{2D\epsilon}{1-p},$$

où l'on remarquera que $1-p$, eſt une quantité très-petite, $= \frac{3}{2r^2}$ environ *(art. 30)*. Subſtituant donc ces valeurs dans les deux termes dont nous venons de parler, ils ſe réduiront (en y négligeant ce qu'on doit y négliger) à celui-ci;

$$\left(\frac{3\epsilon}{8r^2\lambda}\times\frac{5D}{1-n^2} - \frac{D}{2}\times\frac{15\epsilon}{4r^2\lambda(1-n^2)}\right)\text{coſ. }\alpha,$$

lequel, comme l'on voit, diſparoît de lui-même.

Il arrive donc de nouveau, par une fatalité ſingulière, que les deux principaux termes du coëfficient de coſ. α, ſe détruiſent. Si cela n'étoit pas, il eſt clair que ce coëfficient ſeroit de l'ordre de $\frac{\epsilon D}{r^2\lambda(1-n^2)}$, c'eſt-à-dire, à cauſe de $n^2 = 1 - \frac{3}{2r^2}$ à très-peu-près *(art. 27)* de l'ordre de $\frac{\epsilon D}{\lambda}$; or, λ diſtance du Soleil à la Terre eſt environ $= 200$, puiſque celle de la Lune à la Terre eſt ſuppoſée $= 1$; donc, $\frac{\epsilon}{\lambda}$ ſera de l'ordre de $\frac{\epsilon}{r^2}$; de plus, il eſt facile de voir que les quantités D & E *(art. 24)*, doivent être généralement parlant, plus petites que la quantité C dans la raiſon du rayon de la Terre à la diſtance de la Lune, c'eſt-à-dire, dans la raiſon de 1 : 60, parce que les quantités a^2, b^2, c^2, ne ſont que de deux dimenſions, au lieu que les quantités f^3, f'^3, f''^3, ſont de trois *(art. 18)*; ainſi, on peut regarder les quantités de l'ordre de $\frac{\epsilon D}{\lambda}$ comme du même ordre que celles de l'ordre $\frac{\epsilon^2 C}{r^2}$; d'où il s'enſuit que ſi les principaux termes du coëfficient de coſ. α ne ſe détruiſoient pas, ce coëfficient ſeroit du même ordre que celui de ſin. 2α, dans le cas où les termes de celui-ci ne ſe détruiroient pas *(art. 31)*; ainſi, on pourra faire ici le même raiſonnement que nous avons fait dans l'article précédent, & en tirer des

conclusions semblables. Il est vrai que, comme les quantités f', f'', f''', sont indéterminées, on pourroit les prendre telles que les coëfficiens de cos. α & de cos. 3α, eussent la valeur requise pour donner l'équation séculaire de Mayer; mais il est facile de se convaincre qu'il faudroit, pour cela, supposer aux deux hémisphères de la Terre, des figures trop dissemblables, pour qu'on pût les accorder avec les mesures des degrés & la théorie de la précession des équinoxes, & de la nutation de l'axe de la Terre.

(33.) Comme dans les calculs précédens, nous avons toujours fait abstraction de l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'égard de l'écliptique, on pourroit peut-être douter au premier aspect, si cette circonstance ne doit pas apporter quelque changement à nos résultats; mais pour lever ce doute, il suffit de remarquer que l'inclinaison de l'orbite ne peut avoir d'autre influence dans nos calculs, que d'introduire un sixième angle ζ égal à la distance de la Lune au nœud, lequel se combineroit avec les cinq autres que nous avons considérés dans l'*art. 23;* or, comme le mouvement des nœuds est assez prompt, étant à celui du Soleil dans la raison de 1 : 18; il est facile de se convaincre que cet angle ζ, ne sauroit donner aucune nouvelle combinaison qui puisse servir à expliquer l'équation séculaire; de sorte qu'on est, ce me semble, bien en droit de conclure que cette équation, si elle est réelle, ne peut être l'effet de la figure non-sphérique de la Terre.

(34.) Après avoir examiné l'effet de l'action de la Terre sur la Lune, eu égard à la non-sphéricité de la Terre, il conviendroit aussi d'entrer dans un pareil examen, relativement à la figure non-sphérique de la Lune; car il est clair qu'il doit résulter aussi de cette circonstance, de nouvelles forces perturbatrices de l'orbite de la Lune; & il pourroit arriver que ces forces combinées avec celles qui viennent de l'action du Soleil, pussent servir à expliquer l'équation séculaire. Aussi, l'Académie demande-t-elle expressément dans son programme, qu'on ait égard à la figure non-sphérique tant

de la Terre que de la Lune. D'ailleurs, l'examen dont il s'agit ne peut avoir de difficultés après ce que nous avons démontré juſqu'ici, puiſqu'il doit être aiſé d'appliquer à la Lune les formules que nous avons trouvées pour la Terre; mais il ne ſera pas même néceſſaire d'entreprendre un nouveau calcul ſur cet objet, pour décider la queſtion de l'équation ſéculaire, & on pourra s'en diſpenſer par les conſidérations ſuivantes.

Il eſt clair que pour avoir les forces perturbatrices de l'orbite de la Lune, provenantes de la non-ſphéricité de cette Planète, il n'y aura qu'à prendre les formules des *art. 19 & ſuiv.* en ſens contraire, en appliquant à la Lune les quantités qui, dans ces formules, ſe rapportent à la Terre.

Ainſi, ω ſera l'inclinaiſon de l'équation lunaire ſur l'écliptique, laquelle eſt d'environ 2^d; z ſera la longitude de la Terre vue de la Lune, & comptée depuis le nœud de ſon équateur; de ſorte que, comme on ſait par les obſervations que les nœuds de l'équateur lunaire coïncident toujours, du moins à très-peu-près, avec ceux de l'orbite de la Lune, l'angle z ſera égal à la diſtance de la Lune au nœud de ſon orbite, angle que nous avons déjà nommé ζ ci-deſſus (*art. 33*); ψ ſera la diſtance du premier méridien de la Lune au nœud de ſon équateur; & puiſque la Lune préſente toujours à la Terre la même face, à la libration près qui eſt très-petite & périodique, ſi on prend, ce qui eſt permis, pour premier méridien, celui qui eſt dirigé vers le centre de la Terre, lorſque la libration eſt nulle, & qu'on nomme Λ l'angle de la libration, on aura $\psi = \zeta + \Lambda$. Enfin, la quantité y exprimera la latitude de la Terre vue de la Lune, & aura par conſéquent la même valeur que dans les formules citées, où elle dénote la latitude de la Lune vue de la Terre; de ſorte qu'on aura, en nommant χ l'inclinaiſon de l'orbite lunaire, $\text{tang. } y = \text{tang. } \chi \text{ ſin. } \zeta$, ou à très-peu-près, à cauſe de χ très-petit, $y = \chi \text{ ſin. } \zeta$. Quant à la quantité Λ qui exprime la libration de la Lune, elle doit être proportionnelle à l'équation du centre de la Lune, ou

plus exactement, à la somme de toutes les équations qui affectent le mouvement moyen de cette Planète; il pourroit à la vérité s'y joindre encore une équation provenante de la libration physique, supposé qu'elle ait véritablement lieu; mais comme il n'y a encore rien de bien constaté sur ce point, ni par la théorie, ni par les observations, on pourra se dispenser d'y avoir égard; & d'ailleurs quand on en voudroit tenir compte, on trouveroit aisément qu'il n'en pourroit rien résulter pour l'équation séculaire de la Lune, à moins de faire des suppositions trop forcées & trop peu admissibles sur la figure de cette Planète.

On voit donc par-là, que l'expression des forces perturbatrices de la Lune, provenantes de la non-sphéricité de sa figure, ne pourront renfermer que les mêmes angles qui composent les argumens des inégalités de la Lune, produites par l'action du Soleil, c'est-à-dire, les angles ξ, s, n, ζ (*art. 23 & 33*); or, il n'y a aucune combinaison de ces angles ni de leurs multiples qui puisse donner un angle constant, ou à très-peu-près constant, à moins d'admettre des multiples fort grands, auquel cas le coëfficient qui affecteroit le sinus ou le cosinus d'un tel angle, seroit d'autant plus petit, & par conséquent insuffisant pour l'explication de l'équation séculaire (sur quoi *voyez le VIe Vol. des Opuscules de M. d'Alembert*); ainsi on peut être assuré d'avance, que la non-sphéricité de la Lune ne peut être d'aucune utilité dans la recherche de cette équation.

(35.) Je n'entreprendrai pas maintenant d'examiner si l'équation séculaire de la Lune, peut être l'effet de l'action des autres Planètes: cette discussion nous méneroit trop loin & demanderoit même un ouvrage particulier, auquel le défaut de temps & mes occupations actuelles, m'empêchent de me livrer; mais il ne paroît pas impossible de pouvoir décider la question *à priori*, par des considérations analogues à celles de l'*art. préced.* En effet, il est facile de voir que les expressions des forces perturbatrices de la Lune, produites par l'action d'une Planète quelconque, ne peuvent dépendre que

des angles s, π, ζ relatifs à la Lune, & des angles analogues s', π', ζ' relatifs à la Planète (s' étant l'anomalie de la Planète, π' son élongation à la Terre, & ζ' sa distance au nœud); de sorte que ces expressions ne renfermeront que des sinus ou cosinus d'angles formés par la combinaison de ceux-ci & de leurs multiples; & on prouvera aisément que la quantité $\frac{\Pi}{\pi'}$ ne pourra être formée que de pareils sinus ou cosinus; & si on veut avoir égard, en même temps, à l'action du Soleil, il se joindra encore à ces six angles, celui de l'anomalie du Soleil qu'on a nommé ci-dessus ξ. Tout se réduira donc à examiner si l'on peut trouver une combinaison des sept angles s, π, ζ, s', π', ζ', ξ & de leurs multiples, laquelle donne un angle tout-à-fait, ou du moins à très-peu-près constant; or, d'après les valeurs connues des rapports de ces angles, on pourra s'assurer aisément, qu'il n'est guère possible de former de telles combinaisons, sans employer des multiples assez grands; d'où l'on peut conclure que les termes qui pourront produire une équation séculaire, ne se présenteront qu'après plusieurs corrections de l'orbite, & seront par conséquent d'un ordre beaucoup trop petit, pour pouvoir donner une équation sensible & conforme aux observations.

(36.) Puis donc que l'équation séculaire de la Lune, telle que les Tables de Mayer la donnent, ne peut être l'effet de la non-sphéricité de la Terre, ni de celle de la Lune, ni de l'action des autres Planètes sur la Lune, & par conséquent *ne sauroit être expliquée par le secours de la gravitation seule*; il faut que, si cette équation est réelle, elle provienne de quelqu'autre cause, comme de la résistance que la Lune éprouveroit de la part de quelque fluide très-rare, dans lequel elle seroit mue; mais comme, d'un autre côté, l'hypothèse d'un fluide très-subtil, dont la résistance altèreroit sensiblement le mouvement des corps célestes, n'est pas encore bien confirmée par les observations des autres Planètes, que même elle paroit être contredite par celles de Saturne, dont le mouvement va en se ralentissant, au lieu de s'accélérer comme

cela devroit être, en vertu de la résistance de l'éther; il me semble qu'on ne doit pas admettre cette hypothèse uniquement dans la vue d'expliquer par son moyen, l'équation séculaire dont il s'agit.

Je dis *si cette équation est réelle ;* car il me paroît que les preuves que l'on en a jusqu'à présent, ne sont pas bien décisives, puisqu'elles sont fondées uniquement sur quelques observations faites dans des siècles fort éloignés, & sur l'exactitude desquelles on ne sauroit guère compter.

(37.) M. Dunthorn, le premier après M. Halley qui ait adopté l'hypothèse de l'accélération de la Lune, & le seul, ce me semble, qui soit entré là-dessus dans quelques détails, ne s'en est pas tenu à la simple comparaison des observations des années 720 avant J. C. & 977, 978 après J. C. avec les modernes, pour prouver la nécessité de cette accélération; il a aussi discuté dans le même objet, quelques autres observations faites dans les siècles intermédiaires *(voyez le Vol. 46 des Transact. Philosoph.);* mais quoique ces observations paroissent confirmer en gros, l'accélération du mouvement moyen de la Lune, elles ne s'accordent cependant pas entre elles, à beaucoup près, ni sur la quantité de l'accélération séculaire, ni même sur la loi de cette accélération; c'est ce que je vais faire voir en empruntant les résultats des calculs de ce savant Astronome.

Les observations qu'il a examinées sont, en les rangeant par ordre chronologique, 1.° une éclipse de Lune observée à Babilone le 9 Mars 720 avant J. C. & rapportée par Ptolémée *dans le IV.e Liv. de son Almageste, chap. VI.* On ne sait d'autres circonstances de cette éclipse, sinon qu'elle a commencé plus d'une heure après le lever de la Lune, & qu'elle a été totale. M. Dunthorne ayant fait à cette observation les réductions convenables, a trouvé que le commencement a dû être à $6^h\ 46'$; ensuite, l'ayant calculée par ses propres Tables, qui n'ont jamais été publiées, que je sache, a trouvé que le commencement auroit dû être à $8^h\ 32'$; ce qui donne une anticipation de $1^h\ 46'$ de l'observation sur

les

les Tables, & par conséquent une erreur de 54′ sur la Longitude calculée.

2.° Une éclipse de Lune observée à Babylone le 23 Décembre 382 avant J. C. (il faut remarquer que M. Dunthorn rapporte faussement cette éclipse à l'année 312). Le commencement en a été observé, au rapport de Ptolémée, une demi-heure avant la fin de la nuit; d'où M. Dunthorn dit que ce commencement a été à 6^h 42′ du matin, tandis que les Tables ne le lui donnent qu'à 8^h 15′; ce qui fait une anticipation de 1^h 33′, & par conséquent une erreur de 43′ 15″ sur la Longitude calculée.

3.° Une éclipse de Lune observée à Alexandrie le 22 Septembre 200 avant J. C. & rapportée par Ptolémée d'après Hipparque. Cette éclipse a dû commencer une demi-heure avant le lever de la Lune, ce qui revient, suivant M. Dunthorn, à 5^h 32′, tandis que les Tables ne lui donnent que 6^h 12′; ce qui fait une anticipation de 40′, & par conséquent une erreur de 20′ 20″ sur la Longitude calculée.

4.° Une éclipse de Soleil observée par Théon à Alexandrie le 16 Juin 364 après J. C. & rapportée dans son commentaire sur l'Almageste. Le commencement en a été à 3^h 18′; d'où M. Dunthorn conclut la distance de la Lune au Soleil de 39′ 41″, tandis que les Tables ne la lui donnent que de 35′ 25″; ce qui fait une différence de 4′ 16″, qui est l'erreur des Tables au temps de l'observation.

5.° Une éclipse de Soleil observée au Caire le 13 Décembre 977, & dont le commencement est arrivé lorsque le Soleil étoit haut de 15^d 43′, & la fin, lorsque la hauteur du Soleil étoit de $33^d \frac{1}{2}$. M. Dunthorn conclut de-là que le commencement de cette éclipse a dû être à 8^h 25′, & la fin à 10^h 45′ du matin; & il trouve que l'erreur de ses Tables sur la longitude de la Lune, est de 7′ 36″ dont la Lune s'est trouvée plus avancée.

6.° Une éclipse de Soleil observée dans le même endroit le 8 Juin 978, & qui a commencé lorsque le Soleil étoit haut de 56 degrés, & finie lorsqu'il étoit haut de 26 degrés.

M. Dunthorn trouve que le commencement de cette éclipse a dû être à 2^h 31′, & la fin à 4^h 50′; d'où il conclut l'erreur de ses Tables sur la longitude de 8′ 45″ dont la Lune étoit plus avancée.

Ces deux observations se trouvent dans l'Histoire céleste de Tycho, & sont tirées d'un manuscrit Arabe qui renferme les observations de Ibn Jonis, & qui se trouve dans la Bibliothèque de Leyde; ce sont celles dont nous avons parlé au commencement de ces Recherches.

Enfin, une éclipse de Soleil observée à Nuremberg par Walter le 29 Juillet 1478, laquelle donne une erreur de 10′ sur la longitude calculée; mais comme il en résulte aussi une erreur en latitude de 9′ 12″, M. Dunthorn croit cette observation trop inexacte pour qu'on puisse s'y fixer.

Rassemblant maintenant ces résultats, on aura les élémens suivans.

ANNÉES des OBSERVATIONS.	ERREURS des TABLES DE DUNTHORN.
720 avant J. C.	— 54′ 0″
382.	— 47. 15.
200.	— 20. 20.
364 après J. C.	— 4. 16.
977.	+ 7. 36.
978.	+ 8. 45.
1478.	+ 10. 29.

(38.) Il paroît en général par cette Table, que le mouvement de la Lune a dû s'accélérer continuellement depuis l'année 720 avant J. C. jusqu'à présent; voyons donc quelle doit être la quantité & la loi de cette accélération, pour répondre aux observations que nous venons de rapporter.

Pour cela, je remarque qu'entre la première & la troisième

observation il y a un intervalle de cinq cents vingt ans; qu'entre celle-ci & la quatrième il y a un intervalle de cinq cents soixante-trois ans ; qu'entre la quatrième & la cinquième il y a un intervalle de six cents trente-trois ans ; qu'enfin entre la cinquième & la septième il y a un intervalle de cinq cents ans ; d'où l'on voit que ces intervalles ne sont pas fort différens entr'eux, en sorte qu'on pourra, sans craindre de grandes erreurs, les prendre & les traiter comme égaux.

De cette manière donc, les erreurs des Tables de Dunthorn seront à-peu-près dans des intervalles de temps égaux, — 55′, — 20′, — 4′, + 8′, + 10′; & si on suppose que ces erreurs soient dûes à une équation qui augmente comme les carrés des temps, & qu'il faille de plus changer l'époque & le mouvement moyen des Tables ; il est clair que les différences secondes seront constantes, & que la moitié de la valeur de cette différence constante prise négativement, sera l'équation séculaire pour un espace de temps égal à l'intervalle d'une observation à l'autre : or je trouve en prenant successivement les différences

— 54	— 20	— 4	+ 8	+ 10	Erreurs des Tables.
— 34	— 16	— 12	— 2		Premières différ.
— 18	— 4	— 10			Secondes différ.

& comme les différences secondes sont trop inégales entre elles, je crois pouvoir en conclure qu'on ne sauroit sauver les erreurs des Tables par un simple changement de l'époque & du mouvement moyen combiné avec une équation séculaire qui augmente comme les carrés des temps.

(39.) Mais voyons encore si on pourroit concilier les observations avec les Tables, en introduisant dans celles-ci

une équation séculaire apparente, qui dépende du sinus d'un certain angle qui croisse ou décroisse uniformément.

Soit p le changement qu'il faudroit faire à l'époque des Tables pour l'observation de 720 avant J. C. q le changement qu'il faudroit faire au mouvement moyen pour cinq cents cinquante ans environ, ce qui est l'intervalle moyen entre les observations, α l'argument de l'équation séculaire pour l'observation de 720 avant J. C. φ le mouvement ou la variation de cet argument pour cinq cents cinquante ans, & f le coëfficient ou la plus grande valeur de l'équation; on aura donc pour les erreurs des Tables dans les cinq observations dont il s'agit, supposées équidistantes les quantités

$$p + f \text{ sin. } \alpha, \; p + q + f \text{ sin. } (\alpha + \varphi),$$
$$p + 2q + f \text{ sin. } (\alpha + 2\varphi), \; p + 3q + f \text{ sin. } (\alpha + 3\varphi),$$
$$p + 4q + f \text{ sin. } (\alpha + 4\varphi); \text{ donc}$$

$$p + f \text{ sin. } \alpha = - 54,$$
$$p + q + f \text{ sin. } (\alpha + \varphi) = - 20,$$
$$p + 2q + f \text{ sin. } (\alpha + 2\varphi) = - 4,$$
$$p + 3q + f \text{ sin. } (\alpha + 3\varphi) = 8,$$
$$p + 4q + f \text{ sin. } (\alpha + 4\varphi) = 10,$$

équations par lesquelles on pourra déterminer les cinq inconnues p, q, f, α, φ. Pour cela, j'ajoute la première & la troisième, j'ai

$$3(p + q) + f [\text{sin. } \alpha + \text{sin. } (\alpha + 2\varphi)] = - 58,$$

mais $\text{sin. } \alpha + \text{sin. } (\alpha + 2\varphi) = 2 \text{ cos. } \varphi \times \text{sin. } (\alpha + \varphi)$; donc, on aura en divisant par deux,

$$p + q + f \text{ cos. } \varphi \times \text{sin. } (\alpha + \varphi) = - 29;$$

& de-là,

$$f \text{ sin. } (\alpha + \varphi) = - \frac{29 + p + q}{\text{cos. } \varphi};$$

or, la seconde équation donne

$$f \text{ sin. } (\alpha + \varphi) = - 20 - p - q;$$

donc, comparant ces deux valeurs, on aura

$\frac{29 + p + q}{\text{cof.}\,\varphi} = 20 + p + q$; d'où

$p + q = \frac{20\ \text{cof.}\,\varphi - 29}{1 - \text{cof.}\,\varphi}$.

De même, en ajoutant la feconde & la quatrième équation, on aura

$2(p + 2q) + f\,[\text{fin.}(\alpha + \varphi) + \text{fin.}(\alpha + 3\varphi)] = -12$,

favoir, à caufe de fin. $(\alpha + \varphi) +$ fin. $(\alpha + 3\varphi) = 2$ cof. φ fin. $(\alpha + 2\varphi)$, $p + 2q + f\,\text{cof.}\,\varphi \times \text{fin.}(\alpha + 2\varphi) = -6$;

d'où l'on tire f fin. $(\alpha + 2\varphi) = -\frac{6 + p + 2q}{\text{cof.}\,\varphi}$;

& comme la troifième équation donne f fin. $(\alpha + 2\varphi)$

$= -4 - p - 2q$,

on aura par la comparaifon de ces valeurs,

$\frac{6 + p + 2q}{\text{cof.}\,\varphi} = 4 + p + 2q$; & de-là,

$p + 2q = \frac{4\ \text{cof.}\,\varphi - 6}{1 - \text{cof.}\,\varphi}$.

On comparera de même entr'elles les trois dernières équations; & comme M. Dunthorn regarde l'obfervation de Walter qui a donné 10′ d'erreur, comme un peu fufpecte, nous prendrons en général $2m$ pour l'erreur de cette obfervation; ainfi, on aura d'abord en ajoutant la troifième & la cinquième équation,

$2(p + 3q) + f\,(\text{fin.}(\alpha + 2\varphi) + \text{fin.}(\alpha + 4\varphi)] = 2m - 4$,

& à caufe de fin. $(\alpha + 2\varphi) +$ fin. $(\alpha + 4\varphi) = 2$ cof. $\varphi \times$ fin. $(\alpha + 3\varphi)$,

$p + 3q + f\,\text{cof.}\,\varphi \times \text{fin.}\,(\alpha + 3\varphi) = m - 2$; d'où

f fin. $(\alpha + 3\varphi) = \frac{m - 2 - p - 3q}{\text{cof.}\,\varphi}$;

mais la quatrième équation donne f fin. $(\alpha + 3\varphi) = 8 - p - 3q$; donc $8 - p - 3q = \frac{m - 2 - p - 3q}{\text{cof.}\,\varphi}$;

d'où $p + 3q = \frac{m - 2 - 8\ \text{cof.}\,\varphi}{1 - \text{cof.}\,\varphi}$.

On a donc maintenant les trois équations

$$p + q = \frac{20 \text{ cof. } \varphi - 29}{1 - \text{cof. } \varphi},$$

$$p + 2q = \frac{4 \text{ cof. } \varphi - 6}{1 - \text{cof. } \varphi},$$

$$p + 3q = \frac{m - 2 - 8 \text{ cof. } \varphi}{1 - \text{cof. } \varphi};$$

d'où l'on tire d'abord celles-ci,

$$q = \frac{-16 \text{ cof. } \varphi + 23}{1 - \text{cof. } \varphi} = \frac{m + 4 - 12 \text{ cof. } \varphi}{1 - \text{cof. } \varphi};$$

& par conféquent,

$-16 \text{ cof. } \varphi + 23 = m + 4 - 12 \text{ cof. } \varphi$; d'où cof. φ $= \frac{19 - m}{4}$.

On voit donc que cette équation ne fauroit fubfifter, en adoptant $10'$ pour l'erreur des Tables fur l'obfervation de Walter; car on auroit alors $2m = 10$, & $m = 5$, ce qui donneroit cof. $\varphi = \frac{14}{4} = 3\frac{1}{2}$.

En général, comme cof. φ doit être néceffairement < 1, il faudra que l'on ait $\frac{19 - m}{4} < 1$;

Donc $19 - m < 4$, & $m > 15$; donc $2m > 30$; en forte que l'erreur des Tables au temps de l'obfervation dont il s'agit, loin d'être moindre que celle que M. Dunthorn a trouvée, devroit être au contraire trois fois plus grande; ce qui ne fauroit être admis, puifqu'il faudroit que Walter fe fût trompé d'environ une heure fur le temps de l'éclipfe qu'il a obfervée.

(40.) Si on défigne $-2a$, $-2b$, $-2c$, $-2d$, $-2e$ les erreurs -54, -20α, en forte que l'on ait les équations

$$p + f \text{ fin. } \alpha = -2a,$$

$$p + q + f \text{ fin. } (\alpha + \varphi) = -2b,$$

$$p + 2q + f \text{ fin. } (\alpha + 2\varphi) = -2c,$$

$$p + 3q + f \text{ fin. } (\alpha + 3\varphi) = -2d,$$

$$p + 4q + f \text{ fin. } (\alpha + 4\varphi) = -2e,$$

on trouvera ces trois-ci,

$$p + q = \frac{2b \text{ cof. } \varphi - a - c}{1 - \text{cof. } \varphi},$$

$$p + 2q = \frac{2c \text{ cof. } \varphi - b - d}{1 - \text{cof. } \varphi},$$

$$p + 3q = \frac{2d \text{ cof. } \varphi - c - e}{1 - \text{cof. } \varphi};$$

d'où l'on tire fur le champ

$$q = \frac{2(c - b) \text{ cof. } \varphi + a - b + c - d}{1 - \text{cof. } \varphi}$$

$$= \frac{2(d - c) \text{ cof. } \varphi + b - c + d - e}{1 - \text{cof. } \varphi},$$

& de-là,

$$2(c - b) \text{cof. } \varphi + a - b + c - d = 2(d - c) \text{cof. } \varphi + b - c + d - e,$$

favoir,

$$\text{cof. } \varphi = \frac{a - 2b + 2c - 2d + e}{2(b - 2c + d)};$$

connoiffant l'angle φ, on connoîtra p & q, & enfuite f & α par les équations ci-deffus; cette folution peut être utile dans d'autres occafions, & c'eft ce qui nous a engagé à la rapporter ici.

(41.) Au refte, comme M. Dunthorn n'a point publié fes Tables de la Lune, & que par conféquent on ne peut favoir quel degré de confiance elles méritent; que d'ailleurs les Aftronomes paroiffent être convenus de regarder celles de Mayer comme les meilleures, j'ai cru qu'il étoit important de voir ce que ces dernières donneroient; & jai prié en conféquence un très-habile Aftronome (M. B**), de vouloir bien calculer les lieux de la Lune, au temps des obfervations rapportées ci-deffus d'après les Tables de Mayer, pour en déduire les erreurs de ces Tables; je l'ai même engagé à entreprendre ce travail deux fois, premièrement en adoptant l'époque & le mouvement moyen de la Lune de Caffini, &

y appliquant les équations données par les Tables de Mayer, & ensuite, en faisant le calcul uniquement d'après ces dernières Tables; car comme la différence de 3′ 42″ qui est entre les mouvemens moyens séculaires de la Lune suivant Cassini & suivant Mayer, tient principalement à l'équation séculaire introduite par ce dernier, ainsi qu'on l'a vu au commencement de ce Mémoire, si on veut faire abstraction de cette équation, il paroît naturel qu'on rétablisse le mouvement moyen tel que Cassini l'a trouvé; or il ne sera pas inutile dans notre recherche, de connoître les erreurs des Tables dans cette hypothèse, & de les comparer à celles qui ont lieu dans l'hypothèse de l'équation séculaire.

Voici les résultats de ces Calculs; l'Auteur m'a assuré les avoir faits & revus avec beaucoup de soin, & de manière à pouvoir compter entièrement sur leur exactitude.

LIEUX des OBSERVAT.	DATE des ÉCLIPSES OBSERVÉES.	ERREURS des Tables DE MAYER avec l'équat. séculaire.	ERREURS des Tables DE MAYER sans l'équat. séculaire.
Babylone...	720 av. J. C. Mars 19.	— 24′ 55″	— 23′ 30″
Babylone...	382...... Déc. 22.	— 26.	— 11. 30.
Alexandrie..	200...... Sept. 22.	— 17.	— 1. 15.
Alexandrie..	364 ap. J. C. Juin 16.	— 12. 40.	+ 12. 12.
Caire........	977...... Déc. 12.	— 1. 22.	+ 20. 42.
Caire........	978...... Juin. 8.	+ 0. 18.	+ 16. 35.

Il faut remarquer à l'égard des deux premières observations de cette Table, qu'on a supposé dans le calcul, d'après

M.

M. de la Lande *(Mém. Acad. année 1757)* que la différence des méridiens entre Paris & Babylone n'eſt que de $2^h\ 32'$; tandis que M. Dunthorn la fait de $2^h\ 41'\ \frac{3}{4}$, à cauſe que, ſuivant Ptolémée, Babylone eſt plus à l'orient qu'Alexandrie de 50 minutes, & que la différence des méridiens entre cette dernière ville & Paris, eſt fixée à $1^h\ 51'\ \frac{3}{4}$.

Si on vouloit adopter la détermination de Dunthorn, alors les erreurs des Tables au temps des deux premières obſervations, c'eſt-à-dire, en 720 & 382 avant J. C. deviendroient d'environ 5 minutes plus grandes.

(43.) Si on prend les erreurs contenues dans la dernière colonne de la Table précédente, mais en omettant celle de l'année 382, & ſubſtituant à la place des deux dernières, la valeur moyenne $18'\ \frac{1}{2}$, on a cette ſuite de nombres $-23\frac{1}{2}$, $-1\frac{1}{4}$, $+12\frac{1}{4}$, $+18\frac{1}{2}$, dont les différences premières ſont $22\frac{1}{4}$, $12\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{4}$, & dont les différences ſecondes ſont $-9\frac{3}{4}$, $-6\frac{1}{4}$; leſquelles ſont trop inégales pour qu'on en puiſſe rien conclure directement pour la loi de l'équation ſéculaire *(article 38)*; on pourroit cependant, en changeant ſeulement de quelques minutes les erreurs dont il s'agit, rendre leurs différences ſecondes, conſtantes & égales à la valeur moyenne -8 des précédentes; alors on auroit 4 minutes pour la quantité de l'équation ſéculaire dans l'eſpace d'environ cinq cents cinquante ans; ce qui donneroit à peu-près 8 ſecondes pour l'équation ſéculaire au bout du premier ſiècle; mais nous ne nous arrêterons pas davantage là-deſſus, & nous paſſerons à examiner les erreurs des Tables même de Mayer qu'on voit dans la pénultième colonne.

Il eſt d'abord évident que le but de ce ſavant Aſtronome a été principalement de faire quadrer ſes Tables avec les Obſervations Arabes de 977 & 978; mais on doit, ce me ſemble, être un peu ſurpris de ce que ſes Tables ne repréſentent pas mieux l'obſervation de 720 avant J. C. qui a toujours ſervi de baſe dans la détermination des moyens mouvemens de la Lune; cependant ſi on fait attention que

le calcul a été fait en prenant avec M. de la Lande 6^h $11'$ pour le temps de l'opposition, tandis que suivant M. Cassini, elle a dû arriver à 6^h $58'$, on verra que cette différence de 47 minutes, en produira une d'environ 24 minutes dans le lieu de la Lune *(article 4 ci-dessus)*, ce qui réduira l'erreur des Tables de Mayer à environ — 1 minute.

Il paroît donc très-probable que cet Astronome a suivi le calcul de M. Cassini pour la détermination du lieu de la Lune dans l'éclipse de 720 avant J. C. & qu'il a par conséquent tâché d'y accommoder ses Tables au moyen de l'équation séculaire qu'il a appliquée au mouvement moyen. Mais si la correction que M. de la Lande a faite au calcul de M. Cassini, & dont il rend raison dans son Mémoire sur les équations séculaires *(Mémoires de l'Académie, année 1757)* est fondée, il est clair que le mouvement moyen & l'équation séculaire de Mayer devront être un peu altérés pour que ses Tables puissent représenter également l'observation de 720 avant J. C. & celles de 977 & 978 après J. C.

Soit x le nombre de minutes dont il faudroit augmenter le mouvement séculaire de Mayer, & y celui dont il faudroit augmenter son équation séculaire pour le premier siècle, à compter depuis 1700, il est clair qu'en gardant l'époque du lieu moyen pour 1700, le lieu moyen pour 978 se trouvera plus avancé de $-7\frac{1}{5}x + (7\frac{1}{5})^2y$, & pour 720 avant J. C. de $-24\frac{1}{5}x + (24\frac{1}{5})^2y$; or comme l'erreur des Tables de Mayer est presque nulle pour l'observation de 978, il faudra faire d'abord $-7\frac{1}{5}x + (7\frac{1}{5})^2y = 0$, pour que le lieu moyen ne change pas en 978; & l'on aura par-là $x = 7\frac{1}{5}y$; ensuite pour détruire l'erreur de $-24'\ 55''$ que les Tables donnent pour l'observation de 720 avant J. C. on fera $-24\frac{1}{5}x + (24\frac{1}{5})^2y = 24\frac{11}{12}$, ce qui à cause de $x = 7\frac{1}{5}y$ donne à très-peu près, $y = \frac{1}{17} = 3''\frac{1}{2}$, & $x = 25''$; en sorte que l'équation séculaire devroit être pour le premier siècle de $12''\frac{1}{2}$, & le mouvement séculaire moyen de 10^s 7^d $54'$ $0''$.

(44.) Ce changement dans l'équation ſéculaire & dans le mouvement moyen diminueroit auſſi beaucoup les erreurs des Tables dans les obſervations intermédiaires; car le lieu moyen ſe trouveroit plus avancé d'environ 13 minutes pour l'obſervation de 382 avant J. C. d'environ 17 minutes pour celle de 200 avant J. C. & d'environ 5 minutes pour l'obſervation de 364 après J. C. de ſorte que les erreurs trouvées dans la dernière colonne de notre Table précédente, en ſeroient diminuées d'autant.

Il eſt vrai qu'en changeant le lieu moyen, les valeurs des équations doivent auſſi changer un peu; mais on peut ici négliger ces variations qui ne peuvent monter qu'à quelques ſecondes; en effet il eſt clair qu'il n'y aura que les trois principales équations de la Lune, ſavoir l'*équation du centre*, l'*érection* & la *variation*, qui puiſſent recevoir un changement tant ſoit peu ſenſible, tandis que le lieu moyen augmente ou diminue de quelques minutes; or à cauſe que dans les obſervations dont il s'agit, la diſtance de la Lune au Soleil, eſt 0 ou 180 degrés, la variation ſera nulle, & l'érection aura pour argument la ſimple anomalie de la Lune; de plus comme toutes les Éclipſes rapportées dans notre Table ci-deſſus, à l'exception des deux dernières, ſont arrivées, la Lune étant aſſez éloignée de ſes apſides, on trouvera aiſément que la différence produite par le changement des équations dont nous venons de parler, ne pourra guère monter à une minute.

Il n'en ſeroit pas de même pour les deux Éclipſes de 977 & 978, qui ſont arrivées fort près des apſides de la Lune, où un degré de différence dans l'anomalie peut donner juſqu'à $7' \frac{1}{2}$ de variation dans l'équation du centre; mais puiſque nous avons fait en ſorte que les changemens du mouvement moyen & de l'équation ſéculaire ſe compenſent mutuellement au temps de ces Éclipſes, le lieu moyen de la Lune n'a point été altéré par ces changemens.

(45.) Au reſte comme les obſervations qui nous ont été tranſmiſes par Ptolémée ne ſont rapportées que d'une

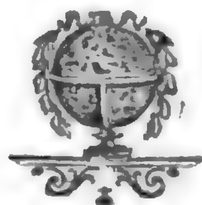
manière fort vague, & que d'ailleurs on ſait qu'il eſt très-difficile de fixer le commencement ou la fin d'une Éclipſe de Lune, à cauſe de la pénombre & de l'atmoſphère de la Terre qui en rendent les phaſes douteuſes, & qui font que nos meilleurs Aſtronomes s'y trompent quelquefois de pluſieurs minutes, malgré l'exactitude de nos Inſtrumens & les ſoins ſcrupuleux qu'on a coutume d'apporter à ces ſortes d'obſervations; il s'enſuit qu'il y a très-peu de fonds à faire ſur les obſervations que nous venons de diſcuter ci-deſſus pour en déduire l'équation ſéculaire de la Lune; & ſi l'on joint à cette remarque celle que M. de la Lande a déjà faite ſur l'incertitude des deux Obſervations arabes de 977 & 978, au ſujet deſquelles feu M. Bevis, ſavant Aſtronome Anglois, qui avoit entre les mains une traduction du Manuſcrit Arabe d'où elles ſont tirées, lui dit qu'il avoit de fortes raiſons de douter ſi c'étoient de véritables obſervations, ou de ſimples calculs *(Aſtronomie, article 1485)*; on conviendra ſans peine que l'exiſtence de cette prétendue équation ſéculaire eſt encore très-douteuſe; de ſorte que comme la théorie y paroît en même-temps contraire, le meilleur parti qu'il y auroit à prendre, du moins juſqu'à ce que le temps nous apporte là-deſſus de nouvelles lumières, ſeroit peut-être de rejeter entièrement cette équation, en conſervant néanmoins le mouvement moyen, tel que Mayer l'a établi, lequel paroît aſſez bien d'accord avec les obſervations de ces deux derniers ſiècles, pour leſquelles l'équation ſéculaire eſt d'ailleurs preſque inſenſible.

En effet, le ſavant Aſtronome dont j'ai parlé ci-deſſus, ayant comparé avec les Tables de Mayer les obſervations de quelques Éclipſes de Lune du XIV.e & du XVI.e ſiècle, rapportées par Riccioli dans ſon Almageſte, a trouvé les réſultats ſuivans.

TEMPS MOYEN À PARIS, DES OPPOSITIONS OBSERVÉES.	ERREURS des Tables de MAYER.
1457......... 3 Septembre 10^h 10′	− 1′
1464......... 21 Avril.... $12\frac{1}{2}$	+ 1
1500......... 5 Novembre 12. 59	+ 2
1573......... 8 Décembre 7. 21	− 1

La première de ces quatre Éclipses a été observée à *Mellicum* en Autriche par Purbach & Regiomontanus, la seconde à Padoue par Regiomontanus, la troisième à Rome par Copernic, & la quatrième à Uranibourg par Tycho.

On voit d'abord que les erreurs des Tables de Mayer sont très-petites, & que de plus elles sont les unes positives, & les autres négatives; ce qui prouve que l'époque & le moyen mouvement sont assez bien établis; il n'y a que l'observation de 1500 pour laquelle l'erreur des Tables est un peu sensible; mais je crois qu'il faut la rejeter plutôt sur l'observation même, qui n'est rapportée par Copernic *(liv. IV, chap. IV des rev.)* que d'une manière un peu vague, d'autant plus que cette éclipse n'ayant pas été totale comme les autres, il lui aura été difficile d'en fixer le temps du milieu.



MÉMOIRE
SUR LES
MOYENS DE PERFECTIONNER L'ESPÈCE DE CRISTAL NÉCESSAIRE À LA CONSTRUCTION DES LUNETTES ACHROMATIQUES.

Nec eſt alia materia ſequatior. *Pline, lib. XXXVII, cap. 13.*

Pline dit en parlant du verre: *Il n'y a pas de matière qui obéiſſe mieux à la main de l'ouvrier.*

Par M. LIBAUDE, aſſocié avec M. BONGARD DE ROQUIGNI dans la Verrerie du Valdannoy près Abbeville.

CONNOISSANT les moyens que l'on emploie ordinairement pour faire de beau criſtal, attaché aux travaux de l'art de la Verrerie, digne de l'encouragement du Miniſtère; le ſuivant & l'étudiant, j'oſe le dire, non-ſeulement par état, mais avec paſſion, enhardi par la demande que fait l'Académie Royale des Sciences aux Artiſtes, j'ai cru pouvoir entrer en lice, & m'efforcer de répondre aux vues de cette Compagnie.

Heureux ſi mes foibles efforts pouvoient enlever à nos voiſins & à nos émules, une partie d'où dépend eſſentiellement la perfection de nos Lunettes d'obſervations, & qui doit amener une révolution heureuſe dans l'Aſtronomie!

J'aurois fait des pas plus rapides, ſi les Savans à qui je parle, m'euſſent conduit avec principes dans un Art qui exigeroit toutes leurs connoiſſances en Chimie. J'implore leur indulgence ſur la diction; on doit exiger d'un Artiſte occupé de ſon travail, qu'il rende les choſes, ſans lui demander le vernis de l'élégance du ſtyle.

Je préviens encore ici que je ne chercherai point à expliquer comment opèrent les principaux agens dans la vitrification; les ſolutions de ces problèmes exigeroient plus de connoiſſance que je n'en ai, & des travaux beaucoup plus étendus, auxquels mes facultés & mes occupations m'ôteroient le loiſir de me livrer. Mes Juges, je l'eſpère, s'arrêteront uniquement aux faits que je leur expoſerai. Il me ſiéroit mal de décider des queſtions ſi délicates, & ſur leſquelles je dois laiſſer prononcer les Maîtres; je crois mieux répondre à leurs demandes en leur préſentant des expériences & des faits, plutôt que des idées vagues & un ſyſtème incertain.

L'Académie demande dans le criſtal néceſſaire à la conſtruction des Lunettes achromatiques, *qu'il ſoit d'une denſité demandée, & en même temps exempt des ſtries ou filandres, & du coup-d'œil gélatineux auxquels ſont ſujets les ſtras & le flint-glaſſ d'Agleterre (a).*

J'ai cru premièrement devoir examiner ces verres Anglois qui ſont l'objet de notre émulation, & conſulter nos Lunetiers pour m'informer des qualités qu'ils trouvent dans ces verres, & des défauts aſſez ordinaires à ces mêmes verres Anglois.

Les objectifs de Lunettes achromatiques ſont compoſés de deux verres de denſité différente, qui ſont connus en Angleterre l'un ſous le nom de *flint-glaſſ;* & l'autre ſous celui de *crown-glaſſ.* Les verres appelés *flint-glaſſ* ſont clairs, nets, blancs, exempts de *bulles* ou *points;* & je me ſuis aſſuré qu'ils ont été ſoufflés en manchon, puis coupés avec les ciſeaux, & ouverts comme le ſont les glaces de Veniſe *(b).*

Le *crown-glaſſ* eſt un verre qui a été ſoufflé & ouvert en *plat* à *l'ouvreau* d'un four: il eſt bien net & d'une belle couleur verte.

Je ne m'attacherai pas à imiter ce verre Anglois, 1.° parce

(a) Les mots *flint-glaſſ,* ſignifient en Anglois verre ou criſtal de cailloux, de pierres à fuſil. Je me ſervirai de ce mot pour donner l'idée de tout criſtal propre aux Lunettes achromatiques.

(b) Les groſſes *bulles* conſervent ce nom; les petites ſe nomment *points.* L'origine des *bulles* n'eſt pas la même que celle des *points.*

que l'Académie ne le demande pas; 2.° parce que nos Lunetiers pourroient aisément s'en passer, en lui substituant un beau verre vert le plus commun de nos fabriques *(c)*.

Les Lunetiers m'ont dit que la blancheur dans le *flint-glass* n'étoit pas une qualité essentielle, mais qu'il falloit l'homogénéité dans les parties, qu'il n'y eut point dans ces verres ni de *bulles*, ni de *points*; qu'ils trouvoient dans les verres Anglois une fusion convenable dans la matière; mais que dans la plupart des morceaux de ce verre que l'on tiroit d'Angleterre, les fils, ou plutôt les *lames* ou *tables* les arrêtoient dans leurs ouvrages, & que ces tables gâtoient souvent l'objectif qui paroissoit devoir le mieux réussir.

J'examinai ensuite dans des objectifs défectueux la position de ces lames; je reconnus qu'elles étoient souvent parallèles aux surfaces du morceau de verre que l'on avoit employé. On verra par la suite combien un œil attentif peut découvrir de faits heureux, & tirer parti de ses observations.

Muni de ces connoissances préliminaires & utiles pour mon objet, je résolus de tenter des expériences, ne comptant

---

(c) Je dis que je ne m'attacherai pas à imiter le *crown-glass*, mais conduit par le desir d'être utile, je reviens sur mes pas. L'Académie voudra bien me diriger si je m'égare dans le chemin qui peut m'y conduire.

Il me paroît que dans les verres des Lunettes achromatiques, l'on attend la réussite des objectifs de la différente densité des deux verres qui les composent. Si cela est ainsi, ne peut-on pas espérer un plus grand succès, en combinant un verre léger avec un verre lourd! Et de même que l'on donne de la pesanteur au *flint-glass*, & que le plus pesant réussit le mieux, ne devroit-on pas chercher la légèreté dans le *crown-glass!* il est possible de faire des verres plus légers; & j'ai reconnu, dans les différentes substances vitrifiables qui m'ont passé par les mains, certaines qui conservoient leur légèreté, de même que d'autres gardent leur pesanteur.

Ceux qui travaillent les objectifs des Lunettes achromatiques, disent que la couleur dans le *flint-glass*, & sur-tout dans le *crown-glass*, est indifférente. Mais est-il prouvé qu'un verre léger & blanc ne seroit pas préférable à un verre de couleur d'émeraude foncée, comme l'est le *crown-glass!* D'ailleurs, cette couleur verte ne seroit-elle pas indifférente dans le *flint* ou dans le *crown!*

Si mes idées sont justes, ne deviendroit-il pas avantageux de s'attacher, en suivant mes vues, à perfectionner le *crown-glass*, dont la combinaison avec le *flint-glass*, devient si utile pour les Lunettes d'Astronomie!

pour

pour rien les difficultés & le temps néceſſaire pour m'aſſurer des faits avant que de les ſoumettre au jugement de cette célébre Compagnie.

On ſait que le verre eſt formé avec des ſubſtances diſpoſées à entrer en fuſion, & nommées par cette raiſon *vitrifiables;* mais dans nos fours de Verreries, nous ſommes obligés d'en précipiter encore la fuſion avec des ſels que nous appelons *fondans.*

La matière vitrifiable dont on ſe ſert ordinairement, eſt du ſable ou ſablon.

Le fondant peut être d'une nature fort différente; les uns emploient des ſoudes d'Eſpagne, c'eſt-à-dire de *kaly;* les autres des ſoudes de *varech;* ceux-ci des cendres fondues, comme la *potaſſe;* ceux-là des cendres de plantes terreſtres, &c. mais lorſqu'on veut faire un verre commun, on prend des ſoudes les plus communes, & principalement les ſoudes de varech. Si on veut faire un verre plus beau, on choiſit les ſoudes d'Eſpagne, & l'on emploie les ſels & les cendres de ces ſoudes, ou les cendres de nos foyers non leſſivées. Mais quand on veut faire un verre blanc & parfait, on tire ou des ſoudes d'Eſpagne ou des cendres de nos foyers les ſels qu'elles contiennent, & on n'emploie comme fondant que ces ſels dépouillés des cendres & du charbon. Il eſt prouvé que ces cendres & ce charbon contiennent un phlogiſtique & une partie terreuſe, peu propre à donner un verre fin & d'un beau blanc. Je parle à des perſonnes inſtruites, & je crois en avoir aſſez dit pour me faire entendre dans la ſuite de mon travail.

Ces ſubſtances bien *frittées,* entrent en fuſion dans le four des verreries, & on les travaille, pour les *ouvrager,* ſuivant l'intention de celui qui conduit la fabrique.

Reprenons chacune de ces parties; & comme le verre tient toutes ſes qualités, non-ſeulement du choix & d'un juſte mélange des matières; mais encore de la fuſion dans le four, & enfin des attentions que l'on prend en le travaillant; nous tirerons, d'après les réflexions ſur chacune de ces parties, que nous

traiterons dans autant d'articles ſéparés, les vrais moyens & les plus ſûrs pour faire de bon verre avec les qualités requiſes.

ARTICLE PREMIER.

Des matières vitrifiables.

Je ne rapporterai pas ici toutes les expériences que j'ai faites pour m'aſſurer de la matière vitrifiable la plus propre à donner le *flint-glaſſ* ou le verre des Lunettes achromatiques.

On ſe doute bien que, d'après les recettes anciennes pour faire du criſtal ou pierres compoſées, j'ai ſoumis à l'expérience les cailloux. Je me ſuis aſſuré que le caillou qui, expoſé au feu pour s'y *calciner (d)*, blanchit, donne ſeul un beau verre, qu'il convient de le réduire en poudre très-fine; mais j'avoue que la dépenſe & les ſoins qu'exigent ceux-ci, ne m'ont pas paru mériter la préférence ſur un ſablon bien blanc, très-fin, & ſur-tout exempt de parties terreuſes ou métalliques.

Lorſque près de la Verrerie l'on n'a pas de bon ſable, & tel que je viens de le dire, exempt de terre graſſe, ou de parties métalliques, ſi l'on a de bons cailloux, on doit les préférer au mauvais ſablon, parce que l'on eſt certain qu'ils ſe trouveront moins mélangés de ſubſtances nuiſibles à la compoſition d'un beau criſtal. Il eſt probable que les Anglois font leur *flint-glaſſ* avec des pierres à fuſil; car ce mot le dit. J'ai fait un ſuperbe criſtal avec du criſtal de roche. Il eſt certain que le beau criſtal de roche eſt exempt de parties terreuſes, & eſt très-homogène dans toutes ſes parties. Ce verre étoit ſpécifiquement d'un poids différent du verre de ſable, & peut-être pourroit-on trouver d'autres pierres ou terres vitrifiables, qui, par leur propre peſanteur, donneroient le verre *flint-glaſſ*, ſans addition de ſubſtance métallique *(e)*.

(d) C'eſt le terme impropre dont on ſe ſert pour déſigner cette opération.

(e) Ceci mériteroit d'être examiné plus particulièrement, en ſoumettant à l'expérience des ſubſtances vitrifiables, très-peſantes, juſqu'à ce que l'on en eût trouvé une, qui, ſans avoir des défauts, donnât ſeule un verre lourd.

Étant convaincu qu'il y a du choix dans les ſablons, j'ai fait des dépenſes pour m'en procurer de différens endroits, & je me ſuis aſſuré que dans le nombre de mes épreuves, celui d'Étampes méritoit d'être choiſi; il y en a encore à Senlis, à Dieppe, &c. de très-bon.

Le meilleur ſable demande une préparation, il contient toujours une partie graſſe, une terre végétale (peut-être apportée par le vent ſur le vrai ſable). Pour qu'il ſoit pur, il convient de le laver à pluſieurs eaux & enſuite de le faire ſécher.

Je crois donc ne devoir point chercher ailleurs une matière vitrifiable: les difficultés vont croître à meſure que nous avançons, & ſe multiplieront à l'article intéreſſant des fondans.

ARTICLE DEUXIÈME.

Des fondans.

Nous avons dit que pour faire de beau criſtal, il falloit prendre pour fondans les ſels extraits des cendres de plantes; on les nomme en verrerie les *ſalins.*

Ceci nous diſpenſe de parler des verres que l'on peut faire avec les ſoudes de varech, avec les ſoudes d'Eſpagne & leurs cendres, enfin avec les cendres de foyers contenant leurs ſels. Nous paſſons tout de ſuite aux verres dans la compoſition deſquels on ne fait entrer comme fondans que le *ſalin.*

Pour traiter complètement cet article, il faudroit donner l'art de tirer le ſalin; car d'un bon ſalin on obtient de meilleur verre, & il y a une ſcience à tirer plus de ſalin & de bon ſalin. Je renvoie à l'Art de la verrerie de *Kunckel,* qui, je l'avoue, laiſſe trop à deſirer; mais c'eſt, je crois, le ſeul qui ait entamé la matière.

L'Académie me permettra de mettre ici des *principes,* que l'obſervation réitérée & mes expériences me font regarder comme certains, & dont j'eſpérerois convaincre cette Compagnie, ſi j'avois à traiter l'art de la Verrerie, & ſi je pouvois entrer ici dans des détails ſuffiſans.

1.° Le verre eſt d'autant plus beau que l'on a employé moins de fondans pour faciliter la fuſion, & un feu plus vif pour la produire; qu'il a bouilli à gros bouillons dans le commencement de la fuſion.

2.° Que le fondant eſt moins mêlé de ſels de nature différente.

3.° Le verre eſt le ſeul produit de la matière vitrifiable, & le fondant pur n'entre pour rien dans la compoſition du verre parfait *(f)*.

4.° Les chaux métalliques, & certaines chaux métalliques entrent dans la vitrification; elles augmentent la peſanteur du verre, & il convient de choiſir pour le *flint-glaſſ* celles qui, ſans réunir des défauts eſſentiels, ſont les plus denſes, eu égard à leurs maſſes; de ce nombre ſont les chaux de plomb.

5.° Pour faire du verre bien blanc, pour ne le point ternir, ſur-tout celui où il entre de la chaux de plomb, avide de phlogiſtique, il convient mieux de le travailler dans un pot couvert.

6.° Le beau verre doit être *doux, coulant,* quand on le travaille; il doit ſe travailler à une foible chaleur; celui-ci ſe recuit plus aiſément, & eſt toujours plus fin.

7.° Je poſerai encore pour principe (& j'avoue que ceci mériteroit d'être traité par quelque Membre de cette ſavante Compagnie), *(g)* que les ſoudes d'Eſpagne donnent en ſalin, principalement l'alkali minéral, qui eſt la baſe du ſel marin, & qu'il eſt très-poſſible d'avoir ce ſel en beaux criſtaux, entièrement ſéparé d'autres ſels.

Que toutes les cendres de bois donnent à peu-près les

(f) J'imagine bien que ceci ſe trouvera ſujet à beaucoup d'objections auxquelles je ne puis pas repondre ici.

(g) Je dois avouer que j'ai profité ici du travail que m'a communiqué un Savant, qui ne me permet pas même aujourd'hui de le nommer; mais vous le connoiſſez ſans doute, Meſſieurs. Digne Élève d'un de vos illuſtres Membres, il a, comme lui, le zèle le plus ardent pour le progrès des Sciences & des Arts. Faire le bien, eſt ſon plus grand plaiſir, & la ſeule récompenſe flatteuſe qu'il en attend.

mêmes principes dans l'analyse, & qu'il en résulte un tartre vitriolé, de l'alkali végétal, & un peu d'alkali minéral.

8.° Que quelques plantes peuvent contenir du sel marin; que celles-là le doivent aux évaporations de l'eau de la mer, ou aux urines avec lesquelles on les a arrosées; d'autres du sel de nitre, & que ce sel provient du lieu où ont crû ces plantes, dont le terrein, formé de plâtras & de fumier, a fourni ce sel que la plante a pompé.

Reprenons chacun de ces paragraphes.

Il faut donc choisir, d'après le premier principe, le fondant le plus actif, c'est-à-dire celui qui *porte* le plus de sable.

Il s'ensuit encore qu'il ne faut donner au sable que ce qui est nécessaire de fondans pour obtenir une vitrification complète: si l'on manque ce point, l'on a un verre que l'on nomme *cordé,* & qui ne peut se travailler.

Il seroit impossible d'ouvrager la composition du verre destiné à être coulé en table, ce verre étant trop tendre & *cordé.*

J'ai fait des expériences en employant l'alkali minéral pur. Comme ce sel tient presque moitié d'eau dans sa cristallisation, il faut ne compter que sur moitié du sel que l'on emploie: ou mettre dans l'arche, à une foible chaleur, évaporer la partie aqueuse de ce sel; ce sel n'agissant pas avec le plus de force, ne doit point être choisi.

Lorsqu'on tire le salin des soudes d'Espagne, ce salin est moins blanc que le sel de soude pur, & le plus actif est celui qui tire le plus sur la couleur de marron; il porte (le meilleur) cent cinquante livres de sable par cent de salin; il contient donc une matière plus active & plus propre à aider à la fusion des matières vitrifiables & doit être préféré au sel de soude pur. Ce dernier sel aide peu le verre à bouillir, & nous avons dit qu'il falloit pour devenir un verre fin, que la matière en entrant en fusion, formât de gros bouillons; celle qui ne bout pas beaucoup s'affine moins bien, & prend souvent une couleur jaune. On a beau vouloir détruire cette couleur, en lui en donnant une artificielle, si la matière de ce verre est tendre, elle ne tient point la partie colorante

qu'on lui ajoute, & le jaune subsiste, sans que l'on connoisse de moyens sûrs d'en faire un beau verre blanc, clair & net. J'ai employé l'alkali du tartre; il est bon, & ne porte que cent pour cent; ainsi je conseille de ne le pas prendre de préférence. Ce sel précipite la fusion, & je conseillerois de l'employer mêlé avec d'autres fondans (comme *Néri* le dit), si je n'avois pas observé qu'il vaut mieux laisser la matière plus de temps au feu, & lui donner un grand feu, plutôt que de précipiter la fusion par un mélange de différens fondans, qui nuisent toujours à la netteté & à la qualité du verre.

Tous les sels neutres peuvent servir de fondans; mais dans ce nombre, ainsi que dans les alkalis, on doit rejeter ceux qui s'évaporent & se dissipent aisément. Le sel marin, mêlé avec d'autres fondans, a le seul avantage de précipiter la fusion, & de faire bouillir la matière. Mais je dois ajouter que si peu qu'il y ait de sel gris dans une composition, le verre prend une couleur désagréable. Si on emploie le sel marin seul, il se sublime; & quant il est joint à d'autres fondans, il forme sur les pots le *sel de verre;* nouveau composé, qui mériteroit d'être examiné plus exactement encore. Ce sel nuit à la vitrification; il empêche la réunion des parties du verre; il ôte sa transparence; il le rend gras, &c. Un inconvénient pour le Verrier, c'est que lorsqu'il emploie le sel marin en grande quantité, il perce les pots, il use les siéges du four, & le four lui-même.

Après avoir fait l'analyse des cendres de foyers, j'ai obtenu un salin qui n'est composé que de tartre vitriolé, joint à un alkali minéral & végétal, ou qui a une surabondance d'alkali végétal, d'une graisse ou d'un phlogistique que je laisse à l'Académie à bien définir. Je ne m'appuie que de mon travail, qui m'enseigne, à mesure que j'apprends, à me méfier de mes connoissances & à être lent à tirer des décisions. Ce que je puis assurer, c'est que ce salin est le meilleur pour faire le beau verre, & en particulier le verre des Lunettes achromatiques; que plus ce salin est de couleur brune ou de marron, meilleur il est, & plus propre pour porter beaucoup de sable,

eu égard à sa masse. Le salin de bois quand il est bien fait doit porter deux cents livres de sable par quintal de salin. Enfin ce fondant est celui que l'on doit employer de préférence à d'autres.

Ce salin coûte beaucoup dans nos verreries, où la rareté & la cherté des bois rend les cendres peu abondantes. Dans certaines parties de l'Allemagne, on gagne à brûler des cendres pour en obtenir du salin, & chaque paysan tire partie de ses cendres & de la consommation de son bois, pour en tirer le salin.

Les soudes de potasse, étant des cendres de bois qui ont un commencement de fusion, doivent avoir les mêmes propriétés que les sels des cendres; aussi les ai-je employées avec succès. Je préviens cependant que la potasse du nord, faite avec des bois résineux, contient une graisse & un phlogistique qui nuit à la perfection du verre, & que l'on doit faire dissiper par un feu mesuré, dans une des arches du four, & mieux encore par des lavages & des cristallisations réitérées.

Ceci me les fait ranger, pour leur utilité, après le salin des cendres de bois. L'orme est un des arbres qui donne un salin en plus grande quantité, & un des meilleurs.

Comme ces expériences m'indiquoient de préférer le salin des cendres de bois, je crus, après avoir connu par des analyses les sels qui constituoient ce salin, devoir essayer, pour fondans, ceux qui entrent principalement dans sa composition.

J'ai employé le tartre vitriolé seul pour fondant, & après plusieurs épreuves, j'ai reconnu que ce fondant ne porte que cinquante livres de sable par quintal. Le verre qui en est résulté étoit dur, se *calcinoit* à l'air au sortir du pot, & produisoit un verre de mauvaise qualité.

J'ai joint à soixante-cinq livres de tartre vitriolé, vingt-cinq livres d'alkali du tartre, & dix livres d'alkali minéral. Ce fondant a porté plus de sable que dans les premières épreuves; mais le verre n'étoit pas si beau que celui produit par le salin des cendres de foyer. Je crois donc qu'il manque à ce salin composé une qualité dont nous ne sommes pas encore en état

de définir la nature, & ſur laquelle mon travail me laiſſe entrevoir trop foiblement la différence d'avec le ſalin des cendres de foyer, pour oſer la propoſer au jugement de cette Compagnie.

Je dois dire qu'après avoir éprouvé les ſels neutres d'*alun*, de ſel de *Glauber*, de *borax*, &c. j'ai vu que l'alun portoit peu de ſable. Il fait bouillir le verre, & par-là peut être employé utilement dans une compoſition; mais ce ſel qui ſe décompoſe en aſſez grande quantité dans le pot, en précipitant la fuſion, & faiſant bouillir la matière, y laiſſe ſon acide, qui verdit le verre & le rend d'une vilaine couleur. Je dirai la même choſe du ſel de Glauber. Le borax eſt celui qui m'a le mieux réuſſi: mais il eſt trop cher; d'ailleurs il ſe bourſouffle dans le pot, il ſe diſſipe avant d'avoir engagé la vitrification, & il ne peut pas être employé avec ſuccès ſans d'autres additions. Lorſqu'on l'emploie pour faire bouillir la matière, il convient de ne le mettre qu'à très-petites doſes.

Je ne devois pas oublier d'eſſayer pour fondant le ſel de *nitre*, & pour être certain de la façon dont ce ſel agiſſoit, j'ai pris du ſel de nitre de la première cuite, & j'ai joint cent livres de ce ſel avec cent livres de ſable. Le ſel marin que contient ce ſel, lui donnoit une couleur verte; & le verre, quoique brillant, étoit gras. Je l'ai tiré à l'eau; j'ai corrigé cette graiſſe avec cinq livres de chaux vive par cent livres de ſel; mais ce verre ne portoit pas la couleur artificielle qu'on lui avoit donnée, & j'ai eu beaucoup de peine à lui ôter ſa couleur verte.

J'ai pris du ſel de nitre bien purifié, & de la quatrième cuite; & pour être plus sûr de n'employer que le nitre dépouillé de tout ſel marin, & ſans matière graſſe, je l'ai fait diſſoudre pluſieurs fois dans l'eau; &, par des criſtalliſations répétées, je pouvois être certain de n'employer que du ſel de nitre.

Ce ſel bien purifié porte cent vingt-cinq à cent cinquante livres de ſable pour cent, & donne un criſtal d'une couleur très-brillante, ſur-tout quand on *l'a tiré à l'eau*, ainſi que je vais l'expliquer. Cependant, comme ce fondant n'eſt pas des

des plus actifs, & qu'il est cher ici, je ne conseille pas de le préférer au salin de bois.

Je dois dire que lorsqu'on veut éclaircir le verre, & lui donner une couleur artificielle, le sel de nitre est toujours employé; & l'on préfère dans la plupart des fabriques le nitre de la première cuite.

On joint ordinairement ce sel avec la *manganèse,* pour lors il produit une division de la partie colorante de ce minéral, qui s'incorpore dans la matière du verre, & lui donne une teinte agréable. Mais je me retiens, & j'ai promis de laisser les explications des faits aux Savans plus capables que moi d'en donner de justes, afin de m'en tenir simplement aux expériences & à l'observation.

Si le nitre de la première cuite agit, ainsi qu'on le dit, avec plus d'efficacité, ce seroit à raison du sel marin qu'il contient; j'ai dit que ce sel en petite dose engageoit la matière à bouillir à gros bouillons; que ces bouillons, en débarrassant le verre par la sublimation des matières qui ne sont pas le verre, l'affinoient & l'épuroient; on l'employeroit donc utilement dans les compositions des cristaux; mais il a de grands défauts, sur-tout pour le verre *flint-glass.* Je préfère pour cette espèce de verre, ainsi que je l'ai déjà avancé, le salin des cendres de foyer employé pour fondant, puis le salpêtre de la deuxième cuite *(h).*

ARTICLE TROISIÈME.

De la composition des flint-glass, *eu égard à la densité qu'ils doivent avoir.*

Je laisse aux habiles Géomètres, & c'est encore à ceux de l'Académie des Sciences auxquels je m'adresse, pour nous fixer la densité propre à ce verre, qui, joint à un second verre, doit diminuer l'aberration des rayons de la lumière par leurs différentes réfrangibilités. Les opérations purement pratiques

(h) Je puis assurer, par mes expériences, que le salpêtre sera d'autant moins bon, qu'il contiendra plus de sel marin.

ſont de notre reſſort; auſſi n'en ai-je négligé aucune de celles qui dépendoient de moi. J'ai pris chez un Lunetier le *flint-glaſſ* Anglois bon, & je me ſuis aſſuré que le pouce cube de ce verre pèſe 1230 grains. Celui de notre verre blanc ordinaire pèſe 906 grains: ainſi le *flint-glaſſ* eſt à notre verre blanc comme 1000 eſt à 736 ou 737.

Je me doutois bien que je ne pourrois obtenir, dans la vitrification, une différence & une beaucoup plus grande peſanteur qu'en y employant une ſubſtance métallique; mais il falloit trois conditions; 1.° que cette ſubſtance métallique reſtât dans la vitrification en ſe vitrifiant elle-même; 2.° qu'elle ne la colorât pas au point de la ternir; 3.° enfin qu'elle fût par elle-même plus denſe que pareille matière de verre dans laquelle on l'incorpore. J'aurois employé avec ſuccès la chaux d'antimoine: j'ai fait de beau criſtal en joignant à la compoſition une certaine quantité de chaux d'antimoine, que l'on nomme *foie d'antimoine*, ou avec celle connue ſous le nom d'*antimoine diaphorétique*, que l'on ſait être une chaux d'antimoine détonnée avec le nitre & lavée, qui prend une couleur très-blanche: mais mon verre n'acquéroit pas de peſanteur, cette chaux étant plus légère proportionnellement à la même maſſe de verre qu'elle remplace lorſqu'on l'introduit dans une vitrification. J'ai donc ſenti promptement qu'il convenoit de jeter les yeux ſur le plomb, en employant ce minéral réduit en chaux. L'expérience devoit me convaincre ſi l'eſpèce de chaux de plomb ne pouvoit pas produire de grandes différences dans le criſtal; & j'ai eſſayé les chaux de plomb connues.

Je croyois que le blanc de plomb, cette chaux produite par l'acide végétal, réuſſiroit mieux que les autres chaux. Sa blancheur m'engageoit à le conjecturer. J'ai obtenu, par le mélange de cette chaux, un verre de la peſanteur indiquée, & il avoit toutes les conditions requiſes, en n'oubliant aucune des circonſtances que je détaillerai ci-après; mais ce verre étoit d'une couleur bleuâtre & gélatineux. Je crois que la couleur de ce verre provenoit de l'acide végétal, qui jouoit un rôle dans cette vitrification.

Je suis donc revenu à la litharge, & plutôt encore au *minium ;* ces chaux donnent, à la vérité, un verre jaune; mais il est possible, par des préparations que j'indiquerai, de le faire devenir un cristal fort blanc, & aussi beau qu'il est possible de le desirer. La dose de cette chaux m'étoit indiquée par la comparaison de sa pesanteur avec celle du verre blanc.

J'ai joint à du sable bien lavé & séché...	50 livres	0 onces.
Salin de bois le mieux fait..........	25...	0.
Chaux vive en poudre............	2...	8.

J'ajoute, pour cinquante livres de cristal, vingt-cinq livres de *minium*, une once de *manganèse*.

Et huit onces de nitre de la seconde cuite.

J'avertis que pour tirer d'une composition un beau verre à *ouvrager*, il faut une pareille quantité de matière. On n'obtiendra qu'avec grande peine une belle fonte dans un petit vase, appelé chez nous *patelin*, & dans des expériences faites en petit *(i)*.

(i) On sera sans doute surpris, qu'après avoir avancé dans ce Mémoire, que, pour faire de beau cristal, il falloit choisir le fondant le plus actif, ne donner à la matière vitrifiable que la quantité de fondant qui lui est nécessaire, & attendre une belle vitrification de la vive chaleur de son four, plutôt que du secours du fondant; enfin, qu'après avoir dit que le salin doit porter 200 liv. de sable par quintal, & le salpêtre, 125 à 150, je ne m'y sois pas conformé dans cette composition: je crois devoir expliquer au public les raisons de cette espèce de contradiction.

Je ne devois parler dans ce Mémoire, que des expériences que j'avois faites, & qui me mettoient à portée de présenter des échantillons à l'Académie: dans le moment où je l'ai écrit, mon four de verrerie étoit sur son déclin; & ne donnant plus une assez vive chaleur, je forçois malgré moi & contre mes principes, la dose des fondans.

Depuis que j'ai rétabli mon four, je me conforme à la vive chaleur qu'il donne; & voici ce qui me règle pour mes compositions. Prenons pour exemple un verre dans lequel on se sera servi de salpêtre pour fondant.

Le *minium* peut porter ou faire vitrifier moitié de son poids de sable.

30 livres de sable pour 60 de *minium*.
105 livres de sable pour 70 de *salpêtre*.

TOTAL...135 livres de sable.
60 livres de *minium*.
70 livres de *salpêtre*.

D'après mes principes, j'avois deux moyens pour obtenir un verre bien mêlé, très-homogène après sa fonte, & par conséquent à l'abri de ce défaut que l'on nomme dans les verres ouvragés, *verres cordés;* dans les verres coulés, *verres neigeux.*

Le mélange d'un verre est bien fait, & on se met à l'abri de le voir cordé, quand on établit un grand mouvement dans toutes ses parties, lorsqu'on le fait bouillir long-temps. Je vais faire part d'une expérience, qui, si elle ne concourt pas à donner de beau *flint-glass,* au moins pourra constater la vérité du principe premier que j'ai avancé *(page 68),* & donnera des vues à ceux qui pourroient travailler à faire de beaux cristaux, ou la partie de l'art de la Verrerie, qui concerne les verres des Lunettes achromatiques.

J'ai appris par des épreuves répétées que rien n'affine plus parfaitement les verres ordinaires, que d'y joindre à plusieurs reprises des *cuisses* tirées de nos fours *(k),* parce que cette espèce de verre fait bouillir à gros bouillons, & souvent même écumer la matière du pot où on l'a mis. Me servant

---

Souvent je n'ai point ajouté à la composition, de manganèse. Le verre prenoit une couleur bleuâtre qui n'étoit point désagréable, ni préjudiciable pour en former les objectifs des lunettes

Le verre est cordé lorsque nous ouvrageons une matière formée par du groësil de différentes fontes. Ce même verre tiré en masse, fait du verre neigeux: pareille chose arrive, lorsque nous mettons trop de fondans dans une composition, parce que, suivant ma façon de penser, le fondant engage certaines portions de sable à se vitrifier d'une façon plus complète que d'autres; & qu'un verre ou cristal pour être beau, doit être également vitrifié dans toutes ses parties. J'explique aisément, par cette raison, les difficultés que l'on éprouve en faisant le *flint-glass* composé de verre de sable & de verre de plomb de pesanteurs différentes; & l'on jugera si l'on ne peut pas espérer un mélange complet, en le tirant à l'eau plusieurs fois, ainsi que je l'expliquerai dans l'*article V de ce Mémoire.* Je suis d'autant plus porté à croire que le mélange de ces deux différens verres, en se faisant difficilement, est la cause de plusieurs imperfections dans le *flint-glass;* qu'il m'est arrivé souvent dans un pot, de trouver des verres de différentes pesanteurs au commencement, au milieu & à la fin du pot: je ne dois point ajouter que le plus pesant de ces verres étoit celui du fond du pot.

(k) On appelle *cuisses,* le verre qui, sorti du pot, est tombé dans le four, & s'est mêlé dans l'âtre avec du charbon & des cendres.

de ce moyen, j'ai fait avec la compofition fuivante, comme je m'y attendois, un verre vert, prefque noir; mais un verre homogène & très-fin.

J'ai pris, fable . . . . 100 livres. } *minium* 67 Liv.
Soude de varech . . . . 125 }
Et j'ai ajouté des cuiffes à trois différentes fois.

Cette matière donne un verre vert, je le répète, mais très-fin & fans nuage.

Si la couleur, comme on le dit, ne fait rien pour en former les objectifs, ce verre pourra être employé utilement.

Le pouce cube de ce verre pefe 1070 grains.
Ainfi il eft au verre de glace comme 1000 eft à 846 ou 847.

Ce verre formé avec des matières qui contenoient le phlogiftique des charbons, de plus des cendres, & ayant eu pour fondant des foudes de varech, devoit, d'après mes principes, avoir une couleur verdâtre tirant fur le brun. Je devois donc rejeter ce moyen pour obtenir un verre blanc, & j'ai cru ne pouvoir pas mieux réuffir pour mêler les parties d'un vert de fable avec celles d'un vert de plomb, de manière à former un nouveau verre blanc, & très-homogène dans toutes fes parties, qu'en prenant:

1.° Les plus grands foins pour bien mêler le fable très-fec avec le fel de nitre de la feconde cuite, bien pulvérifé & tamifé.

2.° Le mêler auffi le plus exactement qu'il eft poffible avec le *minium,* fans laiffer cette chaux former des boulettes, ainfi qu'il lui arrive affez fouvent.

Enfin ce mélange, dans les parties de ce verre, devoit être d'autant plus complet, que je pourrois réitérer plus fouvent l'opération de le tirer à l'eau, après laquelle je pouvois piler la matière, la bien mêler, & la fondre de nouveau.

J'ai déjà parlé du verre fait avec des cailloux; j'ai effayé, comme je lai dit, jufqu'au criftal de roche; & pour ne rien négliger dans le choix des matières, j'ai choifi pour fondant du fel de nitre de la feconde cuite; avec cette compofition

j'ai obtenu un ſuperbe criſtal; &, en y joignant du *minium*, le plus beau *flint-glaſſ*, en employant les moyens que je vais indiquer dans un moment.

Criſtal de roche auparavant calciné & réduit en poudre très-fine *(l)*	50l	
Salpêtre de la ſeconde cuite	50.	
Et pour cinquante livres de criſtal	25	de *minium.*

Cette compoſition donne un verre d'une belle couleur un peu bleuâtre, & il n'eſt point néceſſaire d'y ajouter de la manganèſe, ni du *ſafre*, pour changer ſa couleur naturelle qui eſt très-tranſparente.

Le *flint-glaſſ* que m'a donné cette compoſition, eſt peſant. Il ſeroit poſſible de forcer la doſe de *minium*, en cherchant à le rendre plus denſe; & j'ignore le terme où il faudroit s'arrêter *(m)*.

J'ajoute ici une expérience que je dois encore au Savant qui m'a dirigé dans le travail du *flint-glaſſ*.

J'avois éprouvé certaines chaux métalliques, qui, moins peſantes que le ſable, ne procuroient aucun poids au verre que j'en compoſois. Il me reſtoit à ſoumettre à l'examen le *biſmuth;* on ſait que ce demi-métal eſt le plus lourd de ceux de ſa claſſe, & qu'il ſe convertit en verre. Il me reſtoit donc à connoître ce qu'il occaſionneroit dans un juſte mélange de ſable & de fondant. J'ai choiſi, d'après les avis que l'on m'a donné, l'eſpèce de chaux connue ſous le nom de *magiſter de biſmuth.*

On ſait que le *biſmuth* y eſt réduit en chaux à l'aide de l'acide nitreux, & que cette chaux eſt enſuite précipitée par le ſimple

(l) Le criſtal de roche eſt plus difficile à fondre que le ſablon. Je dois cependant ajouter ici que la doſe du fondant doit être moindre lorſque le four donne une plus vive chaleur, & que par la ſuite j'ai fondu le criſtal de roche ſeul à cent vingt-cinq pour cent de fondans, tandis qu'ici le *minium* ſervoit auſſi de fondant.

(m) J'ai fait du verre en donnant au *minium* la quantité de ſable qu'il peut vitrifier. Ainſi, à cent livres de *minium*, j'ajoutois cinquante livres de ſable: j'ai eu un verre jaune dont le pouce cube pèſe quinze cents ſoixante-onze grains. Il ne ſeroit peut-être pas impoſſible d'en obtenir un verre fin, blanc & clair.

lavage, en affoibliſſant l'acide avec de l'eau. Ce magiſter bien lavé, fait le blanc ou le fard des Dames; & l'on n'ignore pas qu'il ſe revivifie ſi aiſément, qu'une haleine chargée d'ail ou le plus léger phlogiſtique de l'air, ſuffit pour le noircir.

Voici une des expériences qui a été faite chez moi, que je compte varier, voyant lieu d'en tirer un verre très-parfait.

Sable	13 onces.
Magiſter de biſmuth	8.
Salpêtre, ſeconde cuite	6.

En ſix heures de temps, par un bon feu, j'ai eu un verre fin, très-clair, très-net, d'un beau blanc, & dont le pouce cube pèſe mille quarante-ſix grains;

Le pouce cube de verre blanc ordinaire, pèſe 906 grains.
Ainſi il eſt au verre blanc comme 1000 eſt à 868 ou 869.

Il eſt certainement poſſible de forcer encore la doſe de chaux de *biſmuth:* j'en ai fait avec deux tiers de cette chaux, ſans y avoir aperçu le moindre nuage métallique.

On reconnoît, par cette expérience, que la chaux de *biſmuth* ſert de fondant, puiſque ſix onces de ſalpêtre peuvent porter neuf onces de ſable, & que les quatre autres onces juſqu'à treize, ont été fondues & vitrifiées par les huit onces de magiſter de *biſmuth.* Un grand avantage, c'eſt que ce verre de biſmuth n'eſt point jaune comme le verre de plomb, mais eſt bien blanc. Le prix ſeul de la matière pourroit détourner d'en faire uſage.

ARTICLE QUATRIÈME.

De la Fritte.

Cet article demanderoit encore une deſcription complète de l'art de la Verrerie; car de la *fritte* ſouvent dépend une partie des perfections du verre; il eſt poſſible de faire une bonne fritte, & aiſé de la perdre & rendre ainſi cette opération, quoiqu'avantageuſe en elle-même, plus propre à gâter la compoſition du verre qu'à la perfectionner.

Considérons comment agit la fritte; elle consume dans l'*arche* les charbons qui gâteroient le verre, lorsqu'il y en a de joints avec les cendres: elle détruit un phlogistique surabondant qui nuit à la vitrification, & qui ternit le verre lorsqu'il s'y trouve: elle sublime des sels volatils qui nuiroient à la vitrification: peut-être encore prépare-t-elle (mais je n'ose parler ici de ce fait qu'avec la plus grande circonspection) certains sels à une décomposition qu'ils subiront dans le pot au verre, à l'aide d'un feu continu & des matières qui en devenant verre aideront à cette décomposition.

Je dirai seulement ici que ces considérations sur l'objet que l'on se propose en faisant fritter les matières, & la connoissance parfaite des matières que l'on veut exposer à la fritte, doivent tout de suite indiquer celles que l'on doit faire fritter, & celles qu'il ne convient pas d'exposer à cette première chaleur.

Le sable un peu séché & pur n'a pas besoin d'entrer dans la *calcaise* du four pour y être fritté; mais souvent en le mêlant avec d'autres matières que l'on veut diviser & séparer à l'aide de la fritte, il contribue beaucoup au but que l'on se propose; & souvent il convient de le joindre à ces matières.

Les soudes d'Espagne, &c. avec leurs cendres, doivent être frittées, parce que cette première chaleur les sépare, brûle les charbons des plantes, & diminue ou dissipe un phlogistique qu'elles contiennent toujours, & consume un soufre que ces soudes ont en plus ou en moins grande quantité.

Par cette même raison, lorsque pour faire du verre commun, l'on emploie les soudes de *varech*, on doit les faire fritter. Toutes les cendres de plantes ont besoin aussi d'être placées dans l'*arche-à-fritte.*

En faisant une fritte, il faut avoir égard 1.° à ménager la chaleur, sur-tout dans les commencemens de la cuisson, sans cela la fritte se durcit; elle se met en boules pesantes, une partie des sels se perd, & cette fritte réussit très-mal étant employée & mise dans les pots.

2.° Il faut bien mêler les matières que l'on veut faire fritter,

fritter, afin que les sels *s'ouvrent*, que la matière ne tienne pas au plancher de la calcaise, que les fondans se gonflent; on les remue avec grand soin & à plusieurs reprises dans l'arche: on ne doit la retirer qu'après environ cinq heures.

Après avoir donné à la fritte une douce chaleur, on l'examine ensuite; &, lorsque le fondant est léger, qu'il a blanchi, qu'il forme de petits morceaux, on l'expose à la plus grande chaleur, & l'on voit les sels qui commencent à entrer en fusion; ils se couvrent d'une croûte blanche qui l'annonce, & en même temps indique l'instant où il faut tirer la fritte de l'arche.

Par cette douce chaleur, les fondans s'incorporent, pour ainsi dire, avec le sable; ils l'enveloppent & le disposent à entrer plus promptement dans une fusion complète.

Nous n'avons pas encore parlé d'un effet que produit la fritte; elle dégage par cette douce chaleur l'air interposé entre les molécules des matières propres à devenir verre; aussi généralement les compositions appelées de *fritte*, sont moins sujettes à avoir du *point*, que celles qui ne se frittent point. On est obligé dans celles-ci de suppléer à cette opération, en y ajoutant des substances qui, en faisant bouillir le verre, dégagent cet air, & par conséquent rendent le verre plus fin, & privé de ces points qui gâtent le plus beau verre.

D'après ce que nous avons dit sur l'objet de la fritte, le salin de bois ne doit point être soumis à cette première fusion; & par conséquent, on ne doit point faire fritter les compositions de *flint-glass*, lorsque l'on préfère ce fondant: cette opération seroit d'ailleurs très-nuisible si on y exposoit les chaux de plomb qu'elle altéreroit.

ARTICLE CINQUIÈME.

Du four convenable, & de la conduite du feu dans ce four, pour y faire le flint-glass.

J'ai avancé pour principe, que le cristal, dans la composition duquel on avoit employé plus de sable & moins de fondant,

étoit le plus beau; mais qu'il falloit pour lors obtenir la vitrification, principalement de la violence du feu. D'après ceci (égalité dans la qualité des matières), on aura un plus beau verre, quand on devra la vitrification à un four qui chauffe beaucoup. De la forme du four dépend donc la qualité du verre & le profit du Verrier; car il y a des fours qui consumant du bois sans chauffer assez, font tomber le travail en pure perte pour l'Entrepreneur.

J'ai travaillé d'abord avec un four à la françoise, & je suis revenu aux fours allemands, comme plus propres à donner la chaleur qui convient, & la plus vive eu égard à la consommation de bois.

Le four à la françoise a une division où l'on met le bois qui s'y brûle, & dont la flamme & la chaleur, en passant à l'étage supérieur par une ouverture faite à la voûte, échauffe cette division du four où se trouvent les pots. Il y a une cave voûtée sous ce four, qui sert à recevoir les braises qui en tombent. Dans le four allemand, au contraire, il n'y a qu'une chambre, qui est divisée par deux bancs plus élevés, sur lesquels sont rangés les pots; le bois se met entre ces siéges ou bancs; la chaleur se porte immédiatement sur les pots & les échauffe vivement, elle gagne aussi la voûte de ce four, & enveloppant la calotte de ce four, elle en remplit plus aisément la capacité; des ventouses, appelées *soufflets*, aident le bois à bien brûler *(n)*; enfin, l'épreuve que j'ai faite de l'un & de l'autre, m'ont fait rejeter les fours à la françoise, pour m'attacher uniquement & faire seulement usage du four allemand.

J'avoue que si la construction du four allemand est faite pour produire une chaleur plus vive avec la même quantité de bois, avec cette forme de four il seroit moins aisé de

(n) On conçoit que si j'avois ici à décrire l'art de la Verrerie, j'entrerois dans les détails nécessaires sur chaque partie du four allemand qui par la justesse dans ses proportions, produit un bon four; le four est la partie la plus essentielle d'une Verrerie, & d'où dépend le gain du Verrier & la beauté des ouvrages qui sortent de sa fabrique.

préserver les pots du phlogistique que contient la flamme, des étincelles & d'une fumée encore plus nuisible à la perfection principalement de certains cristaux.

Ceux qui font de vrais cristaux, auxquels on veut donner une pesanteur qui les rend plus chers & plus estimés, n'obtiennent, comme je l'ai dit, de poids qu'à l'aide d'une chaux de plomb. C'est dans le *flint-glass*, une qualité nécessaire pour former un verre de Lunette achromatique; & il le doit à la moitié de sa composition qui est en plomb. Personne n'ignore combien les chaux de plomb sont avides du phlogistique pour se revivifier, & qu'en se revivifiant elles noircissent au moindre approche du phlogistique; le blanc de plomb se revivifie seulement à froid & par l'approche d'un corps gras. Or dans les fours allemands les chaux de plomb seroient plus susceptibles de cette approche du phlogistique, si l'on n'avoit pas des moyens de s'en garantir.

Le moyen qu'il convient mieux de prendre pour fondre la composition du *flint-glass*, est de mettre les matières dans un pot couvert. Le dessus de ces pots porte un col ouvert & recourbé qui vient se rendre à l'ouvreau, où il se lute avec l'ouvreau; de cette façon la matière du pot n'a aucune communication avec la flamme du four. Cette précaution est nécessaire dans le commencement de la fonte du plomb qui ne demande qu'à se revivifier: elle est utile dans la suite de l'opération pour empêcher les flammèches de tomber dans le pot; elles noirciroient, jauniroient ou terniroient le cristal; mais l'on ne doit pas craindre, dans ce dernier temps, que la chaux de plomb vitrifiée reprenne sa forme métallique.

On force le feu du four, & on le continue long-temps. Pour n'omettre aucuns des soins d'où peuvent dépendre les qualités dans cette espèce de cristal, j'ai prêté une attention scrupuleuse à tout ce qui pourroit lui nuire. Comme les outils de fer se décomposent à l'eau, qu'il s'en détache des lames par la vive chaleur, je conseille plutôt de ne point remuer la matière, que d'employer les *pilons* pour mêler la matière du verre lorsqu'elle est en fusion. C'est cependant un

moyen néceſſaire, ſur-tout quand on emploie la manganèſe, le ſaffre, &c. pour changer la couleur du criſtal.

Je ſuis perſuadé que ſi l'on remuoit avec un bâton, le bois qui ſe conſumeroit, en remuant la matière fondue, gâteroit encore plus la matière du pot, par le phlogiſtique qu'il communiqueroit à ce criſtal. J'avoue que j'ai mieux aimé ne point remuer la matière plutôt que d'employer les pilons de fer, ayant vu par les *cannes* que le verre qui touche à cet outil avec lequel on le travaille, y dépoſe une partie d'elles-mêmes & le noircît. Mais quand la couleur étoit mal mêlée, quand elle étoit miſe en trop grande quantité, ne trouvant pas de moyens pour ſuppléer à ces pilons de fer, je n'ai pas pu m'en paſſer. Quand je l'ai pu, je n'ai point remué la matière; & voici les moyens auxquels j'ai eu recours pour perfectionner cette eſpèce de criſtal.

Le verre, dans le commencement de la vitrification, bouillonne beaucoup; je le laiſſe pendant pluſieurs heures expoſé à un feu violent, tel que j'ai annoncé qu'il devoit être dans un four qui chauffe bien. Je chauffe ce four avec du bois refendu coupé en *billettes* & bien ſec, car c'eſt encore une choſe eſſentielle.

Pour rendre ce verre fin, l'affiner ou lui faire perdre les petites bulles ou points, je *tire la matière à l'eau.* Pour tirer ce verre du pot, j'aurois voulu me paſſer auſſi d'inſtrumens de fer; mais j'ai éprouvé encore une impoſſibilité. D'ailleurs, comme le verre reſte peu dans la cuiller ou poche dont on ſe ſert pour le tirer du pot, qu'on la mouille de temps à autre, qu'on retire le verre en plus grande maſſe qu'il eſt poſſible, je ne crois pas que le fer puiſſe s'y décompoſer. Je tire donc le verre de ce pot en puiſant la matière avec une poche ou cuiller; je le jette dans une auge remplie d'eau, & je fais piler cette matière dans une auge de bois, où ce verre ayant eſſuyé cette décompoſition par l'eau, il ſe ſépare & ſe pile facilement. J'ajoute à ce verre pulvériſé une petite quantité de manganèſe chaque fois que je le remets fondre, & un peu de ſalpètre de la ſeconde cuite.

Ce verre eſt placé dans le même pot où je l'avois mis auparavant, & je le laiſſe s'affiner de nouveau. J'ai réitéré cette opération juſqu'à huit fois, pour avoir une matière parfaitement pure.

J'ai peſé pluſieurs fois un pot dont j'ai pris la *tarre* & le poids de la matière dont je l'ai rempli, & je n'ai eu en verre parfait que la quantité de matière vitrifiable que j'avois employée, les fondans s'étant évaporés. Il n'en eſt pas de même dans la compoſition du *flint-glaſſ* ou du verre de Lunette achromatique; le ſable & la chaux de plomb entrent eſſentiellement dans la compoſition du verre, & on a ſeulement en moins les fondans que l'on a employés, qui ne ſe retrouvent plus quand la vitrification eſt complète. Je m'en ſuis encore aſſuré par des expériences réitérées.

ARTICLE SIXIÈME.

Travail du flint-glaſſ.

J'ai avancé que les *points* & les *bulles,* c'eſt-à-dire de plus gros points, des veſſies moins ſerrées que les points, proviennent d'une cauſe différente. Nous venons de parler de l'origine des points; il nous reſte à expliquer comment ſe forment les bulles. Si dans un même pot, deux ouvriers travaillant la même matière, l'un forme des bulles dans un ouvrage, & l'autre fait une même eſpèce de verre ſans qu'il s'y trouve de bulles, j'aurai, je crois, prouvé que les bulles dépendent uniquement de la main de l'ouvrier, & qu'elles proviennent de la manière dont on cueille le verre.

Si l'ouvrier, en levant ſon verre avec ſa canne, ſe ſort de la ſuperficie du pot, qu'il faſſe entrer de l'air entre les lames de verre qu'il applique ſur ſa canne, cet air reſtera enveloppé dans le verre & y formera des bulles. Ceci n'arrive que trop ſouvent à nos ouvriers peu adroits, & nous les reprenons inutilement ſur le peu d'adreſſe & le peu de légèreté qu'ils mettent en cueillant le verre. Le *flint-glaſſ,* quoique ſoufflé, n'a point de bulles, parce que l'on prend beaucoup

d'attention en le travaillant; mais l'on peut dire généralement que les verres soufflés sont plus sujets à avoir des bulles que les verres coulés. Ceci n'aide-t-il pas à confirmer ce que j'avance, que les bulles sont formées par un mauvais cueillage. N'est-ce pas au moins un acheminement à se ranger de mon sentiment? Je convaincrois complètement, si devant mes Juges, & par un mauvais *cueillage*, je formois à dessein des bulles dans une matière.

Les verres *flint-glass* Anglois sont soufflés, c'est-à-dire, que l'on puise plusieurs fois de la matière du verre avec la *canne* ou *felle;* on la tourne légèrement, & le verre s'enveloppe sur la canne.

J'ai dit que j'avois remarqué aux *flint-glass*, que les tables qui les traversent, & qui nuisent à la perfection de ces verres, étoient toujours parallèles aux deux surfaces du plat de verre. Cet examen m'a fait croire que ce défaut essentiel & très-commun dans ces verres, ne provenoit que de la façon dont on le travailloit.

La matière, au sortir du pot, éprouve en se refroidissant lorsqu'on la souffle, des changemens qui lui deviennent préjudiciables, sur-tout lorsque ce verre, comme dans le *flint-glass*, est composé de verre de sable & de verre de plomb de densités différentes; il est impossible que la table de verre qui s'est ainsi refroidie, ne se ressente pas de ces différens momens où la matière se durcit, & prend de la consistance. Cette matière qui est roulée sur le *marbre* pour en faire la *paraison*, reçoit les impressions de l'air, dont le degré de chaleur est bien différent de celui qu'elle avoit dans le four, ou dans le pot. La partie la plus extérieure se fige; elle n'est pas assez durcie pour ne pas se joindre avec la matière qui, étant marbrée ou soufflée en s'alongeant, change de place; & il restera toujours des fils qui indiquent cette différente position, & qui nuiront à la perfection des verres. Je crois la méthode que je vais proposer, exempte de ces défauts.

Quand on retire un vieux pot du four, on trouve souvent dans ces pots du verre en grosse masse, qui est sans fils, sans

table. Ceci m'indiqueroit que les verres Anglois ne ſont défectueux uniquement que par les moyens ſucceſſifs employés en les travaillant; que le refroidiſſement ſubit, mais uniforme dans toutes ſes parties, n'étoit pas la cauſe de cette imperfection.

J'ai fait faire des moules avec de la terre à pot, préparée comme celle avec laquelle on fait les pots, & qui avoient à peu-près la hauteur que je voulois donner à la table de verre que je devois y mouler *(o)*. J'ai mis ce moule dans le four, expoſé à la même chaleur que le verre que je voulois y couler, & j'ai coulé la matière lorſque je l'ai vu bien affinée. Je me refuſois de m'en aſſurer par des eſſais, afin d'y mettre le moins de *ferment* qu'il m'étoit poſſible. Enfin la comptant bien nette, & jugeant de ſa qualité par l'inſpection de la dernière matière que j'avois tirée à l'eau, je prenois, avec une poche, de la matière de verre; je la renverſois dans chacun de mes moules que l'on tenoit dans le four, près du pot qui contenoit la matière fondue. De cette manière la fonte eſſuyoit peu ou point de changement, en paſſant du *pot au travail* dans le moule. La matière s'y couloit, & n'avoit ni fils, ni table, ni points. Je la retirois du four en la faiſant paſſer dans l'arche aux *féraces*, & ne la faiſant ſortir que par des degrés preſque inſenſibles, & proportionnés au chemin que je faiſois faire aux moules, & au degré de chaleur que l'on entretenoit dans le four pour la fonte d'autres nouvelles matières.

J'avoue cependant que ce moyen n'eſt pas ſans inconvéniens, parce que ſouvent le verre qui eſt adhérent au moule, ſe caſſe en s'y refroidiſſant. J'y remédiois en trempant le moule dans l'eau au ſortir du four, & l'engageois ainſi à ſe *calciner* ou à ſe fendre en perdant ſa chaleur.

Un autre moyen plus ſimple encore, conſiſte à prendre, lorſque le four a perdu autant de ſa chaleur qu'il eſt poſſible,

---

(o) Ce moule doit avoir une forme convenable, & être fait avec précautions, afin que la matière de ce moule, en ſe refroidiſſant, n'éprouvant pas les mêmes changemens dans ſa forme que le verre qui s'y refroidit auſſi, ne caſſe point le verre qu'il contient.

de la matière avec une épaiſſe cuiller de cuivre que l'on a mouillée auparavant, & à verſer d'un ſeul jet la matière, en renverſant la cuiller ſur une plaque de cuivre, ou dans un moule de cuivre graiſſé. On ôte ce verre du moule, & on le met dans une *quilave*, ou eſpèce d'étui à manchon de tôle épaiſſe, poſé dans l'arche à recuire les ouvrages; on l'en tire par degrés preſque inſenſibles *(p)*. J'ai obtenu ainſi un verre ou criſtal *flint*, plus parfait, & je me flatte qu'il répond à la demande de l'Académie. Je ſoumets à ſon jugement de ce verre brut, de dégroſſi, & d'autres taillés en objectifs par un Lunetier.

Je crois entendre quelques-uns de mes Lecteurs, dire qu'ils ont imaginé un moyen plus aiſé, plus certain, qui conſiſte à allumer & à éteindre à chaque fonte un four deſtiné à faire ſeulement des verres de Lunettes achromatiques.

Je réponds que ce moyen, qui eſt praticable, ne tend pas à la perfection de la matière, mais la rend plus chère, ce qui me laiſſe l'avantage de pouvoir en offrir au choix du Public une plus grande quantité, & à plus bas prix.

L'on n'imaginera pas, je crois, qu'étant à la tête d'une Verrerie, l'intérêt m'ait conduit. Si mon cœur eût été capable de ces vues baſſes, ce vil intérêt eût briſé ma plume, & l'eût arrêtée pour qu'elle me refuſât ſon ſecours dans ce moment.

Je ſuppoſe qu'un Particulier ait conſtruit un four pour y faire ſeulement du *flint-glaſſ*; peut-il eſpérer de ce feu éphèmère ce que nous devons attendre d'un feu vif, allumé depuis quinze ou dix-huit mois *(q)*!

(p) On ne court aucun riſque de laiſſer la matière prendre un commencement de fuſion dans ce four à recuite, où elle ne reçoit point de fumée, & où les parties les plus peſantes étant fondues, prennent un arrangement, qui, ſans doute, tourne à l'avantage du *flint-glaſſ*.

(q) Lorſque nous faiſons conſtruire un four dans un lieu où il n'y en a point eu, il faut au moins deux mois de feu avant d'en tirer tout l'avantage que nous devons en attendre; & nous réglons nos compoſitions ſuivant le peu de chaleur que donne ce four, qui conſume pour lors beaucoup de bois en pure perte. Il en eſt de même lorſque le four eſt ſur ſa fin; nous ſommes obligés pour lors de forcer la doſe des fondans; & le verre n'en eſt pas ſi beau.

Mais,

Mais, ou il a travaillé en aveugle, ou il s'est dirigé d'après de vraies connoissances dans l'art de la Verrerie. Si un hasard heureux l'a favorisé, l'Académie mettra le comble à son bonheur en le couronnant. S'il est dans ma deuxième hypothèse, il saura mieux que moi combien l'art de la Verrerie offre de connoissances nouvelles à acquérir. Nous voyons depuis peu l'espace immense qu'il laisse à nos découvertes. Le plus clair-voyant y travaille souvent en aveugle; une circonstance inconnue peut nous faire manquer une composition. Nous travaillons une matière coûteuse; & la seule économie forme notre gain.

Je suppose que dans nos Verreries l'une de ces circonstances fasse manquer la fonte du *flint-glass*, nous jetons les morceaux dans un pot, & nous la recommençons, ou nous formons avec cette matière des cristaux qui entreront dans notre commerce: nos soins, nos peines, notre temps ne sont plus comptés pour rien. Ces considérations me font pronostiquer que cette fabrique ne sortira pas des Verreries; & je m'appuye sur ce que rapportent les Voyageurs qui assurent que les Anglois, dans le choix du bon *flint-glass*, laissent beaucoup de rebut, qui n'est pas en pure perte pour le Verrier qui en forme des cristaux; ma méthode est donc plus générale & la seule que puissent adopter nos Verriers.

On sait que les glaces de Venise sont plus estimées que nos glaces coulées: ces premières sont toutes soufflées en *manchon* & *ouvertes*. Personne n'ignore encore que la même matière travaillée en *plats* est plus belle que soufflée en *manchons*. Les plats acquièrent de la beauté en se recuisant & se refroidissant, tandis que les verres à *manchons* que l'on coupe au four, pour, en les ouvrant, faire des vitres, perdent de leur brillant en les étendant & en se refroidissant. J'ai travaillé le *flint-glass* de ces deux manières; 1.° de souffler en *manchons* les *flint-glass*, & de les couper comme font les Anglois; 2.° de les ouvrir en plats.

Le verre des Lunettes achromatiques doit être tendre & coulant au sortir du pot; pour en former un *manchon* ou

un *plat*, il faut cueillir plusieurs fois en laissant refroidir la première *paraison*. On compte aisément sur de pareils morceaux les différentes levées ; ce qui forme des tables dans ce verre. Ceci confirme de la manière la plus sensible, ce que j'ai avancé sur l'origine des tables ou fils qui se remarquent très-souvent en travaillant le *flint-glass* Anglois, de sorte que je ne crois pas ces deux moyens les plus propres à produire le meilleur *flint-glass*.

L'Auteur joint à son Mémoire:

N.os 1. Un verre de salin coloré avec le cobolt, & pesant.
2. Un verre de salin dégrossi.
2.* Un verre de salin poli.
3. Un verre de salin plus blanc.
3.* Ce verre arrondi & dégrossi.
4. Un verre de salin en plat.
5. Un autre travaillé avec les fers, & coupé près de la canne.
6. Des verres coupés comme pour des verres de montre.
7. Verre de salin avec sa couleur naturelle.
7.* Ce verre taillé en objectif.
8. Verre de salpêtre pesant, pour faire voir les couches produites par trois cueillages.
9. Un verre à plat à deux cueillages.
10. Verre de cristal de roche, salpêtre de la seconde cuite, & *minium*.
11. Verre de cristal de roche, un peu neigeux, parce qu'il est trop chargé de fondans, & qu'il a été tiré du four où il y avoit pour lors une trop vive chaleur.
12. Un verre de salin rafiné.
12.* Le même verre poli.
13. Un verre de vitre avec soude de varech, & des plus communs, seulement pour juger de son poids, & en faire l'essai comme *crown-glass*.

Les numéros 4, 5, 6, pour juger si ces manières de travailler les verres pourroient être admises pour le *flint-glass*.

Les numéros 8, 9, montrent les différens cueillages, & appuient le sentiment de l'Auteur sur les fils ou tables du *flint-glass* Anglois.

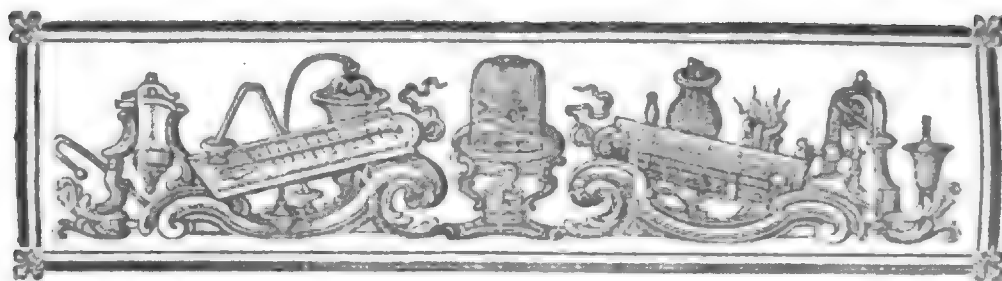
P. S. Je vous ai dépeint, Meſſieurs, l'art de la Verrerie, étant encore dans ſon berceau; je crois même vous l'avoir prouvé, en avouant dans le cours de cet ouvrage combien nous avons de lumières utiles à deſirer; utiles, je devrois dire néceſſaires, pour perfectionner cet Art, & étendre les barrières de nos connoiſſances, même en Phyſique. Il ſeroit de votre gloire d'aider de vos lumières, des Artiſtes qui ſe feroient honneur de travailler de concert avec vous à exécuter ce vaſte projet.

Je crois vous avoir fait voir que la peſanteur d'un verre dépend de la ſubſtance vitrifiable que l'on emploie, chaque ſubſtance offre un poids ſpécifique différent; par conſéquent, un verre d'une peſanteur différente. Combien d'étendue auroit cet article bien traité, par la quantité de terre vitrifiable & de chaux métallique à examiner! Il faudroit mieux connoître l'effet des fondans ſur le verre; étudier la conſtruction & la forme du four le plus propre à donner une vive chaleur, qui s'accorderoit avec nos ouvrages, & la façon de les travailler.

Enfin dans ce travail, la Chimie la plus parfaite s'exerceroit avec avantage, mais la Phyſique y trouveroit peut-être des faits qui ſerviroient d'explications au ſyſtème de la lumière, & des corps propres à la réfléchir. Le plomb eſt gris; perdant de ſon phlogiſtique, il devient jaune, rouge; le verre en eſt jaune: cette chaux, formée par un acide, devient blanche; elle fait un verre jaune un peu vert, & cependant avec des cendres l'on fait un verre vert, avec du charbon, un verre brun: d'un verre fin je peux en faire une eſpèce d'émail ou de porcelaine, ſans aucune addition de ſubſtance métallique, & ſeulement en l'étouffant, & lui donnant du phlogiſtique. Certaine quantité de manganèſe blanchit le verre, une plus grande le rougit & le noircit; comment cela s'opère-t-il, &c. &c. &c.? Que de queſtions, qui, étudiées, pourroient être éclaircies, & ſervir à notre inſtruction!

FIN des Prix.

MÉMOIRES



MÉMOIRES DE MATHÉMATIQUE ET DE PHYSIQUE,

Présentés à l'Académie Royale des Sciences par divers Savans, & lûs dans ses Assemblées.

EXPÉRIENCES PHYSICO-CHIMIQUES

Sur l'Air qui se dégage des Corps dans le temps de leur décomposition, & qu'on connoît sous le nom vulgaire d'Air fixé.

Par M. BUCQUET.

IL y a long-temps que les Physiciens ont regardé l'air comme une substance simple & élémentaire; mais les anciens Chimistes, & même plusieurs de ceux du moyen âge, ne l'ont point admis au nombre des élémens. Accoutumés à ne regarder comme principes que les produits grossiers qu'ils retiroient de l'analyse

des corps, l'air, par sa ténuité, leur avoit échappé. Il n'est compté ni dans les Principes de Paracelse, ni dans ceux de Becher & de Stahl; Vanhelmont cependant avoit observé que le tartre crud, distillé dans des vaisseaux exactement fermés, occasionne leur rupture, quelque grands qu'ils soient. Le même Chimiste a connu la vapeur incoërcible qui s'élève des liqueurs en fermentation, & il l'a désignée sous le nom de *gas sylvestre;* mais il n'a déterminé ni la nature de ces vapeurs, ni la cause qui produit la fracture des vaisseaux dans lesquels on distille le tartre. Boyle est le premier Chimiste qui ait véritablement fait attention à l'air qu'on retire en analysant les corps: Newton en parle aussi en plusieurs endroits de son Optique; mais ni l'un ni l'autre ne l'ont regardé comme différent de l'air atmosphérique. Il en est de même de Boërhaave; ce Savant donne, dans son Traité de l'air, différens moyens de produire cette substance, en unissant des acides aux sels alkalis, à la craie, aux métaux, aux huiles; il indique également la possibilité d'en extraire par la combustion, la distillation, la fermentation; & quoiqu'il ait bien su distinguer le nouvel air produit par la décomposition des corps, de celui qui se trouve renfermé dans leurs pores & qu'on en retire par le seul secours de la machine pneumatique, il ne lui a pas attribué de propriétés particulières, encore qu'il ait eu connoissance des expériences de Hales, ainsi qu'il le dit lui-même. C'est donc à ce dernier qu'on doit attribuer véritablement la découverte de l'air fixé; il a calculé avec une très-grande exactitude, dans ses excellens Traités de la Statique des végétaux & de l'Hémastatique, la quantité d'air qu'on retire par la distillation des matières minérales, végétales & animales: il a très-judicieusement fait remarquer à l'égard de ces dernières, que l'air qui entre dans leur composition n'en sort pas au commencement de l'analyse, mais seulement lorsque l'opération est fort avancée & que la décomposition est au plus haut point. Il a mesuré avec la même exactitude la quantité d'air qui se produit dans les dissolutions métalliques & pendant le temps que plusieurs matières végétales & animales

subissent la fermentation. Le même Auteur a observé que plusieurs matières analysées, ou plusieurs mélanges, donnoient d'abord de l'air & qu'ils en absorboient ensuite, parce que presque toutes les décompositions donnant lieu à de nouvelles combinaisons, une partie de l'air qui s'est dégagé d'abord, rentre dans la composition de ces nouveaux êtres. Quelques mélanges, suivant l'observation de Hales, commencent par absorber de l'air & en donnent ensuite, mais souvent moins qu'ils n'en ont absorbé. Tous ces phénomènes dépendent d'une même cause; premièrement tous les corps qui contiennent peu d'air dans leur combinaison, en fournissent peu dans leur décomposition; en second lieu, si ces corps se réduisent facilement en vapeurs, ils se mêlent dans cet état à l'air, lui font perdre son ressort & le réduisent à n'occuper qu'un espace beaucoup plus petit que celui qu'il occupoit auparavant, en sorte que ce fluide semble détruit en grande partie : au moins il me semble que c'est de cette manière qu'on doit entendre ce que dit Hales de la vertu d'absorber l'air, qu'il attribue à certains corps susceptibles de se réduire facilement en vapeurs, soit pendant qu'on les distille, comme les acides minéraux & les esprits alkalis volatils, soit dans le temps qu'on les unit à d'autres corps, comme l'acide nitreux qu'on unit au fer. Pendant la première action de cet acide sur le métal, une grande quantité d'air est absorbée, parce que l'acide nitreux chargé du phlogistique du fer se dissipe d'abord en vapeurs rouges qui font perdre à l'air son ressort; mais bientôt après, une portion de l'acide agissant sur la terre métallique, produit de l'air en la dissolvant. Depuis Hales, plusieurs habiles Chimistes & Physiciens ont écrit sur l'air fixé: le docteur Black, dans un excellent Mémoire sur la Magnésie & sur la Chaux, imprimé en 1756 dans le deuxième volume des Actes d'Édimbourg, a fait connoître un grand nombre de propriétés de l'air fixé, différentes même de celles qu'avoit remarquées Hales, & relatives, pour la plupart, à la manière dont ce principe se combine aux terres calcaires & aux sels alkalis. Il détermine avec beaucoup

d'exactitude son juste rapport avec chacun de ces différens corps, & explique un grand nombre de phénomènes relatifs à la causticité que peuvent acquérir les terres calcaires & les sels alkalis, phénomènes qui jusqu'alors avoient fort embarrassé les Chimistes. M. Macbride dans ses Dissertations sur l'air fixé, sur les mélanges des substances alimentaires, sur la vertu dissolvante de la chaux vive, &c. a publié d'importantes découvertes sur l'air fixé. Ce Physicien, à l'exemple de Hales, a mesuré la quantité d'air qui se dégage pendant la fermentation de différentes substances végétales & animales; il a observé également que cet air suffoque tous les animaux qui le respirent, qu'il détruit la putridité, & qu'un des meilleurs moyens d'empêcher cette altération de se produire, c'est de retarder le développement de l'air fixé, qui tend à se dégager des corps fermentescibles. M. Jacquin, célèbre Professeur de Chimie à Vienne, dans une Dissertation qui a pour objet d'établir l'opinion du Docteur Black sur la chaux vive, & de discuter celle de Meyer sur l'*acidum pingue*, a répété un grand nombre des expériences de Black, & en a ajouté beaucoup d'autres nouvelles & fort curieuses, pour prouver que la chaux vive ne doit son état qu'à la perte de l'air fixé qui se trouvoit contenu dans la pierre calcaire. Cet Auteur ajoute avec le docteur Black, que la seule restitution de ce principe suffit pour réduire la chaux vive à l'état de pierre calcaire. Quoique ces assertions ne me paroissent pas suffisamment démontrées, ainsi que je me propose de le faire voir par la suite, il n'en est pas moins vrai que cet Ouvrage de M. Jacquin renferme des faits très-nouveaux & très-importans, & qu'il est un des meilleurs de ceux qu'on a publiés sur l'air fixé. M. Venel, Docteur en Médecine & Professeur de Chimie à Montpellier, a attribué à l'air le goût des eaux minérales, acidules & spiritueuses: cet habile Chimiste est parvenu à les imiter parfaitement en introduisant dans de l'eau pure une petite portion d'un acide & d'un sel alkali, qui en se combinant dans l'eau, la chargent de l'air qui se produit au moment de leur union. M. Priestley est parvenu aux mêmes fins, en

introduisant également dans l'eau de l'air fixé, mais sans qu'elle retînt aucune matière saline; ce qui n'a point lieu dans le procédé de M. Venel.

Tels sont les principaux travaux qui avoient été donnés jusqu'ici sur l'air fixé. M. Priestley vient de publier un Ouvrage qui renferme plusieurs faits très-nouveaux. M. Rouelle a inséré dans l'Avant-coureur, quelques expériences fort singulières ; & M. Lavoisier vient de faire part à l'Académie & au Public, de plusieurs phénomènes très-curieux & très-intéressans. Il y a quelque chose de commun entre mon travail & ceux de M.rs Priestley & Rouelle ; mais je n'ai point examiné les substances sur lesquelles M. Lavoisier a travaillé. Quelque utiles & quelque bien entendues que soient les expériences qu'on a faites sur l'air fixé, il m'a semblé qu'il restoit encore beaucoup de connoissances à acquérir sur ce principe, pour savoir en quoi il diffère précisément de l'air atmosphérique, s'il est contenu dans tous les corps, s'il est absolument le même de quelque substance qu'on le retire, & quelque moyen qu'on emploie pour l'extraire. Ces recherches m'ont paru mériter d'autant plus d'attention, que l'air fixé est aussi intéressant en Chimie par ses singulières propriétés, & par le rôle qu'il joue dans les différentes combinaisons & opérations, qu'il peut devenir précieux aux Médecins, par la facilité qu'il a de se combiner aux substances animales putrides, & de détruire en elles ce caractère. Quoique ce dernier objet ne soit pas exactement du ressort de l'Académie, elle prend trop d'intérêt à tout ce qui peut concerner le progrès des Sciences & la conservation des hommes, pour ne pas voir avec plaisir que les travaux des Chimistes puissent jeter du jour sur l'art de guérir ; elle paroît même avoir eu décidément cette intention, en faisant faire l'analyse d'un grand nombre de plantes, analyse qui n'eut pas alors le succès qu'on en attendoit, la Chimie n'ayant point encore fait les progrès qu'elle a faits depuis que les Chimistes ont essayé d'examiner les plantes par l'analyse menstruelle, & en séparant d'abord leurs principes, pour

les examiner enſuite ſéparément par une analyſe ſecondaire. Parmi les Auteurs qui ont examiné l'air fixé, pluſieurs l'ont enviſagé comme un remède excellent; mais enyvrés de leur découverte, ils ont voulu s'en ſervir pour expliquer tous les phénomènes, tant de la ſanté, que de la maladie; & peut-être eſt-il à craindre qu'un pareil enthouſiaſme, peu propre à mériter la confiance, ne ſuffiſe pour décréditer un ſecours qui pourra devenir précieux quand il ſera employé à propos.

Ces réflexions importantes avoient frappé depuis long-temps M. le Duc de la Rochefoucauld, dont le goût pour les Sciences & le zèle pour leur avancement, ſont connus de l'Académie. Il me fit l'honneur de me communiquer ſes idées; & après lui avoir fait part des miennes, je répétai dans ſon laboratoire & ſous ſes yeux, les expériences dont je vais avoir l'honneur de rendre compte.

Mon intention en les faiſant, a été de déterminer, ſi l'air fixé eſt différent de l'air atmoſphérique, & en quoi conſiſte cette différence, s'il eſt le même, de quelque corps qu'on le retire, & de quelque moyen qu'on ſe ſerve pour l'extraire. Elles n'auront pas toutes le mérite de la nouveauté; mais ayant été répétées avec ſoin, & dans des circonſtances différentes de celles dans leſquelles les Auteurs les ont tentées, elles pourront contribuer à aſſurer leurs découvertes, à faciliter l'intelligence de pluſieurs de leurs opérations, & à compléter l'hiſtoire d'un corps qui, de même que le phlogiſtique, produit de grands & de ſinguliers effets, & paroît être de nature à occuper long-temps les Chimiſtes avant d'être parfaitement connu.

Il y a trois moyens de décompoſer les corps; les combinaiſons ou l'analyſe menſtruelle, la diſtillation & la fermentation. J'ai extrait l'air fixé de différentes ſubſtances en les ſoumettant à ces trois genres d'analyſes. Je commence par les combinaiſons, parce qu'elles paroiſſent fournir un air plus pur & plus dégagé de ſubſtances étrangères. M.rs Hales, Black, Macbride, Jacquin, Venel, Prieſtley, qui ont examiné l'air qui ſe dégage pendant les efferveſcences &

les diſſolutions, n'ont point été à même de le conſidérer dans ſon état de pureté, parce que les vaiſſeaux dont ils ſe ſervoient contenant de l'air atmoſphérique, ces deux airs ſe trouvoient mélangés. J'ai donc cru devoir faire quelques changemens à l'appareil dont ſe ſervoit M. Macbride, en conſervant néanmoins les deux bouteilles & le tube de communication. Les bouteilles dont je me ſuis ſervi ſont coupées en deux parties, & les deux parties s'ajuſtent l'une ſur l'autre par des vis de cuivre qui ferment bien, & dont on lutte encore les bords avec de la cire molle. A l'aide de ces vis, on peut ouvrir commodément les vaiſſeaux, les nettoyer, y placer les corps qu'on veut mettre en expérience. Chaque bouteille eſt terminée par une virole de cuivre, dans laquelle on maſtique un tube de verre courbé, qui ſert à établir la communication. Une des bouteilles ſert pour faire les mélanges, je l'appellerai dorénavant *bouteille des mélanges;* l'autre ſert pour recevoir l'air fixé & les corps qu'on veut ſoumettre à ſon action, je l'appellerai *bouteille de réception.* La bouteille des mélanges eſt percée dans ſa partie ſupérieure, d'un trou ſur lequel on a maſtiqué un robinet de cuivre fermant exactement. Ce robinet eſt diſpoſé de manière que ſa partie ſupérieure reçoit un entonnoir de verre, dont la tige eſt terminée par un pas de vis. La bouteille de réception eſt percée dans ſon fond, d'un trou auquel on a maſtiqué un robinet de cuivre fermant exactement, & diſpoſé de manière à être commodément viſſé ſur une machine pneumatique. Mon appareil étant conſtruit de la ſorte, je puis opérer dans le vide, & obtenir par conſéquent l'air fixé auſſi pur qu'il ſoit poſſible de ſe le procurer: voici ce que j'ai obſervé.

Ayant placé la bouteille de réception ſur une machine pneumatique, j'y enfermai un petit baromètre d'épreuve: j'introduiſis dans la bouteille des mélanges deux onces deux gros d'acide vitriolique, dont le poids étoit à celui de l'eau, comme 51 à 39; je le coupai avec partie égale d'eau diſtillée: je fermai cette bouteille & ſon robinet garni de l'entonnoir; & après l'avoir placée ſur un petit guéridon, à la hauteur

de la machine pneumatique, je maſtiquai le tube de communication, & je fis le vide aſſez parfaitement pour faire baiſſer le mercure de mon baromètre juſqu'au ſixième degré, ce qui exigea vingt-ſix coups de piſton. Le vide ſe ſoutenant toujours dans le même état, je verſai dans l'entonnoir une leſſive alkaline préparée avec deux onces deux gros de ſel alkali fixe de tartre bien pur & bien ſec, & neuf onces d'eau diſtillée; j'ouvris alors le robinet de la bouteille des mélanges, & je fis tomber peu-à-peu ma leſſive alkaline ſur l'acide vitriolique; il ſe fit une efferveſcence des plus vives, & il ſe dégagea de l'air qui faiſoit remonter le mercure du baromètre d'autant plus rapidement, que je verſois à la fois une plus grande quantité de leſſive alkaline ſur l'acide: je continuai d'en verſer juſqu'à ce que mes vaiſſeaux fuſſent remplis d'air, ce que je reconnus lorſque je vis que ma leſſive alkaline au lieu de tomber dans la bouteille, ſe ſoutenoit dans l'entonnoir, quoique le robinet fût ouvert. Ce phénomène ſe préſente toutes les fois que l'air fixé dont l'intérieur des vaiſſeaux eſt rempli, ſe trouve en équilibre avec l'atmoſphère; mais ſi l'efferveſcence dure encore, & qu'il ſe produiſe une nouvelle quantité d'air fixé, il ſort par l'entonnoir & traverſe la liqueur alkaline en formant un jet de bulles plus ou moins conſidérable. Si on ferme les bouteilles lorſqu'elles ſont pleines d'air, & qu'il s'en produit encore, l'excès ſe fait jour à travers les luts lorſqu'ils ne ſont pas fort épais; mais ſi la ſurabondance n'eſt que petite ou que les luts ſoient capables de réſiſter, cet air reſte condenſé dans les vaiſſeaux. Après avoir fait mon expérience, telle que je viens de l'indiquer, je laiſſai mon appareil fermé pendant douze heures; au bout de ce temps, j'ouvris l'entonnoir & je laiſſai tomber dans la bouteille des mélanges, le reſte de ma leſſive alkaline, qui ne trouva aucune réſiſtance à ſa deſcente; ce qui prouve que l'air fixé qui rempliſſoit l'intérieur des bouteilles s'étoit condenſé, ou qu'une portion avoit été abſorbée; Hales avoit obſervé la même choſe dans pluſieurs circonſtances. Après que la leſſive alkaline fut tombée, je ne m'aperçus pas qu'il rentrât de l'air, au moins je n'entendis pas

pas de sifflement; ce qui cependant m'est arrivé toutes les fois qu'il se trouvoit un peu de vide dans mes bouteilles.

L'air fixé que j'avois produit par ce moyen, avoit une odeur très-vive qui affectoit désagréablement les yeux & excitoit violemment la toux. Cette odeur m'a paru parfaitement semblable à celle qui s'élève des matières qui subissent la fermentation spiritueuse, aussi je la désignerai dorénavant sous le nom d'*odeur gazeuse;* elle se fait sentir également dans les deux bouteilles & subsiste assez long-temps, même lorsqu'on tient l'air fixé dans des vaisseaux négligemment bouchés, mais lorsqu'on laisse les vaisseaux fort ouverts, elle se dissipe bientôt: j'ai saturé les alkalis fixes du tartre & de la soude avec les acides nitreux & marin, & je n'ai aperçu aucune différence dans l'odeur de l'air qui s'en est dégagé.

Ayant employé de l'esprit alkali volatil tiré du sel ammoniac par l'alkali fixe, pour saturer les acides vitriolique, nitreux & marin, il se fit dans tous les cas une très-vive effervescence, & l'air fixé qui se dégagea avoit une odeur beaucoup plus pénétrante que celui qui se dégage pendant l'effervescence produite lors de l'union des mêmes acides aux sels alkalis fixes; & en ouvrant la bouteille de réception, je sentis une odeur très-fétide & semblable à celle de la viande putréfiée: l'odeur fétide se fit moins apercevoir en ouvrant la bouteille des mélanges, parce qu'il s'en élevoit une vapeur beaucoup plus pénétrante. Je n'ai aperçu aucune différence quel que soit l'acide que j'aie employé; dans toutes les effervescences, ma bouteille de réception s'est toujours considérablement obscurcie, mais beaucoup plus considérablement dans la combinaison des sels ammoniacaux, que dans toutes les autres.

J'ai versé successivement sur de la craie les acides vitriolique, nitreux & marin; il s'est fait, dans tous les cas, une effervescence très-vive, l'air fixé qui s'est dégagé avoit une odeur gazeuse qui ne m'a paru différer en rien de l'odeur qui s'élève lorsqu'on unit les acides aux sels alkalis fixes.

Desirant connoître si les matières métalliques contenoient de l'air fixé, ou si cet air étoit le même que celui qui s'étoit

dégagé dans les combinaiſons précédentes, je jetai de la limaille de zinc dans ma bouteille des mélanges; & ayant fait le vide dans les vaiſſeaux, je fis tomber ſur cette limaille un peu de l'acide vitriolique dont le poids eſt à celui de l'eau, ainſi que je l'ai déjà dit, comme 51 à 39. La diſſolution s'étant faite très-promptement, le mercure du petit baromètre d'épreuve qui étoit deſcendu juſqu'au ſixième degré, remonta avec beaucoup de rapidité; la diſſolution de la limaille de zinc étant achevée, j'ouvris la bouteille, mais je ne ſentis qu'une odeur déſagréable & qui n'étoit nullement gazeuſe. Je répétai la même expérience en me ſervant de limaille d'acier bien pur au lieu de limaille de zinc; la diſſolution étant achevée & les bouteilles ouvertes, je ne ſentis encore qu'une odeur déſagréable, mais point du tout d'odeur gazeuſe: je n'ai point eſſayé ſur d'autres matières métalliques, je n'ai point employé non plus d'autres acides, parce que les autres matières métalliques ne ſe diſſolvent pas facilement à froid dans l'acide vitriolique, & que les autres acides fourniſſent une grande quantité de vapeurs qui auroient altéré la pureté de l'air que je voulois obtenir. Je crois devoir avertir les perſonnes qui deſireroient répéter ces dernières expériences, qu'elles exigent quelques précautions: il faut verſer une petite quantité d'acide à chaque fois; car ſi on en met trop, il ſe dégage une telle quantité d'air que les vaiſſeaux ſe briſent.

Pour examiner ſi l'air fixé qui ſe dégage dans le temps d'une efferveſcence, ne contient rien des ſubſtances ſalines qu'on y a employées, j'expoſai dans la bouteille de réception une diſſolution de ſirop de violettes dans de l'eau; je la chargeai d'air fixé dégagé des différentes combinaiſons ſalines & diſſolutions métalliques dont j'ai parlé plus haut: je n'ai aperçu aucune altération dans la couleur du ſirop, quoiqu'il eût ſéjourné pendant plus de douze heures dans l'air fixé dégagé par ces différens moyens.

De l'eau pure placée dans la bouteille de réception & chargée de l'air fixé qui ſe dégage dans l'union des trois acides aux ſels alkalis fixes ou volatils, & même à la craie, a pris

une ſaveur piquante & acidule. Cette eau expoſée à l'air ne conſerve pas ſa ſaveur pendant plus de vingt-quatre heures; cette même ſaveur diminue conſidérablement lorſqu'on fait chauffer l'eau, & ſe diſſipe entièrement après l'ébullition; mais de pareille eau miſe dans une bouteille fermée d'un bon bouchon de liége, a conſervé ſa ſaveur pendant quinze jours, & peut-être l'eût-elle gardée davantage, ſi je n'avois ſouvent ouvert la bouteille pour l'examiner. L'eau plongée dans l'air fixé qui ſe dégage des diſſolutions métalliques, ne prend point de goût acidule. M. Rouelle a obſervé la même choſe à l'égard de la ſaveur des eaux acidules, mais il ajoute qu'il eſt poſſible avec du temps de combiner à l'eau un peu de l'air fixé dégagé des diſſolutions métalliques. J'ai cru m'apercevoir que l'eau ſoumiſe à l'action de cet air fixé ne faiſoit que s'imprégner de la mauvaiſe odeur qui eſt répandue dans les vaiſſeaux, & elle ne m'a paru aucunement aërée: au reſte je ne prétends pas nier l'expérience de M. Rouelle, qui peut avoir opéré autrement que moi. Comme pluſieurs habiles Phyſiciens penſent que le vin, pour devenir acide, abſorbe de l'air fixé, j'eſſayai d'en charger un excellent vin vieux de Bourgogne & je l'y laiſſai ſéjourner pendant quarante-huit heures; au bout de ce temps le vin avoit une odeur très-piquante & une ſaveur acerbe, ſemblable à celle d'un vin vert de mauvaiſe qualité: il n'étoit cependant point acide, à proprement parler; mais peut-être eſt-ce le premier degré de cette fermentation. M. l'abbé Rozier, dans ſa Diſſertation ſur les vins de Provence, a bien remarqué que les vins qui s'aigriſſoient, abſorboient de l'air. M.rs Lavoiſier & Prieſtley ont fait la même obſervation; mais ce dernier a démontré par des expériences très-bien faites, que lorſque la fermentation acide avançoit davantage, elle fourniſſoit beaucoup plus d'air qu'elle n'en avoit d'abord abſorbé. Au reſte, je ne puis attribuer qu'à l'air fixé les changemens que mon vin avoit éprouvés, puiſque de pareil vin expoſé à l'air libre pendant le même eſpace de temps, n'a pas ſubi les mêmes altérations.

Je n'ai point eſſayé d'expoſer du vin à l'air qui ſe dégage

des diſſolutions métalliques; mais je préſume fort que puiſque cet air n'a pas d'odeur gazeuſe, & qu'il ne cauſe aucune altération à l'eau, il ne pourroit pas en communiquer au vin, qui ne me paroît pas auſſi ſuſceptible de ſe combiner à l'air fixé. Cette préſomption va acquérir de la force par les expériences ſuivantes.

Ayant pris de l'eſprit alkali volatil tiré du ſel ammoniac par la chaux, & qui ne faiſoit aucune efferveſcence avec les acides, je le plaçai dans la bouteille de réception; je fis le vide, & ayant dégagé de l'air fixé, ſoit par l'union des acides aux alkalis fixes, ſoit par l'union de ces mêmes acides aux alkalis volatils ou à la craie, l'eſprit de ſel ammoniac a toujours recouvré la propriété de faire efferveſcence avec tous les acides, & une partie s'eſt criſtalliſée ſur les bords du vaſe qui le contenoit.

De pareil eſprit alkali volatil tiré du ſel ammoniac par la chaux, & qui ne faiſoit aucune efferveſcence avec les acides, ayant été expoſé à l'air dégagé des diſſolutions métalliques, il s'eſt trouvé le même qu'avant l'opération, c'eſt-à-dire, très-pénétrant, parfaitement fluide & ne faiſant aucune efferveſcence avec les acides; & je ne puis croire que ce fût faute d'air fixé, car l'eſprit alkali volatil ſe trouvoit mis en expérience, lorſqu'une de mes bouteilles ſe trouva remplie d'air au point de ſe briſer.

J'expoſai de l'eau de chaux récente à l'air fixé dégagé par l'union des acides aux ſels alkalis fixes, alkalis volatils & à la craie; l'eau de chaux s'eſt troublée, & il s'eſt fait un précipité qui n'étoit que de la craie pure. Je m'en ſuis aſſuré, non-ſeulement parce que ce précipité faiſoit efferveſcence avec les acides, mais encore parce que mêlé au ſel ammoniac, il n'en dégage point l'alkali volatil ſans le ſecours du feu: de ſemblable eau de chaux, expoſée à l'air fixé, qui ſe dégage des diſſolutions métalliques, ne s'eſt point précipitée.

Ces faits me paroiſſant ſuffire pour démontrer que l'air fixé n'eſt pas préciſément le même air que l'air atmoſphérique, & qu'il diffère ſuivant les corps qui le fourniſſent, je ſuſpendis

mes expériences dans le dessein de les reprendre incessamment, & je m'attachai à reconnoître quelle différence pouvoit se trouver entre ces airs fixés & l'air commun. La première tentative que je fis, fut de comparer, ainsi que l'avoit fait le célèbre Hales, le poids de l'air fixé au poids de l'air atmosphérique: pour cela, je plaçai dans la bouteille de réception un gobelet de verre dans lequel j'avois mis de l'acide vitriolique; je fermai cette bouteille avec le couvercle de la bouteille des mélanges, disposée de manière que l'extrémité de l'entonnoir étoit placée au-dessus du gobelet qui contenoit l'acide; au sommet de cette bouteille je luttai un petit ballon à peser l'air, & je fis le vide de manière à faire descendre le mercure du petit baromètre à deux lignes près du niveau: ayant ensuite fermé le robinet qui, de la bouteille communiquoit à la machine pneumatique, je fis tomber par l'entonnoir une lessive de sel de tartre sur l'acide contenu dans le gobelet. Lorsque mes vaisseaux furent pleins d'air, je fermai le ballon, & après l'avoir détaché de dessus l'appareil, je le pesai; l'ayant ensuite vidé, je le laissai se remplir d'air atmosphérique, je le pesai de nouveau, & je n'ai point trouvé de différence dans le poids de ces deux airs.

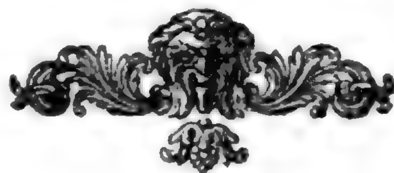
Voulant comparer la compressibilité & le ressort de l'air fixé avec ces mêmes propriétés de l'air atmosphérique, & n'en pouvant rassembler une assez grande quantité pour en charger une fontaine de compression ou la crosse d'un fusil à vent, je me servis du tube de Boyle, dont les Physiciens se servent souvent pour comprimer l'air en le chargeant d'une colonne de mercure: ce tube a deux branches, dont l'une est haute d'environ trente pouces & ouverte par en haut, l'autre est beaucoup plus courte & fermée. Je fis séparer ce tube à sa courbure, en deux parties, & je réunis les pièces sur un robinet de cuivre: je versai dans la longue branche, du mercure qui réduisit l'air à un espace plus petit; ayant marqué cette réduction, je séparai la branche courte & la luttai avec son robinet au haut d'un appareil semblable à celui que j'ai employé pour vider le ballon à peser l'air & le remplir d'air

les vapeurs ne s'enflammèrent point. Lorſqu'elles ſortoient en très-grande abondance, elles éteignoient les lumières; ce qui n'arrivoit pas lorſqu'elles ſortoient en moindre quantité.

Il réſulte donc de ces expériences, que l'air fixé, dégagé dans l'union des acides aux ſels alkalis, à la craie, aux métaux, diffère de l'air atmoſphérique principalement par ſon odeur; que l'air fixé n'eſt point une ſubſtance identique, puiſqu'il a une odeur putride lorſqu'il ſe dégage dans la combinaiſon des ſels ammoniacaux, & qu'il n'a qu'une odeur ſimplement gazeuſe dans la combinaiſon des ſels neutres parfaits, & des ſels à baſe terreuſe; qu'enfin l'air dégagé des ſubſtances métalliques eſt très-différent des autres airs fixés, puiſqu'il n'a point l'odeur pénétrante, qu'il ne rend point l'eau acidule, qu'il ne précipite point l'eau de chaux, qu'il ne communique pas à l'alkali volatil cauſtique la propriété de faire effervеſcence; enfin de ceux que j'ai eſſayés, il eſt le ſeul qui m'ait paru inflammable, les autres ne donnant d'autres indices de la préſence du phlogiſtique que leur odeur, & peut-être le goût ſingulier qu'ils communiquent à l'eau. M. Rouelle, dans des recherches ſur cette même matière qu'il vient de publier dans l'Avant-coureur, a découvert que l'air qui s'élève lorſqu'on précipite le foie de ſoufre par un acide, étoit inflammable, & que cet air ne ſe combine point facilement à l'eau. A l'égard de l'air inflammable, dont parle le docteur Hales, cet air fixé pouvoit ſe trouver chargé de quelques vapeurs étrangères qui s'étoient élevées pendant la diſtillation: il y a long-temps qu'on s'eſt aperçu qu'en diſtillant le gayac & pluſieurs autres corps qui, comme lui, donnent beaucoup d'air & de vapeurs huileuſes, ces vapeurs ſortant par le trou du ballon dans lequel on le diſtille, forment un dard qui s'enflamme à l'approche d'une bougie. Je crois cependant pouvoir aſſurer que l'air fixé qui ſe dégage de beaucoup de corps pendant la diſtillation, eſt à-peu-près de la même nature que celui qui ſe dégage lors des combinaiſons; il en eſt de même de celui qui ſe produit dans le temps de la fermentation. Mais comme les expériences qui le prouvent ſeroient

ſeroient encore fort longues à rapporter, j'en réſerve le détail pour un autre Mémoire, dans lequel je me propoſe de faire connoître pluſieurs faits relatifs à la manière dont l'air fixé ſe combine à différens corps.

Après avoir rédigé mes expériences, j'ai pris connoiſſance d'un Ouvrage de M. Prieſtley, qui paroît depuis fort peu de temps. Ce Chimiſte parle de pluſieurs faits que j'avois cru nouveaux, notamment de l'odeur particulière déſagréable qui s'élève des diſſolutions métalliques, & de quelques propriétés particulières à cette eſpèce d'air, qu'il déſigne auſſi ſous le nom d'*air inflammable*. Ces mêmes particularités n'ont point échappé à M. Rouelle, & je rends à ces Meſſieurs la juſtice qui leur eſt dûe, d'en avoir parlé les premiers. J'aurois même volontiers ſupprimé mon travail, ſi je ne l'euſſe cru propre à aſſurer leurs découvertes, & ſi d'ailleurs il n'eût préſenté d'autres particularités qui m'ont paru mériter d'être connues. M. Prieſtley donne encore le nom d'air inflammable à celui qu'on retire des matières végétales & animales; mais je ne crois pas qu'on puiſſe regarder cet air comme pur, à beaucoup près. M. Prieſtley fait mention d'un air qu'il nomme putride, mais cet air eſt celui qui ſe trouve chargé de la reſpiration des animaux ou infecté de la vapeur des ſubſtances putréfiées, & non pas celui qui ſe dégage dans le temps de la combinaiſon des ſels ammoniacaux & auquel j'ai donné ce nom. A l'égard de l'air nitreux dont parle auſſi M. Prieſtley, ce n'eſt que de l'air chargé des vapeurs de l'acide nitreux qui ſe dégage lorſqu'on diſſout quelque métal par cet acide.



PREMIER MÉMOIRE
POUR SERVIR
À L'HISTOIRE ANATOMIQUE DES POISSONS.

Par M. VICQ-D'AZIR.

LA diſſection des Brutes a été long-temps la ſeule qui fût permiſe & pratiquée. Dans des ſiècles plus éclairés on s'eſt livré ſans partage à l'Anatomie humaine, & grâce aux travaux d'un nombre prodigieux de Savans, on a vu cet objet ſous preſque toutes ſes faces; il ne s'agit plus maintenant que d'en connoître les rapports. Pour les apercevoir, il faut rétrograder & revenir par choix à cette anatomie qu'on a cultivée long-temps par néceſſité. Quelques Anciens s'en ſont occupés avec ſuccès, mais c'eſt principalement aux Anatomiſtes modernes qu'elle a les plus grandes obligations; ce ſont eux qui ont fourni les faits les plus importans, qui en ont formé une chaîne & qui en ont fait ſentir les avantages.

Pluſieurs Académiciens célèbres ont développé la ſtructure des quadrupèdes & des oiſeaux; la petiteſſe des inſectes, la ténuité de leurs organes n'ont point arrêté les progrès de leurs découvertes; à l'aide du microſcope ils ont pénétré dans les replis les plus cachés de leur économie, & le corps d'un inſecte n'eſt pas plus étonnant pour un Reaumur, que celui de l'homme ne l'étoit pour Winſlow. L'organiſation des végétaux n'a pas même échappé à leurs recherches, & l'eſprit d'analyſe ſemble avoir dévoilé, juſqu'en ſes plus petits détails, les myſtères de la Nature vivante.

Dans un enchaînement auſſi rapide de connoiſſances nouvelles, les poiſſons ſont les ſeuls dont on n'ait pas ſuivi l'hiſtoire avec le même zèle & le même ſuccès. Les Naturaliſtes ſe ſont contentés de la nomenclature & ont ſeulement étudié les formes; peu de Phyſiciens ſe ſont occupés de leur diſſection; & nos Auteurs ne nous fourniſſent qu'un petit nombre de

descriptions exactes. Stenon & Ruysch ont disséqué la raie, Lorenzinus & Kœmpfer la torpille, Peyer le saumon, Muralt la truite, Borrichius l'aiguille, Needham la carpe & l'alose, Valisnieri l'anguille, Vald-Schmidius la lamproie, & M. Gouan plusieurs épineux. Aurelius Severinus, M.rs Duverney, Petit, Hérissant & Geoffroy ont aussi décrit plusieurs organes appartenans à cette classe d'animaux. Nous pourrions encore citer quelques Anatomistes qui s'en sont occupés; mais tous ces morceaux sont décousus, & on ne trouve nulle part une suite d'observations d'après lesquelles on puisse comparer chaque ordre de poissons avec les autres corps vivans. Encouragé par cette disette, j'ai cru devoir profiter du voisinage de la mer pour vérifier les faits que j'avois lûs; & ce travail m'a nécessairement conduit à un autre qui consiste à rassembler ces faits, & à tâcher d'en apprécier les rapports.

Mais quel ordre suivre dans un semblable projet? doit-on décrire les parties de chaque individu séparément, ou seulement celles que l'on peut regarder comme des caractères anatomiques & qui sont propres aux différentes classes. J'ai cru que cette dernière méthode étoit préférable, & que lorsqu'on avoit disséqué un certain nombre d'animaux de la même famille, l'ouvrage le plus utile étoit de donner une idée claire, précise & générale de leurs viscères & des parties les plus remarquables qui les composent, après les avoir divisés en différens ordres relatifs à leur structure. C'est aussi ce que je me suis proposé de faire; bien persuadé qu'une description minutieuse de chaque poisson n'annonceroit qu'une curiosité vaine, & jamais cet esprit philosophique qui doit être l'ame de toute histoire, & sur-tout de celle de la Nature.

Parmi les divisions reçues, celles d'Aristote & de Wolston que Willughby & Ray suivent en partie, ne peuvent nous convenir : ces Naturalistes rangent mal-à-propos les cétacées dans la classe des poissons, puisque la forme du cœur, celle des paupières & des organes de la respiration mettent entre eux des différences essentielles. M. Brisson a soigneusement évité cette faute, & Linnæus ne veut pas même que l'on y

rapporte les cartilagineux : quoiqu'Artedi & M. Gouan ſoient auſſi de ce ſentiment, nous ne pouvons y déférer, fondés ſur ce que les cartilagineux ont tous les caractères eſſentiels aux poiſſons. Leur cœur n'a qu'un ventricule, toutes leurs femelles ont des œufs ; ils n'ont point de poumons, & l'organe de l'ouïe n'a point chez eux d'ouverture extérieure. D'après ces aſſertions que nous prouverons dans nos Mémoires, nous diviſerons les poiſſons en cartilagineux, en poiſſons longs ou anguilliformes & en épineux ; les cartilagineux ſeront ſubdiviſés en cartilagineux longs & en cartilagineux plats : les poiſſons longs ou anguilliformes ſont auſſi cartilagineux ſuivant la remarque de Rondelet ; mais les cartilagineux longs, connus par les Latins ſous le nom de *galei*, ne ſont jamais ſi arrondis, & leur ſtructure intérieure met d'ailleurs entr'eux des différences qui juſtifient aſſez notre diviſion. Enfin les poiſſons épineux ſeront diviſés en épineux arrondis & en épineux plats, nommés *plani* par les Latins : chaque ordre nous occupera ſéparément, & nous tâcherons de faire voir par les détails, que cette diviſion eſt auſſi exacte qu'elle eſt ſimple.

PREMIER ORDRE.

Anatomie des Poiſſons cartilagineux.

Pour procéder avec méthode, nous examinerons 1.° le ſquelette, 2.° les muſcles, 3.° les viſcères que nous diviſerons à raiſon des cavités.

Squelette des Poiſſons cartilagineux.

M. Gouan eſt peut-être le ſeul qui ſe ſoit propoſé de donner une deſcription ſuivie & complette du ſquelette des poiſſons ; mais cette deſcription ne convient ni aux anguilliformes, ni aux poiſſons plats, ni aux cartilagineux ; le ſquelette de ces derniers a cela de particulier, qu'il ne ſe durcit jamais au point de ne pouvoir être aiſément coupé avec le ſcalpel. Les os plats, ſur-tout ceux de la tête, réſultent de l'aſſemblage de différentes lames revêtues par une membrane très-mince

& dans l'intervalle desquelles une liqueur glaireuse est épanchée. Les os arrondis n'ont point de cavité proprement dite, mais ils ont des cellules & sont pénétrés par le même mucus ; si on les fait dessécher, ils perdent beaucoup de leur poids, & acquièrent, en se racornissant, une dureté très-grande. Si on les soumet aux expériences de M.rs Hérissant & Tenon, ils ne fournissent qu'une très-petite quantité de substance soluble; ils sont arrosés par un nombre prodigieux de vaisseaux: la cellulosité qui les entoure est plus lâche que dans les quadrupèdes; leurs articulations n'offrent rien qui ressemble à des glandes synoviales, & les têtes articulaires ne sont point revêtues par ces filets perpendiculaires que M. de Lassone a observés dans l'homme, mais par une lame osseuse repliée & continue avec celles qui composent le reste de l'os : d'où il faut conclure que les os des cartilagineux diffèrent principalement de ceux des quadrupèdes, parce qu'ils sont pénétrés par une mucosité qui leur est particulière, qui n'est autre chose que ce que M. Hérissant appeloit son *gluten* ou sa troisième substance, & qui supplée au défaut de moëlle osseuse & de synovie proprement dite ; d'un autre côté la cellulosité extérieure étant moins adhérente, comprime moins l'organe*(a)* qui sépare le suc osseux, & qui dans les poissons étant plus lâche, laisse échapper des sucs plus délayés.

Le squelette des cartilagineux est composé de la tête, de l'épine, des côtes ou rayons, du sternum & des os innominés. On peut ajouter les cercles des ouïes & l'os hyoïde.

1.° La tête peut être divisée en crâne & en mâchoire. Le crâne est oblong & finit en devant par une pointe plus ou moins mousse, dans laquelle le cartilage devient de plus en plus mou & spongieux; le dessus est plane & n'est point surmonté par une crête comme dans les épineux, le dessous est égale-

(a) Dans les jeunes animaux le suc osseux se sépare dans toute l'étendue de l'os; mais il est très-délayé. L'ossification commence par les couches internes, elle passe ensuite aux moyennes, & si dans un âge très-avancé il se forme encore des lames osseuses sous le périoste, c'est qu'il reste une portion de l'os, dans laquelle le travail de l'ossification n'est point achevé. Il en est de même, à proportion, dans les arbres.

ment aplati & forme la voûte du palais; latéralement se trouvent les orbites, & quoique dans plusieurs ils paroissent occuper la partie supérieure, ils n'en sont pas moins placés sur les côtés de la masse cartilagineuse; l'intérieur du crâne, *(voy. fig. 2, pl. 1)* est divisé en deux fosses, dont l'une *a*, que l'on peut appeler pituitaire, est antérieure, plus excavée, & située derrière les deux lames criblées; l'autre *b* est postérieure, vraiment cérébrale, plus élevée & plus étroite; les trous qui s'ouvrent dans ces cavités sont au nombre de sept; l'un mène au conduit spinal *d*, & son principe est remarquable par deux petites excavations *cc* qui logent le cervelet. Deux paires de trous *ee* donnent passage aux nerfs de la langue, du pharynx, de l'estomac & de l'ouïe; les trous optiques *f* viennent après, ils sont obliques, divergens & placés l'un auprès de l'autre. Toujours en avançant vers la partie antérieure, on aperçoit deux lames minces, légèrement excavées & percées par un grand nombre de trous qui s'ouvrent dans les narines *gg;* mais il est essentiel d'observer que toutes ces parties sont continues & ne forment qu'une seule pièce; ce qui est bien différent dans les épineux dont la fibre osseuse est roide & cassante, & chez lesquels le crâne est formé par l'assemblage d'un grand nombre de pièces, qui ont chacune un centre d'ossification, & qui se rencontrent par des sutures multipliées : ces réflexions fournissent une nouvelle preuve de la théorie exposée par M. Hunauld dans les Mémoires de l'Académie, & font concevoir pourquoi les crânes qui conservent plus long-temps leur mollesse ont aussi moins de sutures.

La mâchoire inférieure ressemble à celle d'un enfant. *(Voyez fig. 4, pl. 1);* ses branches montantes sont courtes & terminées par un petit condyle *a:* un cartilage placé dans le *geni* la sépare en deux pièces; l'intérieur est creusé pour le passage des vaisseaux & des nerfs, & le grand angle se recourbe pour l'insertion d'un muscle.

La mâchoire supérieure est contiguë à la face inférieure du crâne. Dans quelques espèces elle est mobile & s'abaisse par le jeu de quatre pièces à ressorts qui suivent le mouvement des muscles; cette conformation a lieu dans le poisson

que l'on appelle vulgairement du nom de moine, ange ou *ſquatina*, & dans tous les cartilagineux qui ont l'ouverture des mâchoires placée à la pointe de la tête; elle ne jouit au contraire que d'un très-petit mouvement dans ceux qui l'ont placée en-deſſous, comme dans les raies & les *galei.*

Les mâchoires ſont armées dans les uns de dents triangulaires & taillées en ſcie d'un côté, comme dans le *Galeus-canis* ou Chien de mer; dans les autres elles ſont figurées en pyramide très-acérée, comme dans l'eſpèce de *Canicula* que les Normands appellent du nom de *Rouſſette*, ou bien en forme de pièces de parquet raboteuſes, & irrégulièrement polygones comme dans le Reton. *(Voyez fig. 5, pl. 1).*

2.° L'épine eſt formée par une ſérie de vertèbres qui vont en décroiſſant, du crâne juſqu'à l'extrémité de la queue; leur forme eſt bien décrite par pluſieurs Auteurs, & c'eſt principalement de cette partie qu'ils ſe ſont occupés. Ariſtote dit que l'épine cartilagineuſe caractériſe cet ordre de poiſſons; l'épine n'eſt pourtant pas plus cartilagineuſe que les autres os de l'individu. Nous nous contenterons d'ajouter que le nombre des vertèbres n'eſt pas conſtant, & je puis aſſurer, après l'avoir compté dans pluſieurs cartilagineux de la même eſpèce, que je ne l'ai pas trouvé le même dans tous: ce qui ne s'accorde point avec les obſervations de M. Linnæus, qui a trouvé le même nombre de vertèbres dans pluſieurs amphibies. On ne doit point au reſte regarder ces variations comme fort ſurprenantes, puiſque M. Daubenton n'a pas toujours rencontré le même nombre de vertèbres lombaires dans les chevaux.

3.° Il n'y a point de côtes, proprement dites, dans ces poiſſons; l'enceinte du ventre & de la poitrine eſt formée par des os qui ont une figure particulière, par des muſcles & des aponévroſes; ſeulement on trouve dans les cartilagineux plats, des rayons oſſeux parallèles liés enſemble par un tiſſu ligamenteux aſſez lâche, qui forment les ailes du poiſſon, & fourniſſent inſertion aux muſcles qui tiennent lieu de nageoires: ces os ployans ſont accompagnés par des nerfs & des vaiſſeaux ſanguins qui jouent à leur ſurface, &

ils s'articulent avec ceux qui tiennent lieu de ſternum & de baſſin.

4.° Le ſternum n'eſt pas éloigné de la mâchoire inférieure, *(Voyez fig. 3, pl. I)*; il eſt formé par un os tranſverſal, étroit, plus long dans les cartilagineux plats, & qui, ſur les côtés, ſe diviſe en deux branches, dont les unes ſont antérieures *aa*, & les autres poſtérieures *bb*. Les deux branches antérieures ſont briſées dès leur naiſſance par une articulation *cc*; elles s'étendent & s'amincissent des deux côtés de la mâchoire ſupérieure, elles forment l'enceinte du thorax, & ſoutiennent les trous des ouïes dans les raies de toute eſpèce. Les branches poſtérieures ſe recourbent des deux côtés du bas-ventre; & dans l'endroit où elles ſe continuent avec les antérieures, on obſerve une lame qui déborde & fournit pluſieurs concamérations, dont les unes répondent au ventre & les autres à la poitrine *dddd*.

5.° Les os du baſſin ſont figurés en fer-à-cheval & placés au-deſſous de l'anus, ce qui eſt particulier aux cartilagineux; leur partie moyenne porte une excavation en devant & deux en arrière plus petites & ſéparées par une crête; les deux extrémités ſont recourbées en bas, & portent deux petites franges ou nageoires: ces os ſoutiennent l'anus & la vulve des femelles, comme le ſternum protège le cœur & partage la poitrine du bas-ventre: j'ai donc dû conſerver avec confiance les noms de ces os, qui ne peuvent convenir à ceux que M. Gouan nomme ainſi dans les épineux, puiſqu'ils n'ont aucun de ces uſages, & qu'étant ſimplement deſtinés à ſoutenir les nageoires ventrales & pectorales, ils porteroient à plus juſte titre le nom d'*oſſa pinnarum* ſous lequel les Anciens les connoiſſoient.

6.° Les cercles des ouïes & leurs ouvertures ſont diſpoſés & jouent d'une façon particulière aux cartilagineux; nous n'avons rien à ajouter à ce que des Anatomiſtes célèbres en ont dit; les franges & les muſcles ſont comme dans les épineux, & Duverney a décrit l'un & l'autre avec la plus grande exactitude: il ſuffira d'obſerver que ces organes ont, comme

comme dans les autres poissons, le double usage de servir à la déglutition, en laissant échapper le liquide superflu ou en l'arrêtant à volonté, & d'exposer le sang au contact du fluide dans lequel l'animal se meut.

7.° L'os hyoïde est formé par deux pièces qui vont se rencontrer à angle aigu vers la base de la langue, & qui sont articulées postérieurement avec deux autres qui tiennent à la base du crâne auprès du premier cercle des ouïes. *(voy. fig. 1, pl. I).*

Muscles des Poissons cartilagineux.

Les muscles des cartilagineux n'ont pas été mieux décrits que leur squelette, si l'on en excepte les muscles en forme de faulx, particuliers aux torpilles, qui sont placés & se correspondent sur le dos & sur la poitrine, & dans lesquels Stephanus Lorenzinus d'après Rhedi, fait consister leur force engourdissante ou électrique. Nous les diviserons en ceux qui sont destinés au mouvement total du poisson, & ceux qui ne meuvent que quelques-unes de ses parties. Parmi ces derniers, les uns sont placés en dessus, les autres en dessous.

Ceux qui sont placés en dessous sont *(voy. fig. 6)* 1.° une paire de muscles qui vont du sternum à la mâchoire inférieure *aa;* 2.° une autre paire qui va à la langue, qui est placée au-dessous de la première & en est séparée par une aponévrose assez forte; 3.° deux muscles grêles & longs qui partent des environs du sternum, & se terminent par un tendon mince & très-étroit des deux côtés de la pointe ou bec aigu qui termine le poisson en devant *bb;* 4.° deux bandes musculeuses de chaque côté, qui recouvrent le thorax, dont les aponévroses se croisent, & qui sont placées entre les branches antérieures du sternum & les muscles moyens qui vont à la langue & à la mâchoire: c'est-là que sont les *musculi falcati inferiores* de la torpille; 5.° deux muscles arrondis, saillans & placés sur l'angle, le condyle & l'articulation des deux mâchoires qu'ils rapprochent; 6.° deux muscles situés presque transversalement, & qui vont de la base de la mâchoire à celle de la langue; 7.° deux autres muscles profonds qui dans quelques-uns sont destinés à l'élé-

vation de la mâchoire supérieure & placés au-dessus de l'œsophage entre les cercles des ouïes; 8.° des muscles abdominaux assez minces qui peuvent être facilement séparés en deux plans, entrecoupés par des aponévroses qui s'insèrent aux branches postérieures du sternum & à l'os innominé, & dans quelques sujets vont jusqu'aux ouïes; 9.° un muscle placé dans l'angle de chaque cercle brisé qui forme les ouïes, & qui a pour fonction de le rendre plus aigu en les ployant *(voyez fig. 8, pl. 1)*.

Les muscles qui se trouvent en dessus *(voyez fig. 9, pl. 1)*, sont 1.° deux muscles grêles placés des deux côtés du crâne, & qui aboutissent par un tendon longuet vers le devant du poisson, en formant un V consonne *a a*; 2.° deux plans charnus de chaque côté que l'œil sépare, l'un est interne, globuleux & remarquable par une aponévrose qui le recouvre *b b*, l'autre est externe, aplati, moins élevé, & n'est recouvert que par la peau *c c*.

Les muscles qui sont destinés au mouvement total du poisson sont placés auprès de l'épine ou dans le reste de la circonférence; les premiers sont figurés en chevrons brisés, *fig. 7, pl. 1;* les autres sont différens dans les cartilagineux plats & dans les ronds: dans les premiers ils sont disposés en rayons, suivant la longueur des os droits qui tiennent lieu de côtes; dans les cartilagineux ronds au contraire ils sont plus ou moins obliques & brisés en différens endroits: ces derniers ont des nageoires, & leurs muscles sont figurés comme ceux des épineux que M. Gouan a très-bien décrits.

Maintenant ne sommes-nous pas en droit d'observer que les cartilagineux sont, à cet égard, les mieux organisés de tous les poissons, puisqu'outre les muscles des nageoires & les muscles latéraux, les différentes parties qui les composent sont mûes par un grand nombre de puissances musculaires que l'on ne trouve point dans les autres? c'est sur-tout la partie antérieure qui en est le mieux pourvue, & les quatre muscles longuets, dont deux sont placés en dessus & deux en dessous, ne contribuent pas peu à la rapidité des mouvemens que fait le bec de ces poissons.

Viſcères des Poiſſons cartilagineux.

Les viſcères des poiſſons cartilagineux ſont les ſeules parties de ces animaux ſur leſquelles on trouve quelques éclairciſſemens dans les Auteurs; encore ont-ils mal décrit le cerveau *(b)*, le cœur & ſur-tout l'oreillette, & ils ont oublié quelques obſervations intéreſſantes ſur les parties ſexuelles. Pour ranger avec ordre celles que nous avons faites ſur la ſplanchnologie des cartilagineux, nous les diviſerons à raiſon des cavités qui renferment les principaux viſcères; & ces cavités ſont la tête, la poitrine & le bas-ventre.

1.° Le crâne renferme le cerveau recouvert de ſes membranes; l'aracnoïde eſt très-ſenſible à l'origine des nerfs, & la maſſe cérébrale peut être diviſée en trois portions, dont l'une eſt antérieure, l'autre moyenne, la troiſième poſtérieure; la portion antérieure *a (fig. 10, pl. 1)*, eſt irrégulièrement triangulaire, aplatie par en bas, légèrement bombée en deſſus & jointe par un étranglement *b* avec la partie moyenne; elle ſemble appartenir toute entière aux nerfs olfactifs *c c* qui en partent & en ſont comme les appendices; la portion moyenne *d* forme une boſſe mamelonnée ſupérieurement & plane en deſſous; elle n'a preſque point de ſubſtance corticale, & les nerfs optiques qui naiſſent de ſa face inférieure ſont rapprochés comme dans les oiſeaux; ſi on y fait une ſection longitudinale, on y aperçoit un ventricule, avec une valvule & une eſpèce d'*infundibulum;* les lobes poſtérieurs ſont plus ſenſibles dans les cartilagineux plats, & répondent au cervelet; la portion antérieure eſt logée dans la foſſe pituitaire, la moyenne dans la foſſe cérébrale proprement dite, & les lobes poſtérieurs dans les excavations qui ſont à l'origine du conduit ſpinal.

Les nerfs olfactifs ſont les plus gros de tous; une grande portion du cerveau eſt employée à les former, & à cet égard ils diffèrent beaucoup des nerfs olfactifs des épineux; c'eſt ce que Willis n'a pas remarqué : la pulpe des nerfs eſt recouverte

---

(b) Il faut en excepter le célèbre M. Camper, dont le travail m'étoit inconnu quand j'écrivois ce Mémoire.

par une membrane très-mince, & ſe plonge par les trous de la lame criblée, dans l'intérieur des narines qui ſont diviſées en pluſieurs cellules dont Collins a mal-à-propos négligé l'hiſtoire *(voyez fig. 2, pl. 1)*. C'eſt-là que ſe fait l'expanſion de la pulpe nerveuſe dont un *mucus* entretient la molleſſe, & l'on n'obſerve nulle part avec plus de ſatisfaction & de facilité la diſtribution de la première paire.

L'organe de l'ouïe n'eſt pas tout-à-fait auſſi facile à développer que celui de l'odorat; après des recherches très-longues & aſſez laborieuſes, voici ce que j'ai conſtamment obſervé: des deux côtés du crâne derrière les orbites, ſont deux cavités aſſez amples, ſymétriques & ſéparées par des cloiſons qui ſont toutes doublées par des membranes d'une conſiſtance aſſez molle, & dans leſquelles on trouve, 1.° trois conduits tranſparens & cartilagineux qui décrivent des cercles aſſez réguliers & qui ſont tapiſſés intérieurement par une membrane muqueuſe, & qui aboutiſſent à une eſpèce de tête aſſez ſemblable à celle du petit os nommé *enclume* dans l'oreille des quadrupèdes; 2.° une maſſe blanchâtre aſſez mollaſſe, qui ne manque jamais, & que Ray & Stenon ont décrite; 3.° une gelatine abondante comme dans le reſte du crâne, & diſtribuée dans des cellules diaphanes; 4.° des nerfs qui ſe diviſent, qui ſerpentent & qui ſemblent ſe réduire en pulpe dans le voiſinage de la maſſe blanchâtre; mais j'avouerai que j'ai inutilement cherché une ouverture extérieure. Parmi les anguilliformes, quelques-uns, le congre, par exemple, offrent une conformation à-peu-près ſemblable; mais les conduits tranſparens ſont logés des deux côtés des foſſes cérébrales au-deſſus du petit oſſelet qui ſe trouve dans le crâne de ces poiſſons, & qu'on ne rencontre point dans les cartilagineux: la petite maſſe blanchâtre de ces derniers ſemble y ſuppléer; le reſte eſt aſſez égal.

Je n'ignore point que M. Geoffroy a décrit l'organe de l'ouïe de la raie, mais il n'a point parlé de la petite tête à laquelle aboutiſſent les conduits qu'il appelle du nom de *demi-circulaires*, & qui ont auſſi quelque reſſemblance avec les vaiſſeaux aqueux de Cotuni: j'ai de plus retrouvé la même

conformation dans les *galei* que M. Geoffroy n'a point disséqués, & des deux côtés de la moëlle alongée des anguilliformes; enfin j'ai jeté quelques doutes sur l'existence du trou auditif externe; mon travail ajoute donc à celui de ce savant Naturaliste, & le confirme en plusieurs points *(c)*.

Les autres nerfs sont au nombre de deux troncs principaux de chaque côté, qui se distribuent à la langue, au pharynx & donnent des filets qui vont jusqu'au cœur dans l'épaisseur des membranes: on trouve encore plusieurs ramifications qui se plongent aussi dans l'orbite & qui vont à l'œil, mais je n'ai trouvé dans les nerfs de ces poissons rien qui eût l'apparence ganglio-forme; ce qui me fait croire que ces petits organes sont particuliers aux animaux plus parfaits. La poitrine s'étend depuis le sternum jusqu'à la mâchoire inférieure, & depuis une branche droite du sternum jusqu'à la gauche; sa figure imite celle d'un triangle dont la pointe seroit en devant; une membrane épaisse que l'on peut prendre pour la plèvre ou pour le péricarde, la tapisse intérieurement & adhère aux muscles pectoraux: le diaphragme forme la paroi inférieure; il est membraneux & composé de plusieurs feuillets qu'un tissu cellulaire plus ou moins lâche sépare l'un de l'autre; il s'attache au sternum & à l'épine, & quelque soin que j'y aie apporté, je n'ai jamais pu apercevoir les fibres musculaires que plusieurs Naturalistes ont décrites dans le diaphragme des épineux.

(c) Tel étoit l'énoncé de mon travail lorsque je l'ai communiqué à l'Académie; alors l'excellent Mémoire de M. Camper n'étoit point sorti des mains de M. le Secrétaire. Depuis qu'il m'a été permis d'en prendre lecture, j'ai vu que cet illustre Anatomiste avoit fait en Hollande à-peu-près les mêmes observations que j'ai depuis faites en Normandie. Je conviens de bonne foi que son travail est plus exact & mieux suivi que le mien: j'observerai seulement qu'il n'a point décrit le petit renflement auquel aboutissent les conduits demi-circulaires; que les conduits membraneux qu'il admet me semblent plutôt être une membrane qui tapisse les premiers, que des conduits jouissans d'une existence particulière; que les divisions cellulaires de la cavité qui renferme l'organe de l'ouïe n'y sont pas convenablement exprimées; que sa bourse élastique n'est autre chose que la membrane qui tapisse la cloison & qui couvre la gélatine; & qu'enfin cet Anatomiste, ainsi que M. Geoffroy, n'a point décrit la structure des cartilagineux alongés dont je donne l'histoire assez au long. Tels sont les rapports & les différences de mon travail & de celui de M. Camper, qui mérite sans doute, à tous égards, les éloges que des Commissaires savans & judicieux lui ont justement prodigués.

Lorſque l'on ouvre la poitrine avec précaution on aperçoit un organe muſculeux placé ſur le milieu d'une veſſie rouge & tranſparente; c'eſt le cœur & l'oreillette.

Le cœur des cartilagineux *(voy. pl. II, fig. 1, 2, 3, b, c, d)* eſt irrégulièrement triangulaire; on y diſtingue deux faces & trois bords; des deux faces l'une eſt inférieure & plane, l'autre eſt ſupérieure & diviſée en deux par une ligne légèrement ſaillante & longitudinale; des deux bords l'inférieur eſt le ſeul qui ſoit remarquable, parce qu'il eſt irrégulièrement arrondi & comme feſtonné: la forme du cœur varie au reſte dans les différentes eſpèces; par exemple, il approche plus de la forme triangulaire dans ceux qui n'ont point l'ouverture des mâchoires placée en deſſous.

L'oreillette *(pl. II, figures 1 & 4, a)* eſt ordinairement gonflée par un ſang très-fluide & très-rouge; au premier coup d'œil elle reſſemble au poumon des grenouilles ou à une véſicule gonflée par une bulle d'air; ſa figure approche de celle d'un cœur dont la pointe ſeroit en devant & les deux prolongemens en arrière; elle eſt celluleuſe & devroit plutôt porter le nom de *ſinus* que celui d'oreillette: dans ſon milieu *c, fig. 4, pl. II,* ſe trouve l'ouverture qui communique avec la face ſupérieure du cœur. Si nous paſſons à l'examen de l'intérieur de cet organe, nous y trouvons une ſeule cavité triangulaire avec des prolongemens, & qui paroît ſéparée en deux par un faiſceau principal de fibres charnues, ſemblable à ceux que l'on connoît ſous le nom de *faſciculi* dans l'homme & dans les quadrupèdes.

De la pointe du cœur part une artère qui dans ſa naiſſance eſt fortifiée par un muſcle blanc & continu avec les fibres de cet organe, c'eſt-là que ſe trouve un muſcle en forme de larme de Job dans les épineux; l'artère ſe ramifie enſuite dans les ouïes, & donne les branches que M.rs Duverney & Gouan ont décrites avec beaucoup de ſoin; c'eſt-là que le ſang ſe diſtribue en plus grande quantité, comme il fait dans le poumon des animaux à deux ventricules; c'eſt-là qu'il reçoit le contact de l'élément que le poiſſon habite, & je croirois volontiers que ce contact eſt néceſſaire, parce qu'on

se retrouve par-tout; mais j'ai peine à croire que l'air contenu dans l'eau s'en sépare pour s'insinuer dans les vaisseaux sanguins du poisson: ce qui fortifie mes doutes à cet égard, c'est que l'organe frangé qui porte le nom d'ouïe & de *branchiæ* chez les Latins, ne me semble point propre à cette décomposition, & j'aimerois autant dire que l'air entre dans le poumon des quadrupèdes, afin que ce dernier en sépare l'eau qui peut y être contenue.

Quelques Naturalistes disent avoir trouvé un poumon dans les cartilagineux, M. Garden, cité par M. Linnæus, est dans cette opinion; pour moi j'ose assurer que les cartilagineux des côtes de la basse Normandie n'ont ni au dehors ni au dedans du thorax, rien qui ressemble à un poumon ou qui puisse en avoir l'usage: & s'il étoit permis, j'ajouterois une conjecture; c'est que ceux qui pensent différemment ont été trompés par l'apparence bulleuse de l'oreillette.

3.° L'abdomen des cartilagineux, comme celui des autres poissons, renferme trois espèces de viscères; 1.° ceux qui servent à la digestion, 2.° ceux qui sont destinés à la propagation de l'espèce, 3.° ceux qui séparent un fluide analogue à l'urine, & qui sont placés derrière le péritoine comme dans les quadrupèdes.

1.° Les viscères qui servent à la digestion sont le foie & les intestins, l'estomac, la rate & le pancreas; le foie occupe la partie supérieure & latérale de l'abdomen, il a trois lobes dans les cartilagineux plats *(voyez pl. II, figure 2);* dans les ronds il est formé par deux lanières qui s'étendent à droite & à gauche, de sorte cependant que la gauche est plus considérable: ce viscère est très-mollasse dans les poissons, & les vaisseaux qui s'y distribuent charient un sang mêlé d'une huile abondante, ce qui s'accorde à merveille avec le systême exposé par M. Lieutaud; la vésicule du fiel est enveloppée dans le foie, & son conduit se rencontre avec l'hépatique avant de s'ouvrir dans l'intestin auprès du pylore.

La rate est située à gauche, au-dessous & le long de l'estomac; dans quelques-uns on en trouve deux, & la plus petite adhère à l'extrémité inférieure du ventricule.

Le pancreas eſt blanc, triangulaire, aſſez ſemblable à celui des oiſeaux, & collé ſur le bord de l'inteſtin; il s'amincit vers le pylore, & dans quelques-uns il ſe renfle tellement qu'il paroît double au premier coup-d'œil, *b, pl. 11, fig. 11.*

L'eſtomac eſt très-large, très-dilatable & preſque toujours rempli de cruſtacées; ceux de ces petits animaux qui occupent la partie la plus voiſine de l'œſophage, ſont à peine ramollis, tandis que ceux qui ont deſcendu juſqu'au fond de l'eſtomac ſont réduits en pulpe *(d)*; ſon intérieur eſt pliſſé longitudinalement; il fait dans preſque tous les individus un petit cul-de-ſac, *k, l, m, pl. 11, fig. 5, 11, 12*, puis il ſe rétrécit pour former le pylore; c'eſt-là que l'inteſtin commence, il s'élargit enſuite & devient plus étroit à l'anus, vers lequel il ſe porte preſque directement, de ſorte que l'inteſtin & l'eſtomac font enſemble une S romaine: il en eſt donc des poiſſons comme des quadrupèdes & des oiſeaux; ceux qui ſont les plus voraces ont l'œſophage plus large & le boyau plus court, *pl. 11, fig. 5 & 11, r, s, t;* dans quelques eſpèces, comme dans le moine ou *ſquatina*, l'eſtomac ne reſſemble pas mal à celui d'un enfant; dans quelques autres, comme dans le *galeus canis*, la coupe de l'inteſtin m'a ſemblé préſenter une membrane connivente, flottante & roulée en ſpire *(e)*, qui augmente en même temps la ſurface du boyau & le nombre des bouches abſorbantes, *pl. 11, fig. 7.*

2.° Les organes de la génération ſont cachés par ceux de la digeſtion; & comme ils ont été très-bien décrits par Rondelet, Ruyſch & Stenon, nous nous contenterons d'ajouter qu'au-deſſus de cette eſpèce d'inteſtin double qui naît de la poche ou cloaque, & qui tient lieu des cornes de l'utérus & au niveau du paquet d'œufs jaunes, aſſez ſemblables à ceux des

(d) Cette obſervation ſuffiroit pour prouver l'exiſtence d'une humeur propre à pénétrer & à diſſoudre les alimens; mais elle n'eſt pas la ſeule de ce genre. Les autres claſſes d'animaux fourniſſent un grand nombre de faits qui viennent à ſon appui.

(e) Une ſtructure à peu-près ſemblable a été obſervée dans la ſeche; on en trouve la deſcription dans l'*Amphitheatrum* de Valentini. M. Tenon a fait auſſi la même obſervation.

des oiseaux, on trouve un organe arrondi, *planche II, fig. 6,* blanchâtre, tissu en forme de rayons, divisé intérieurement en deux segmens *c c,* & qui ressemble beaucoup à un testicule. Cette structure seroit assez d'accord avec le systême de M. de Buffon, qui admet dans les femelles des testicules ou des parties qui en font les fonctions. J'ajouterai encore que le sac épais, plat, quadrangulaire & corné, nommé *testa,* par Ruysch, n'est pas rompu par le fœtus, comme l'assure Rondelet, mais qu'il s'ouvre par une extrémité de dedans en dehors, à peu-près comme M. de Reaumur l'a observé dans les coques des chenilles. Un gluten en colle les parois, & par l'autre extrémité on ne pourroit l'ouvrir sans en rompre la continuité.

3.° Les reins sont situés derrière le péritoine; ils forment deux bosses que l'épine partage; inférieurement ils s'approchent l'un de l'autre vers l'anus, & s'ouvrent par un conduit dans cet intestin, auprès d'un petit appendice creux qui ressemble à une verge; ils sont plus larges, plus saillans & ne s'élèvent pas aussi haut que dans les épineux.

C'est au-dessous de ces viscères que se trouve le paquet d'œufs dans les femelles & dans les mâles, un organe blanc, creux & dont le conduit s'ouvre dans l'anus avec une caroncule comme dans le reton & le *galeus-canis.* Voy. *fig. 10, pl. II.*

La totalité du poumon est recouverte par une peau très-rude, chagrinée & à boucles dans quelques-uns; elle est criblée de pores par lesquels suinte une humeur glaireuse & abondante, qui sort sous l'apparence d'un vermisseau quand on la comprime: lorsqu'on enlève la peau avec précaution, on aperçoit un lacis de vaisseaux blancs, mucilagineux, noueux dans quelques endroits, & qui vont d'une boucle ou d'un pore à l'autre; ils sont moins abondans vers la circonférence, & c'est à la partie antérieure du poisson qu'ils ont le plus de volume. Nous avons déjà fait observer qu'une pareille humeur se trouve dans les cellules des os plats, & même dans le tissu des os longs. *Stephanus Lorenzinus,* en décrivant la Torpille, fait aussi mention d'une pareille humeur & de pores semblables.

D'après ces obſervations, nous ſommes en état de ſavoir quel rang doivent tenir les cartilagineux dans la claſſe des animaux, & quels ſont leurs rapports principaux & leurs principales différences. Si on les compare aux quadrupèdes, on voit qu'ils en diffèrent ſur-tout par l'abſence du poumon & par la forme du cœur ; mais en revanche leur eſtomac, l'organe de l'odorat, les lames criblées, quelques phénomènes de la génération, la ſituation & l'uſage du *ſternum*, & la forme de pluſieurs muſcles, ſemblent les en rapprocher. Comme les reptiles ils ont un cœur & un ſeul ventricule; mais l'oreillette eſt différente, & ils ne reſpirent point. Ils reſſemblent aux oiſeaux par leurs œufs, leurs teſticules, leurs uterus & le cloaque de l'anus ; mais ces derniers ont un cœur biloculaire & un poumon : les cétacées en diffèrent par la même raiſon ; mais les cartilagineux habitent le même élément, & la plupart ont deux trous des ouïes placés en deſſus, où ils ſemblent tenir lieu des conduits qui méritent aux premiers le nom de *ſouffleurs*. Leur analogie avec les autres poiſſons eſt plus grande ; mais les différences n'en ſont pas moins marquées. Dans les anguilliformes les os ſont également cartilagineux, mais le cœur eſt chez eux irrégulièrement ſémilunaire, le cerveau eſt plus alongé & l'eſtomac ne forme point un cul-de-ſac, mais un boyau aveugle & fort long. Enfin, les épineux en diffèrent par la dureté de leurs os, par la forme de l'oreillette, par les appendices nombreuſes du pylore & par les opercules des ouïes. Les cartilagineux ſont donc les mieux organiſés de tous les poiſſons, & c'eſt par eux qu'il a fallu commencer. Ceux que j'ai diſſéqués & qui ſervent de baſe aux obſervations que j'ai l'honneur de préſenter à l'Académie, ſont parmi les cartilagineux plats le poiſſon nommé *paſtinaca*, le *ſquatina* [a], & les eſpèces de raies que Rondelet nomme *raia levis* [b], *raia cinerea*, *raia occulata & aſpera*, *raia clavata*, *raia aſperrima* [c]; & parmi les cartilagineux longs, le *galeus lævis*, le *galeus aſteria*, le *galeus canis* [d], & deux autres poiſſons cartilagineux dont un eſt *le canicula ariſtotelis* [e], & l'autre une eſpèce de *malta* [f] de Rondelet.

[a] Moine ou ange.
[b] Reton.
[c] Tirot.
[d] Haut chien.
[e] Rouſſette.
[f] Reſſemble beaucoup au *lumia - texuola*,

Je n'ai décrit que les parties qui avoient été oubliées, ou celles qui m'ont semblé mal vues; & j'ai cru avant de finir devoir donner ces détails, afin que ceux qui seront à portée puissent vérifier les faits que j'avance, & à l'aide de ces observations en faire de nouvelles, qui puissent nous conduire enfin à l'histoire complette de cette classe d'animaux.

EXPLICATION DES FIGURES.

PLANCHE I.

FIGURE 1. Os hyoïde. *aa*, les deux extrémités antérieures de l'os hyoïde. *bb*, les deux extrémités postérieures qui s'articulent avec le crâne.

Fig. 2. Coupe horizontale du crâne. *gg*, places qu'occupent les deux lames criblées. *a*, la cavité antérieure ou pituitaire. *b*, la cavité cérébrale, proprement dite. *cc*, petites arrière-cavités qui logent le cervelet. *f*, place qu'occupe le nerf optique. *ee*, place qu'occupent les deux autres nerfs dans leur sortie. *g*, conduit spinal.

Fig. 3. Le sternum. *hh*, branche moyenne. *bb*, branches latérales postérieures. *aa*, branches latérales antérieures. *cc*, articulation des branches antérieures avec la moyenne. *dddd*, cavités formées par une lame qui déborde.

Fig. 4. *aa*, branche montante de la mâchoire inférieure. *b*, cartilage qui sépare les deux pièces.

Fig. 5. Espèce de parquet que forment ensemble les dents du *raya lævis*.

Fig. 6. Cette figure représente le dessous d'un poisson cartilagineux; elle est seulement destinée à donner une idée de la position & non de la figure des muscles. *ee*, *ff*, *g*, font l'enceinte de la partie antérieure du poisson. *h*, désigne la place de la bouche. *aa*, désigne celle des muscles qui vont du sternum à la mâchoire inférieure, ou à la langue. *bib*, place du sternum. *bg*, *bg*, muscles longs & minces qui vont au bec en se rapprochant. *cc*, place des muscles pectoraux.

Fig. 7. *cd*, *cd*, angles que font ensemble les fibres des muscles latéraux.

Fig. 8. *abc*, ligne qui désigne la situation des muscles des ouïes dans leurs angles.

Fig. 9. Cette figure à peu-près semblable à la sixième représente

le dessus du poisson. *a d, a d,* muscles qui sont ongs & étroits, & qui répondent à ceux qui sont placés inferieurement. *b c, b c,* désignent la place des deux plans musculaires latéraux que l'œil divise.

Fig. 10. Cerveau. *c c,* première paire. *a,* portion antérieure. *d,* portion postérieure. *b,* étranglement par le moyen duquel l'une communique avec l'autre. *e e,* nerfs optiques. *f f,* petits lobes du cervelet.

Fig. 11. Cellules qui divisent les narines intérieurement.

PLANCHE II.

Fig. 1. *a,* cœur & oreillette du *raia lævis.* *b,* cœur. *a,* l'oreillette. *c,* muscle blanc dont l'artère est fortifiée dans son origine. *d,* bord inférieur & festonné.

Fig. 2. Cœur du *raia asperrima.* *d,* muscle blanc.

Fig. 3. Cœur du *squatina.*

Fig. 4. Oreillette cordiforme dessinée seule & non excessivement gonflée. *a, b,* trou de communication avec le cœur. *c,* sinus plat & alongé derrière le diaphragme.

Fig. 5. Estomac & boyau du *raia clavata.* *k,* cul-de-sac de l'estomac. *l,* pilore. *r, s, t,* boyaux. *v,* petit appendice creux en forme de verge. *x x,* reins.

Fig. 6. *a a,* deux organes qui se trouvent chez les femelles, & qui ressemblent beaucoup à un testicule. *c, c,* division de ces organes en deux segmens. *x, x,* les reins.

Fig. 7. Coupe de l'intestin du *galeus canis.*

Fig. 8. Celle-ci désigne le nombre des couches qui composent les muscles latéraux dans les *galei.*

Fig. 9. Partie sexuelle nommée *testa* par Ruysch & par Rondelet, dont l'extrémité s'ouvre par l'écartement des parois qu'un gluten réunit.

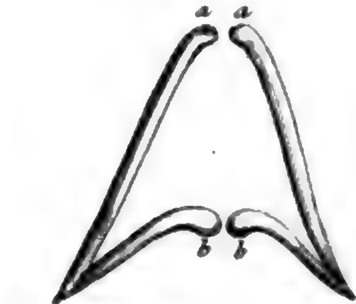
Fig. 10. Conduit déférent du *galeus canis.*

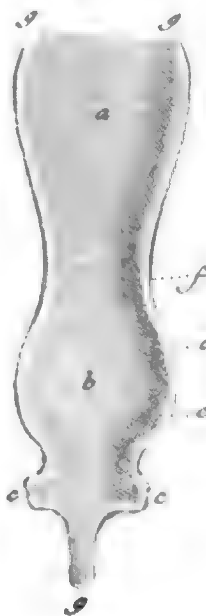
Fig. 11. Foie, estomac & boyau du *squatina.* *a,* foie à trois lobes. *m,* cul-de-sac de l'estomac. *b,* pancréas.

Fig. 12. Estomac du *canicula aristotelis.*

Nota. Il est facile de s'apercevoir, en parcourant ces planches, combien la partie du dessin y est défectueuse; aussi l'Auteur s'en sert moins pour rendre la Nature que pour donner une idée plus positive de la situation & des rapports des parties dont elles désignent la place ou la figure.

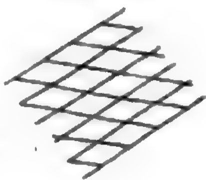


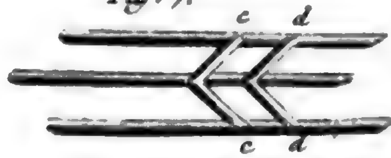


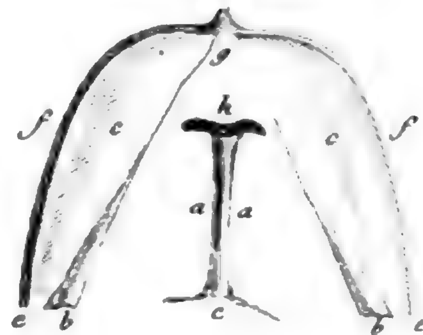






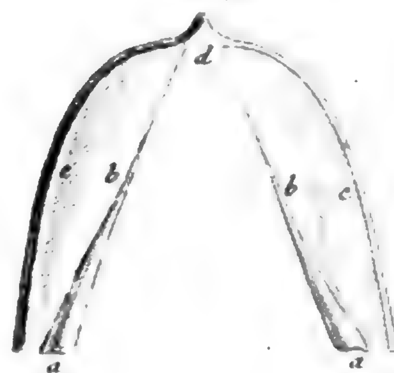


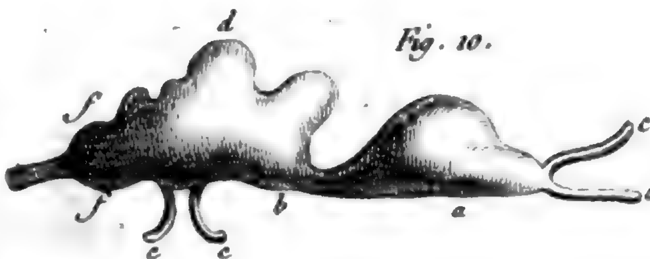




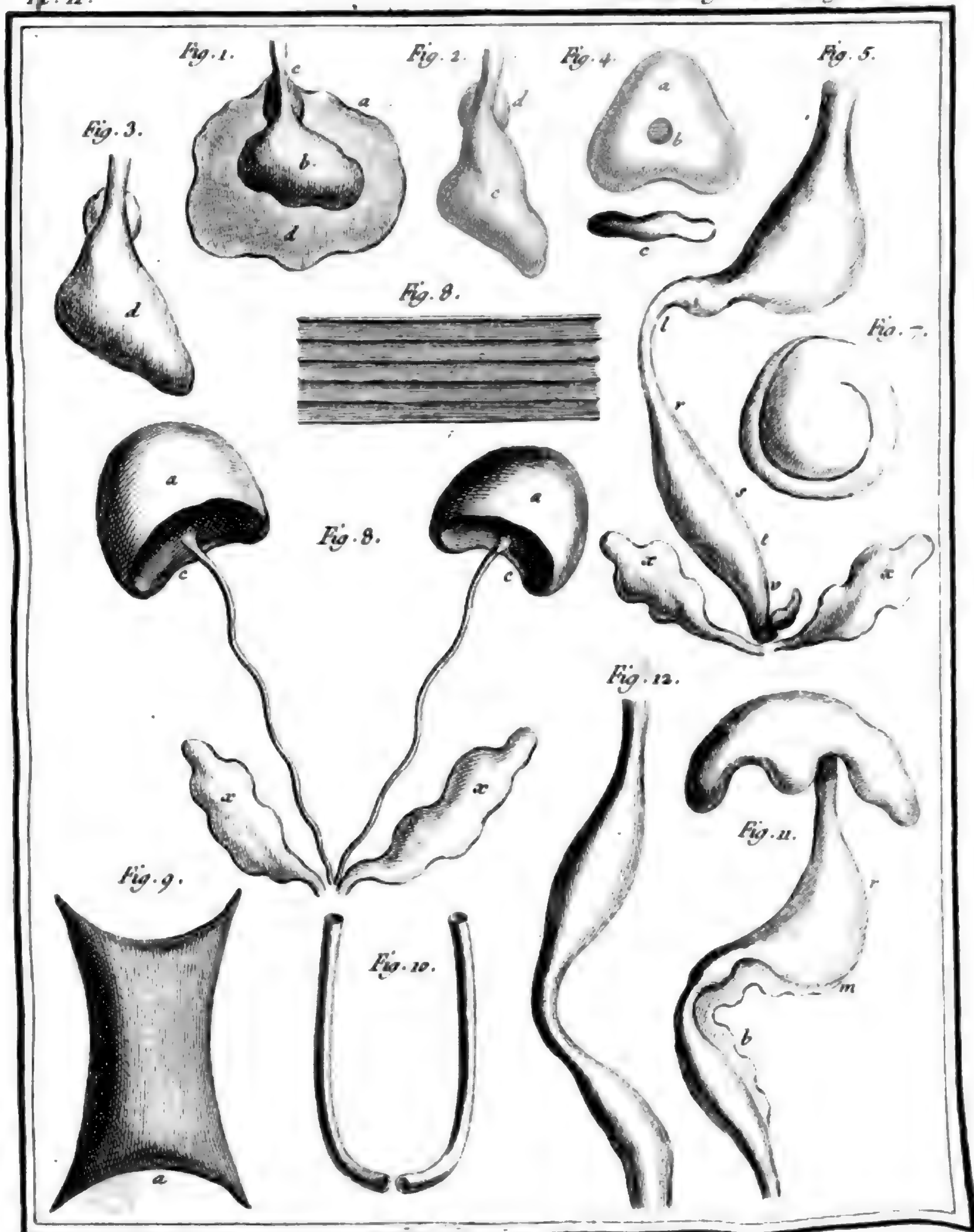








Elth Haussard Sculp.



Cl. Haussard Sculp.

RECHERCHES

1.° *sur l'intégration des Équations différentielles aux différences finies, & sur leur usage dans la théorie des hasards.*

2.° *sur le principe de la Gravitation universelle, & sur les inégalités séculaires des Planètes qui en dépendent.*

Par M. DE LA PLACE, Professeur à l'École Royale Militaire.

I.

LES premières recherches que l'on a faites sur la sommation des progressions arithmétiques & sur les progressions géométriques, renfermoient le germe du Calcul intégral aux différences finies à une & deux variables; voici comment: une progression arithmétique est une suite de termes qui croissent également, & il falloit en trouver la somme d'après cette condition; il est visible que chaque terme de la suite est la différence finie de la somme des termes précédens, à cette même somme augmentée de ce terme; on se proposoit donc de trouver cette somme d'après la nature de sa différence finie; ainsi de quelque manière qu'on y soit parvenu, on a véritablement intégré une quantité aux différences finies. Les Géomètres qui sont venus ensuite ont poussé plus loin ces recherches; ils ont déterminé la somme des carrés & des puissances supérieures & entières des nombres naturels; ils y sont parvenus d'abord par des méthodes indirectes: ils ne s'apercevoient pas que ce qu'ils cherchoient revenoit à trouver une quantité dont la différence finie étoit connue; mais si-tôt qu'ils ont eu fait cette réflexion, ils ont résolu directement, non-seulement les cas déjà connus, mais beaucoup d'autres plus étendus. En général, $\varphi(x)$, représentant une fonction quelconque de la variable x, dont la différence finie est supposée constante, ils se sont proposé de trouver une quantité dont la différence finie soit égale à cette fonction,

Lû à l'Acad. le 10 Févr. 1773.

& c'eſt l'objet du Calcul intégral aux différences finies à une ſeule variable.

Pareillement, la recherche du terme général d'une progreſſion géometrique, revient à trouver le x.ième terme d'une ſuite telle que chaque terme ſoit à celui qui le précède, en raiſon conſtante. Soit y_{x-1}, le $(x-1)$.ième terme, & y_x le x.ième terme, la loi de la ſuite exige que l'on ait $y_x = p \cdot y_{x-1}$, quel que ſoit x, p étant conſtant. Or il eſt clair que de quelque manière que l'on ſoit parvenu à trouver y_x, on a véritablement intégré l'équation aux différences finies $y_x = p \cdot y_{x-1}$. Enſuite, on a généraliſé cette recherche en ſe propoſant de trouver le terme général des ſuites telles que chacun de leurs termes ſoit égal à pluſieurs des précédens multipliés par des conſtantes quelconques; ces ſuites ont été nommées pour cela *récurrentes.* On eſt parvenu d'abord à trouver leur terme général par des voies indirectes, quoique fort ingénieuſes, on ne s'apercevoit pas que cela revenoit à intégrer une équation linéaire aux différences finies; mais lorſqu'on eut fait cette réflexion, on eſſaya d'appliquer à ces équations les méthodes connues pour les équations linéaires aux différences infiniment petites, avec les modifications qu'exige la ſuppoſition des différences finies, & l'on réſolut de cette manière des cas beaucoup plus étendus que ceux qui l'étoient déjà.

M. Moivre eſt, je crois, le premier qui ait déterminé le terme général des ſuites récurrentes; mais M. de la Grange eſt le premier qui ſe ſoit aperçu que cette recherche dépend de l'intégration d'une équation linéaire aux différences finies, & qui y ait appliqué la belle méthode des coëfficiens indéterminés de M. d'Alembert *(voyez le I.er vol. des Mémoires de Turin).* Je me ſuis propoſé enſuite d'approfondir ce calcul intéreſſant, dans un Mémoire imprimé dans le *IV.e Tome* de ceux de Turin; & depuis, ayant eu occaſion d'y réfléchir davantage, j'ai fait ſur cela de nouvelles recherches dont je rendrai bientôt compte. Je dois obſerver ici que M. le Marquis de Condorcet a donné d'excellentes choſes ſur cette

matière, dans son Traité du Calcul intégral, & dans les Mémoires de l'Académie.

Il n'étoit question jusqu'alors que des équations aux différences ordinaires, & des suites qui en dépendent; mais la solution de plusieurs problèmes sur les hasards, m'a conduit à une nouvelle espèce de suites que jai nommées *récurro-récurrentes*, & dont je crois avoir donné le premier la théorie, & indiqué l'usage dans la science des probabilités *(voyez le tome VI des Savans étrangers.)* Les équations dont ces suites dépendent, sont à peu-près dans les différences finies, ce que les équations aux différences partielles sont dans les différences infiniment petites; ce que j'ai donné sur ces équations n'est qu'un essai : en les approfondissant j'ai vu qu'elles étoient fort importantes dans la théorie des chances, & qu'elles donnoient une méthode de les traiter beaucoup plus généralement qu'on ne l'a fait encore: c'est ce qui m'engage à les considérer de nouveau; mais les nouvelles recherches que j'ai faites sur cet objet, supposant celles que j'ai déja données; je vais reprendre ici toute cette matière.

II.

On peut concevoir ainsi les équations aux différences finies; j'imagine la suite

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5 \ldots\ldots\ldots y_x,\ \&c.$$

formée suivant une loi telle que l'on ait constamment

$$X_x = M_x . y_x + N_x . \Delta . y_x + P_x . \Delta^2 . y_x \ldots + S_x . \Delta^n . y_x (A)$$

les nombres 1, 2, 3... x, placés au bas des y, indiquent le rang qu'occupe l'y dans la suite, ou, ce qui revient au même, l'indice de la série, les quantités X_x, M_x, N_x, &c. sont des fonctions quelconques de la variable x, dont la différence est supposée constante & égale à l'unité. La caractéristique Δ sert à exprimer la différence finie de la quantité devant laquelle elle est placée, comme dans l'analyse infinitésimale la lettre d exprime la différence infiniment petite des quantités. Cela posé, l'équation précédente est une équation aux

différences finies, qui peut généralement repréfenter les équations de ce genre, ou la variable y_x, & fes différences font fous une forme linéaire.

Quoique j'aie fuppofé la différence conftante de x, égale à l'unité, cela ne diminue en rien la généralité de l'équation précédente *(A)*; car fi cette différence au lieu d'être 1, eft égale à q, on fera $\frac{x}{q} = x'$, & y_x étant fonct. (x), deviendra fonct. (qx'); je nomme $y_{x'}$ cette dernière fonction. Or, on a par hypothèfe, $\Delta . y_x = y_{x+q} - y_x =$ fonct. $(x + q)$ $-$ fonct. $(x) =$ fonct. $[q(x' + 1)]$ $-$ fonct. (qx') $= y_{x'+1} - y_{x'} = \Delta . y_{x'}$ la différence conftante de x', étant 1. Pareillement,

$$\Delta^2 . y_x = y_{x+2q} - 2 . y_{x+q} + y_x = y_{x'+2} - 2 . y_{x'+1} + y_{x'} = \Delta^2 . y_{x'}$$

& ainfi du refte. L'équation *(A)* fera donc transformée dans la fuivante.

$$X_{x'} = M_{x'} y_{x'} + N_{x'} \Delta . y_{x'} + \text{\&c.} \ldots + S_{x'} . \Delta^n . y_{x'}$$

dans laquelle la différence de x' eft égale à l'unité.

On peut former aifément d'autres équations différentielles, dans lefquelles y_x & fes différences entreroient d'une manière quelconque; mais celles qui font comprifes dans l'équation *(A)*, font les feules qu'il foit véritablement intéreffant de confidérer.

Avant que de chercher à les intégrer, je vais rappeler ici un principe fort utile dans l'analyfe des différences infiniment petites, & qui s'applique également & avec le même avantage aux différences finies; voici en quoi il confifte.

Toute fonction de x *qui, renfermant* n *conftantes arbitraires irréductibles, fatisfait pour* y_x *dans une équation différentielle de l'ordre* n, *entre* x *&* y_x, *eft l'expreffion complète de* y_x.

Par *conftantes irréductibles*, j'entends qu'elles font telles que deux ou plufieurs ne peuvent fe réduire à une feule; il fuit de-là que fi une fonction renfermant n conftantes arbitraires irréductibles, fatisfait pour y_x dans une équation différentielle

différentielle de l'ordre $n - 1$, cette équation est sûrement identique; car si elle ne l'étoit pas, la fonction la plus générale de x qui pût y satisfaire pour y_x, ne renfermeroit que $n - 1$ constantes arbitraires irréductibles.

Pour la commodité du calcul, je supposerai que les quantités notées de cette manière, ${}^1H, {}^2H, {}^3H$, ou ${}^1M, {}^2M$, &c. expriment des quantités différentes, & qui peuvent n'avoir aucun rapport entre elles; mais celles-ci $H_1, H_2, H_3 \ldots H_x$, ou M_1, M_2, M_x, &c. représentent les différens termes d'une suite formée suivant une loi quelconque, les nombres 1, 2, 3 . . . . x désignant le rang des H ou des M dans la suite. Cela posé, puisque l'on a

$$\Delta . y_x = y_{x+1} - y_x$$

$$\Delta^2 . y_x = y_{x+2} - 2 . y_{x+1} + y_x$$

$$\Delta^3 . y_x = y_{x+3} - 3 . y_{x+2} + 3 . y_{x+1} - y_x \text{ \&c.}$$

je puis donner à l'équation *(A)* cette forme.

$$\begin{aligned} X_x = {} & y_x . [M_x - N_x + P_x - \&c.] \\ & + y_{x+1} [N_x - 2 P_x \pm \&c.] \\ & + \&c. \\ & + y_{x+n} . S_x \end{aligned}$$

d'où il résulte que toute équation linéaire aux différences finies, peut être généralement représentée par celle-ci.

$$y_x = H_x . y_{x-1} + {}^1H_x . y_{x-2} + {}^2H_x . y_{x-3} \ldots + {}^{n-1}H_x . y_{x+n} + X_x \; (B),$$

l'équation $y_x = H_x . y_{x-1} + X_x$, est du premier ordre, celle-ci $y_x = H_x . y_{x-1} + {}^1H_x . y_{x-2} + X_x$, est du second ordre, & ainsi de suite.

Comme dans la suite j'aurai besoin de caractéristiques pour désigner la différence finie des quantités, leurs intégrales finies, le produit de tous les termes d'une suite, je me servirai pour cela des suivantes.

La caractéristique Δ placée devant une quantité, en dé-

ſignera, comme ci-deſſus, la différence finie. Ainſi, $\Delta . H_x$, exprimera la différence finie de H_x; la caractériſtique Σ placée devant une quantité, en déſignera l'intégrale finie; ainſi, $\Sigma . H_x$ ſignifiera l'intégrale finie de H_x: enfin la caractériſtique ∇ déſignera le produit de tous les termes d'une ſuite; ainſi, $\nabla . H_x$ repréſentera le produit $H_1 . H_2 . H_3 \ldots . H_x$ de tous les termes de la ſuite $H_1, H_2, H_3 \ldots . H_x$.

III.

PROBLEME I.

L'équation différentielle du premier ordre $y_x = H_x . y_{x-1} + X_x$ étant donnée, on propoſe de l'intégrer.

Je fais dans cette équation $y_x = u_x . \nabla . H_x$; elle devient

$$u_x . \nabla . H_x = H_x . u_{x-1} . \nabla . H_{x-1} + X_x;$$

mais on a $H_x . \nabla . H_{x-1} = \nabla H_x$. partant $u_x = u_{x-1} + \frac{X_x}{\nabla . H_x}$, ou $\Delta . u_{x-1} = \frac{X_x}{\nabla . H_x}$; & comme cette équation a lieu quel que ſoit x, on aura $\Delta . u_x = \frac{X_{x+1}}{\nabla . H_{x+1}}$; partant en intégrant $u_x = A + \Sigma . \frac{X_{x+1}}{\nabla . H_{x+1}}$; A étant une conſtante arbitraire. On a donc

$$y_x = \nabla . H_x . [A + \Sigma . \frac{X_{x+1}}{\nabla . H_{x+1}}];$$

ſi H_x étoit conſtant & égal à p, on auroit

$$\nabla . H_x = p^x, \text{ \& } y_x = p^x [A + \Sigma \frac{X_{x+1}}{p^{x+1}}].$$

IV.

PROBLEME II.

L'équation différentio-différentielle

$$y_x = H_x . y_{x-1} + {}^1H_x . y_{x-2} + {}^2H_x y_{x-3} \ldots + {}^{n-1} H_x . y_{x-n} + X_x \; (B)$$

étant donnée, on propoſe de l'intégrer.

Je fais $y_x = \alpha_x . y_{x-1} + T_x$ (C), α_x & T_x étant deux nouvelles variables, & j'en conclus les équations ſuivantes.

$$y_{x-1} = a_{x-1} \cdot y_{x-2} + T_{x-1}$$
$$y_{x-2} = a_{x-2} \cdot y_{x-3} + T_{x-2}$$
$$y_{x-3} = a_{x-3} \cdot y_{x-4} + T_{x-3}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_{x-n+1} = a_{x-n+1}\, y_{x-n} + T_{x-n+1}$$

je multiplie la première de ces équations par $-{}^{1}\mathfrak{C}$, la seconde par $-{}^{2}\mathfrak{C}$, la troisième par $-{}^{3}\mathfrak{C}$, &c. & je les ajoute avec l'équation *(C)*; ce qui me donne

$$y_x = [a_x + {}^{1}\mathfrak{C}] \cdot y_{x-1} + [-{}^{1}\mathfrak{C} \cdot a_{x-1} + {}^{2}\mathfrak{C}] y_{x-2}$$
$$+ [-{}^{2}\mathfrak{C} \cdot a_{x-2} + {}^{3}\mathfrak{C}] \cdot y_{x-3} + \text{\&c.}$$
$$-{}^{n-1}\mathfrak{C} \cdot a_{x+1-n} \cdot y_{x-n}$$
$$+ T_x - {}^{1}\mathfrak{C}\, T_{x-1} - {}^{2}\mathfrak{C} \cdot T_{x-2} \dots\dots - {}^{n-1}\mathfrak{C} \cdot T_{x-n+1}$$

en comparant cette équation avec l'équation *(B)*, on aura

1.° $T_x = {}^{1}\mathfrak{C} . T_{x-1} + {}^{2}\mathfrak{C} . T_{x-2} \dots + {}^{n-1}\mathfrak{C} \cdot T_{x-n+1} + X_x$

2.° les équations suivantes.

$${}^{1}\mathfrak{C} + a_x = H_x$$
$${}^{2}\mathfrak{C} - {}^{1}\mathfrak{C} \cdot a_{x-1} = {}^{1}H_x$$
$${}^{3}\mathfrak{C} - {}^{2}\mathfrak{C} \cdot a_{x-2} = {}^{2}H_x$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$-{}^{n-1}\mathfrak{C} \cdot a_{x-n+1} = {}^{n-1}H_x.$$

De-là on conclura

$${}^{1}\mathfrak{C} = H_x - a_x$$
$${}^{2}\mathfrak{C} = {}^{1}H_x + a_{x-1} . H_x - a_x . a_{x-1}$$
$${}^{3}\mathfrak{C} = {}^{2}H_x + a_{x-2} . {}^{1}H_x + a_{x-1} . a_{x-2} . H_x - a_x . a_{x-1} . a_{x-2},$$

&c.

$${}^{n-1}\mathfrak{C} = \left.\begin{matrix} {}^{n-2}H_x + a_{x-n+2} . {}^{n-3}H_x + a_{x-n+3} . a_{x-n+2} \\ . {}^{n-4}H_x + \text{\&c.} - a_x . a_{x-1} \dots a_{x-n+2} \end{matrix}\right\} = -\frac{{}^{n-1}H_x}{a_{x-n+1}},$$

à cause de l'équation $-{}^{n-1}\mathfrak{C} \cdot a_{x-n+1} = {}^{n-1}H_x$; on aura donc pour résoudre le Problème, les deux équations suivantes,

$$T_x = (H_x - \alpha_x) . T_{x-1} + [{}'H_x + \alpha_{x-1} H_x - \alpha_x . \alpha_{x-1}] . T_{x-2} + \&c. - \frac{{}^{n-1}H_x}{\alpha_{x-n+1}} . T_{x-n+1} + X_x \quad (D).$$

$$0 = 1 - \frac{H_x}{\alpha_x} - \frac{{}'H_x}{\alpha_x . \alpha_{x-1}} - \frac{{}^2H_x}{\alpha_x . \alpha_{x-1} . \alpha_{x-2}} - \&c.... - \frac{{}^{n-1}H_x}{\alpha_x . \alpha_{x-n+1}} \quad (E).$$

Les équations *(D)* & *(E)* ſont d'un degré inférieur à la propoſée, & l'équation *(D)* eſt de la même forme; or il n'eſt pas néceſſaire d'intégrer généralement ces équations, pour intégrer l'équation *(B)* du Problème; il ſuffit de connoître une quantité qui ſatisfaſſe pour α_x. Dans l'équation *(E)*, je nomme δ_x cette valeur; on la ſubſtituera dans l'équation *(D)*, que je nomme *(D')* après cette ſubſtitution, on cherchera l'intégrale complète de l'équation *(D')*; enſuite au moyen de l'équation $y_x = \delta_x . y_{x-1} + T_x$; on conclura en intégrant par le Problème I.er

$$y_x = \nabla . \delta_x [A + \Sigma . \frac{T_{x+1}}{\nabla . \delta_{x+1}}],$$

A étant une conſtante arbitraire.

Cette équation eſt l'intégrale complète de l'équation *(B)*, car l'équation *(D')* étant néceſſairement de l'ordre $n - 1$, l'expreſſion complète de T_x, renferme $n - 1$, conſtantes arbitraires irréductibles: partant, $\nabla . \delta_x [A + \Sigma . \frac{T_{x+1}}{\nabla . \delta_{x+1}}]$, renferme n, conſtantes arbitraires. Ces conſtantes ſont de plus irréductibles, car, $\nabla \delta_x . \Sigma . \frac{T_{x+1}}{\nabla . \delta_{x+1}}$ en renferme $n - 1$ d'irréductibles, & aucune d'elles n'eſt réductible avec la conſtante A.

L'expreſſion précédente de y_x peut ſervir à faire connoître l'intégrale de l'équation *(B)* du Problème; car puiſque l'équation *(D')* eſt linéaire, on peut ſuppoſer que l'expreſſion de T_x a cette forme

$$T_x = \nabla . \lambda_x . [{}'A + \Sigma . \frac{{}'T_{x+1}}{\nabla . \lambda_{x+1}}],$$

$'T_x$, dépendant de l'intégration d'une équation linéaire de l'ordre $n - 2$; on a donc

$$y_x = \nabla . \delta_x [A + 'A . \Sigma . \frac{\nabla . \lambda_{x+1}}{\nabla . \delta_{x+1}} + \Sigma . \frac{(\Sigma . \frac{'T_{x+1}}{\nabla . \lambda_{x+1}})}{\nabla . \delta_{x+1}}],$$

en continuant de raisonner ainsi, on verra que l'expression de y_x est de cette forme

$$y_x = A . \nabla . \delta_x + 'A . \nabla . '\delta_x + {}^2A . \nabla . {}^2\delta_x .... + {}^{n-1}A . \nabla . {}^{n-1}\delta_x + L_x;$$

$A, 'A, {}^2A$, &c. étant arbitraires.

Si l'on suppose $X_x = 0$, dans l'équation *(B)*, il est aisé de voir par la suite des opérations que je viens d'indiquer, que L_x sera nul; ainsi dans ce cas

$$y_x = A . \nabla . \delta_x + 'A . \nabla . '\delta_x . . . + {}^{n-1}A . \nabla . {}^{n-1}\delta_x,$$

δ_x satisfait par la supposition pour α_x, dans l'équation *(E)*; $'\delta_x, {}^2\delta_x$, &c. y satisferont pareillement; car puisque l'équation $y_x = \nabla . '\delta_x$, par exemple satisfait à l'équation *(B)* en y supposant $X_x = 0$, on aura

$$\nabla . '\delta_x = H_x . \nabla . '\delta_{x-1} + 'H . \nabla_x . '\delta_{x-2} + \&c.$$

partant

$$0 = 1 - \frac{H_x}{'\delta_x} - \frac{'H_x}{'\delta_x . '\delta_{x-1}} - \&c.$$

V.

Je suppose dans les équations *(D')* & *(B)*, $X_x = 0$, j'aurai les deux expressions suivantes de y_x,

$$y_x = \nabla . \delta_x . [A + \Sigma . \frac{T_{x+1}}{\nabla . \delta_{x+1}}] \quad (1)$$

$$y_x = A . \nabla . \delta_x + 'A . \nabla . '\delta_x + {}^2A . \nabla . {}^2\delta_x .... + {}^{n-1}A . \nabla . {}^{n-1}\delta_x \quad (2)$$

Ces deux expressions différentes en apparence, doivent réellement coïncider; je suppose donc que l'intégrale complète de l'équation *(D')* soit

$$T_x = 'A . R_x + {}^2A . 'R_x . . . . + {}^{n-1}A . {}^{n-2}R_x,$$

en ſubſtituant cette valeur de T_x dans l'équation (1), on aura

$$y_x = \nabla . \delta_x . \begin{cases} A \\ + \; {}^{1}A . \Sigma \left[\frac{R_{x+1}}{\nabla . \delta_{x+1}} \right]. \\ + \; {}^{2}A . \Sigma \left[\frac{{}^{1}R_{x+1}}{\nabla . \delta_{x+1}} \right]. \\ + \; \&c. \\ + \; {}^{n-1}A . \Sigma \left[\frac{{}^{n-2}R_{x+1}}{\nabla . \delta_{x+1}} \right]. \end{cases}$$

En comparant cette dernière équation avec l'équation (2), on aura

$$\nabla . \delta_x . \Sigma . \left[\frac{R_{x+1}}{\nabla . \delta_{x+1}} \right] = \nabla . {}^{1}\delta_x,$$

$$\nabla . \delta_x . \Sigma . \left[\frac{{}^{1}R_{x+1}}{\nabla . \delta_{x+1}} \right] = \nabla . {}^{2}\delta_x,$$

&c.

Donc

$$R_x = \nabla . \delta_x . \Delta . \left[\frac{\nabla . {}^{1}\delta_{x-1}}{\nabla . \delta_{x-1}} \right],$$

$${}^{1}R_x = \nabla . \delta_x . \Delta . \left[\frac{\nabla . {}^{2}\delta_{x-1}}{\nabla . \delta_{x-1}} \right].$$

$${}^{2}R_x = \nabla . \delta_x . \Delta . \left[\frac{\nabla . {}^{3}\delta_{x-1}}{\nabla . \delta_{x-1}} \right].$$

&c.

Donc ſi je ſais réſoudre l'équation *(B)*, en y ſuppoſant $X_x = 0$, je ſaurai réſoudre l'équation *(D')*, en y ſuppoſant pareillement $X_x = 0$. Soient alors u_x, ${}^{1}u_x$, ${}^{2}u_x$, &c. les valeurs particulières de y_x, dans l'équation *(B)*, en ſorte que ſon intégrale complète ſoit

$$y_x = A . u_x + {}^{1}A . {}^{1}u_x + {}^{2}A . {}^{2}u_x \ldots + {}^{n-1}A . {}^{n-1}u_x;$$

on aura

$$u_x = \nabla . \delta_x, \quad {}^{1}u_x = \nabla . {}^{1}\delta_x, \text{ \&c.}$$

& l'intégrale complète de l'équation *(D')* en y ſuppoſant $X_x = 0$, ſera

$$T_x = {}^1A.u_x.\Delta.\left(\frac{{}^1u_{x-1}}{u_{x-1}}\right) + {}^2A.u_x.\Delta.\left(\frac{{}^2u_{x-1}}{u_{x-1}}\right).....$$
$$+ {}^{n-1}A.u_x.\Delta.\left(\frac{{}^{n-1}u_{x-1}}{u_{x-1}}\right).$$

Présentement si je fais intégrer l'équation *(D')* en y supposant X_x, quelconque, je pourrai, dans la même supposition, intégrer l'équation *(B)*, puisque l'on a, par ce qui précède, $y_x = u_x\ [A + \Sigma.\frac{T_{x+1}}{u_{x+1}}]$; donc la difficulté d'intégrer l'équation

$$y_x = H_x.y_{x-1} + {}^1H_x.y_{x-2}... + {}^{n-1}H_x.y_{x-n} + X_x. (B),$$

lorsqu'on sait intégrer celle-ci

$$y_x = H_x.y_{x-1} + {}^1H_x.y_{x-2}... + {}^{n-1}H_x.y_{x-n}.(b);$$

se réduit à intégrer l'équation

$$T_x = (H - \delta_x).T_{x-1} + \&c... - \frac{{}^{n-1}H_x}{\delta_{x-n+1}}.T_{x-n+1} + X_x\ (D')$$

qui est du degré $n - 1$, & que l'on sait intégrer en y supposant $X_x = 0$: on fera pareillement dépendre l'intégration de *(D')* de l'intégration d'une équation du degré $n - 2$, & ainsi de suite; d'où il résulte que l'équation

$$y_x = H_x.y_{x-1} + {}^1H_x.y_{x-2}.... + {}^{n-1}H_x.y_{x-n} + X_x$$

est intégrable dans les mêmes cas que celle-ci;

$$y_x = H_x.y_{x-1} + \&c...... + {}^{n-1}H_x.y_{x-n}$$

VI.



Le procédé que je viens d'indiquer pour ramener l'intégrale de l'équation *(B)* à celle de l'équation *(b)*, peut servir à démontrer la liaison qu'ont entre elles ces deux intégrales; mais il seroit fort pénible de l'employer à intégrer l'équation *(B)*. Il seroit donc très-utile d'avoir immédiatement l'expression générale de y_x dans l'équation *(B)*, lorsqu'on a celle de l'équation *(b)*.

Je reprends pour cela l'équation $y_x = u_x\ [A + \Sigma.\frac{T_{x+1}}{u_{x+1}}]$,

T_x étant ſuppoſé être l'expreſſion complète de T_x dans l'équation (D'). Or, cette équation (D') étant de la même forme que l'équation (B), ſi l'on nomme $\overset{1}{u}_x$, $'\overset{1}{u}_x$, $^2\overset{1}{u}_x$, &c. les intégrales particulières de T_x dans l'équation (D'), lorſqu'on y ſuppoſe $X_x = 0$, on aura de la même manière, & quel que ſoit X_x.

$$T_x = \overset{1}{u}_x \; [\,'A + \Sigma \frac{'T_{x+1}}{\overset{1}{u}_{x+1}}]$$

$'T_x$ étant l'expreſſion complète de $'T_x$ dans une équation de l'ordre $n - 2$, que je nomme (D''), & qui réſulte de l'équation (D') de la même manière que celle-ci réſulte de l'équation (B), on aura ſemblablement

$$'T_x = \overset{2}{u}_x \,.\, [\,^2A + \Sigma.\frac{^2T_{x+1}}{\overset{2}{u}_{x+1}}];$$

& ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'on parvienne à l'équation du premier ordre.

$$^{n-2}T_x = S_x \,.\, ^{n-1}T_{x-1} + X_x$$

dont l'intégrale eſt $^{n-2}T_x = \overset{n-1}{u}_x \; [\,^{n-1}A + \Sigma.\frac{X_{x+1}}{\overset{n-1}{u}_{x+1}}]$

Si l'on ſubſtitue préſentement dans l'expreſſion de y_x la valeur de T_x en $'T_x$, celle de $'T_x$ en ^2T_x, &c. on aura

$$y_x = u_x \,[A + \Sigma\,[\frac{\overset{1}{u}_{x+1}}{u_{x+1}}.[\,'A + \Sigma.[\frac{\overset{2}{u}_{x+2}}{\overset{1}{u}_{x+2}}.[\,^2A \ldots,$$

$$+ \Sigma\,[\frac{\overset{n-1}{u}_{x+n-2}}{\overset{n-2}{u}_{x+n-1}}.[\,^{n-1}A + \Sigma\,(\frac{X_{x+n}}{\overset{n-1}{u}_{x+n}})]](K).$$

Il faut préſentement déterminer $\overset{1}{u}_x$, $\overset{2}{u}_x$, &c. or, on a par l'article précédent

$$\overset{1}{u}_x = R_x = u_x.\Delta.(\frac{^1u_{x-1}}{u_{x-1}}) \text{ pareillement } {}'\overset{1}{u}_x = u_x.\Delta.(\frac{^2u_{x-1}}{u_{x-1}})$$

$$^2\overset{1}{u}_x = u_x.\Delta.(\frac{^3u_{x-1}}{u_{x-1}})$$

&c.

on

on aura de même $\overset{2}{u}_x = \overset{1}{u}_x \cdot \Delta \cdot \left(\frac{{}^{1}\overset{1}{u}_{x-1}}{\overset{1}{u}_{x-1}}\right)$

$${}^{1}\overset{2}{u}_x = \overset{1}{u}_x \cdot \Delta \cdot \left(\frac{{}^{2}\overset{1}{u}_{x-1}}{\overset{1}{u}_{x-1}}\right)$$

$${}^{2}\overset{2}{u}_x = \overset{1}{u}_x \cdot \Delta \cdot \left(\frac{{}^{3}\overset{1}{u}_{x-1}}{\overset{1}{u}_{x-1}}\right)$$

&c.

la formule *(K)* deviendra

$$y_x = u_x \cdot [A + \Sigma \cdot [\Delta\left(\frac{{}^{1}u_x}{u_x}\right) \cdot [{}^{1}A + \Sigma[\Delta\left(\frac{{}^{1}\overset{1}{u}_{x+1}}{\overset{1}{u}_{x+1}}\right) \cdot [{}^{2}A \ldots$$

$$+ \Sigma[\Delta\left(\frac{{}^{1}\overset{n-2}{u}_{x+n-2}}{\overset{n-2}{u}_{x+n-2}}\right) \cdot \left({}^{n-1}A + \Sigma \cdot \frac{X_{x+n}}{\overset{n-1}{u}_{x+n}}\right)]] \; (O);$$

si l'on ne connoissoit que le nombre $n - 1$ d'intégrales particulières de y_x, dans l'équation

$$y_x = H_x \cdot y_{x-1} + {}^{1}H_x \cdot y_{x-2} \ldots + {}^{n-1}H_x \cdot y_{x-n},$$

l'intégration n'auroit pas plus de difficulté; je suppose que ce soit l'intégrale ${}^{n-1}u_x$, qui soit inconnue; puisque l'on connoît u_x, ${}^{1}u_x \ldots {}^{n-2}u_x$; on connoîtra $\overset{1}{u}_x$, $\overset{2}{u}_x$, &c. jusques à $\overset{n-1}{u}_x$ exclusivement. Pour déterminer $\overset{n-1}{u}_x$, il faut intégrer l'équation ${}^{n-2}T_x = S_x \cdot {}^{n-2}T_{x-1} + X_x$, en supposant $X_x = 0$; ce qui seroit facile par le Problème Ier si l'on connoissoit S_x. Pour le trouver, j'observe que dans l'équation *(D')*, le coëfficient de T_{x-1}, est $H_x - \delta_x = H_x - \frac{u_x}{u_{x-1}}$, à cause de $\delta_x = \frac{u_x}{u_{x-1}}$. Pareillement celui de ${}^{1}T_{x-1}$, dans l'équation *(D'')*, est $H_x - \frac{u_x}{u_{x-1}} - \frac{\overset{1}{u}_x}{\overset{1}{u}_{x-1}}$, & ainsi de suite; partant

$$S_x = H_x - \frac{u_x}{u_{x-1}} - \frac{\overset{1}{u}_x}{\underset{1}{u}_{x-1}} \cdots - \frac{\overset{n-2}{u}_x}{\underset{n-2}{u}_{x-1}};$$

si au lieu de connoître l'intégrale de l'équation

$$y_x = H_x \cdot y_{x-1} \cdots\cdots + {}^{n-1}H_x \cdot y_{x-n},$$

on connoissoit un nombre n ou $n - 1$ de valeurs pour α_x, dans l'équation *(E)* les formules précédentes serviroient également, car, δ_x, ${}'\delta_x$ &c. étant ces valeurs, on a

$$u_x = \nabla \cdot \delta_x, \quad {}'u_x = \nabla \cdot {}'\delta_x, \text{ \&c.}$$

VII.

La formule *(O)* n'a point encore tout le degré de simplicité que peut avoir l'intégrale complète de y_x; car on a vu *(art. IV)* que cette intégrale a la forme suivante

$$y_x = A \cdot u_x + {}'A \cdot {}'u_x + \text{\&c.} \ldots + {}^{n-1}A \cdot {}^{n-1}u_x + L_x$$

il faut donc ramener l'équation *(O)* à cette forme: pour cela je divise l'equation *(O)* par u_x, & j'en conclus en la différentiant,

$$\Delta\left[\frac{y_{x-1}}{u_{x-1}}\right] = \Delta\left(\frac{{}'u_{x-1}}{u_{x-1}}\right) \cdot \left[{}'A + \Sigma\left[\Delta\left(\frac{\overset{1}{{}'u}_x}{\underset{1}{u}_x}\right)\left[{}^2A \ldots\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+ \Sigma\left[\Delta\left(\frac{\overset{n-2}{{}'u}_{x+n-3}}{\underset{n-2}{u}_{x+n-3}}\right)\left[{}^{n-1}A + \Sigma . \frac{X_{x+n-1}}{\underset{n-1}{u}_{x+n-1}}\right)\right]\right]$$

d'où l'on conclura, en divisant par $\Delta\left(\frac{{}'u_{x-1}}{u_{x-1}}\right)$ & différentiant

$$\Delta \left\{ \frac{\Delta\left(\frac{y_{x-1}}{u_{x-2}}\right)}{\Delta\left(\frac{{}'u_{x-2}}{u_{x-2}}\right)} \right\} \quad \Delta\left(\frac{\overset{1}{{}'u}_{x-1}}{\underset{1}{u}_{x-1}}\right) \cdot \left[{}^2A + \text{\&c.}\right.$$

on aura donc en continuant de différentier ainsi, une équation de cette forme.

$${}^{n-1}A + \Sigma . \frac{X_{x-1}}{\underset{n-1}{u}_{x-1}} = \gamma_x y_x + {}'\gamma_x y_{x-1} + {}^2\gamma_x y_{x-2} \ldots + {}^{n-1}\gamma_x y_{x-n+1},$$

γ_x, ${}'\gamma_x$, &c. étant des fonctions de u_x, ${}'u_x$ &c. & de

leurs différences finies. J'observe maintenant que pour former les valeurs de $\overset{1}{u}_x$, $\overset{2}{u}_x$, $\overset{3}{u}_x$, &c. j'ai considéré *(article précedent)* les quantités u_x, ${}^1u_x$, ${}^2u_x$, &c. dans cet ordre

$$u_x,\ {}^1u_x,\ {}^3u_x \ldots\ldots\ldots {}^{n-1}u_x;$$

mais si au lieu de cela, je les eusse considéré dans l'ordre suivant

$${}^1u_x,\ u_x,\ {}^2u_x \ldots\ldots\ldots {}^{n-1}u_x,$$

je serois parvenu à l'équation suivante.

$${}^{n-1}A + \Sigma . \frac{X_{x+1}}{\left(\overset{n-1}{u}_{x+1}\right)} = (\gamma_x) . y_x + ({}^1\gamma_x) . y_{x-1} \ldots + ({}^{n-1}\gamma_x) . y_{x-n+1}$$

$\left(\overset{n-1}{u}_x\right)$, (γ_x) &c. étant ce que deviennent $\overset{n-1}{u}_x$, γ_x, &c. lorsqu'on y change u_x en ${}^1u_x$, & ${}^1u_x$ en u_x. Si j'avois supposé $X_{x+1} = 0$, je serois parvenu aux deux équations

$${}^{n-1}A = \gamma_x . y_x + {}^1\gamma_x . y_{x-1} \ldots\ldots + {}^{n-1}\gamma_x . y_{x-n+1}$$

$${}^{n-1}A = (\gamma_x) . y_x + ({}^1\gamma_x) . y_{x-1} \ldots\ldots + ({}^{n-1}\gamma_x) . y_{x-n+1}$$

dans lesquelles la constante ${}^{n-1}A$ est visiblement la même, puisque j'ai supposé pour former l'une & l'autre équation, que la valeur complète de y_x est

$$y_x = A . u_x + {}^1A . {}^1u_x \ldots\ldots\ldots + {}^{n-1}A . {}^{n-1}u_x.$$

On aura donc, en comparant ces deux équations

$$\gamma_x . y_x + {}^1\gamma_x . y_{x-1} \ldots\ldots\ldots + {}^{n-1}\gamma_x . y_{x-n+1}$$
$$= (\gamma_x) . y_x + ({}^1\gamma_x) . y_{x-1} \ldots + ({}^{n-1}\gamma_x) . y_{x-n+1},$$

équation qui doit être identique; car si elle ne l'étoit pas, cette équation étant différentielle de l'ordre $n - 1$, auroit cependant pour intégrale complète

$$y_x = A . u_x \ldots\ldots\ldots + {}^{n-1}A . {}^{n-1}u_x,$$

équation qui renferme n, constantes arbitraires, ce qui seroit absurde *(art. II)*.

On a donc

$$^{n-1}A + \Sigma . \frac{X_{x+1}}{(\overset{n-1}{u}_{x+1})} = {}^{n-1}A + \Sigma . \frac{X_{x+1}}{\overset{n-1}{u}_{x+1}};$$

partant $(\overset{n-1}{u}_{x+1}) = \overset{n-1}{u}_{x+1}$. Ainsi l'expression de $\overset{n-1}{u}_x$ reste toujours la même, soit qu'on y change u_x en ${}^1u_x$, & ${}^1u_x$ en u_x; on s'assurera de la même manière que si dans $\overset{n-1}{u}_x$ on change u_x en ${}^2u_x$, & ${}^2u_x$ en u_x; ou ${}^1u_x$ en ${}^2u_x$, & ${}^2u_x$ en ${}^1u_x$, & généralement, ${}^ku_x$ en ${}^iu_x$, & ${}^iu_x$ en ${}^ku_x$, k & i étant moindres que $n - 1$, l'expression $\overset{n-1}{u}_x$ restera toujours la même, & qu'ainsi, quelqu'ordre que l'on donne aux quantités u_x, ${}^1u_x$, ${}^2u_x$, &c. pour former $\overset{n-1}{u}_x$, cette expression restera toujours la même, pourvu que ${}^{n-1}u_x$ soit considérée comme la dernière de ces quantités.

Je fais $\overset{n-1}{u}_{x+1} = {}^{n-1}z_{x+1}$, ensuite, au lieu de considérer ${}^{n-1}u_x$, comme la dernière des quantités u_x, ${}^1u_x$, &c. je suppose actuellement que ${}^{n-2}u_x$, soit cette dernière; soit ${}^{n-2}z_{x+1}$, ce que devient alors ${}^{n-1}z_{x+1}$, c'est-à-dire lorsqu'on y change ${}^{n-2}u_x$ en ${}^{n-1}u_x$, & ${}^{n-1}u_x$ en ${}^{n-2}u_x$. On aura, par un procédé semblable au précédent,

$$^{n-2}A + \Sigma \cdot \frac{X_{x+1}}{^{n-2}z_{x+1}} = \underline{\gamma_x} \cdot y_x + \underline{{}^1\gamma_x} \cdot y_{x-1} \ldots + \underline{{}^{n-1}\gamma_x} \cdot y_{x-n+1};$$

$\underline{\gamma_x}$, $\underline{{}^1\gamma_x}$, &c. étant ce que deviennent γ_x, ${}^1\gamma_x$, &c. lorsqu'on y change ${}^{n-1}u_x$ en ${}^{n-2}u_x$, & ${}^{n-2}u_x$ en ${}^{n-1}u_x$; on aura pareillement

$$^{n-3}A + \Sigma . \frac{X_{x+1}}{^{n-3}z_{x+1}} = \underline{\underline{\gamma_x}} \cdot y_x + \underline{\underline{{}^1\gamma_x}} \cdot y_{x-1} \ldots + \underline{\underline{{}^{n-1}\gamma_x}} \cdot y_{x-n+1},$$

${}^{n-3}z_{x+1}$, $\underline{\underline{\gamma_x}}$, $\underline{\underline{{}^1\gamma^x}}$, étant ce que deviennent ${}^{n-1}z_{x+1}$, γ_x, ${}^1\gamma_x$, &c. lorsqu'on y change ${}^{n-1}u_x$ en ${}^{n-3}u_x$, & ${}^{n-3}u_x$

en $^{n-1}u_x$, Cela posé, en disposant dans l'ordre suivant toutes les équations que l'on peut former ainsi,

$$^{n-1}A + \Sigma . \frac{X_{x+1}}{^{n-1}z_{x+1}} = \gamma_x . y_x + {}^1\gamma_x . y_{x-1} + {}^2\gamma_x . y_{x-2} \dots + {}^{n-1}\gamma_x . y_{x-n+1}$$

$$^{n-1}A + \Sigma . \frac{X_{x+1}}{^{n-1}z_{x+1}} = \underline{\gamma_x} . y_x + {}^1\underline{\gamma_x} . y_{x-1} + {}^2\underline{\gamma_x} . y_{x-2} \dots + {}^{n-1}\underline{\gamma_x} . y_{x-n+1} \qquad (Z)$$

. . . .

$$A + \Sigma . \frac{X_{x+1}}{z_{x+1}} = \frac{\gamma_x}{n-1} . y_x + \frac{{}^1\gamma_x}{n-1} . y_{x-1} + \frac{{}^2\gamma_x}{n-1} . y_{x-2} \dots + \frac{{}^{n-1}\gamma_x}{n-1} . y_{x-n+1}$$

& les ajoutant ensemble, après avoir multiplié la première par $^{n-1}u_x$, la seconde, par $^{n-2}u_x$, &c. enfin, la dernière, par u_x; on aura une équation de cette forme

$$\lambda_x . y_x \dots + {}^{n-1}\lambda_x . y_{x-n+1} = u_x . \left[A + \Sigma . \frac{X_{x+1}}{z_{x+1}} \right]$$
$$+ {}^1u_x . \left[{}^1A + \Sigma . \frac{X_{x+1}}{^1z_{x+1}} \right]$$
. . . .
$$+ {}^{n-1}u_x . \left[{}^{n-1}A + \Sigma . \frac{X_{x+1}}{^{n-1}z_{x+1}} \right],$$

ce qui donne, en faisant $X_{x+1} = 0$,

$$\lambda_x . y_x + {}^1\lambda_x . y_{x-1} \dots\dots + {}^{n-1}\lambda_x . y_{x-n+1}$$
$$= A . u_x + {}^1A . {}^1u_x \dots\dots + {}^{n-1}A . {}^{n-1}u_x;$$

mais on a dans ce cas

$$y_x = A . u_x + {}^1A . {}^1u_x + \&c.$$

partant

$$y_x = \lambda_x . y_x + {}^1\lambda_x . y_{x-1} \dots\dots + {}^{n-1}\lambda_x . y_{x-n+1}.$$

Or, cette équation doit être identique, car autrement, quoique de l'ordre $n-1$, son intégrale renfermeroit les n constantes arbitraires que renferme l'expression complète de y_x : on a donc pour l'intégrale complète de l'équation *(B)* du problème II, quel que soit X_x,

$$
\begin{aligned}
y_x = \; & u_x \cdot \left[A + \Sigma \cdot \frac{X_{x+1}}{z_{x+1}} \right] \\
+ \; & {}^1u_x \cdot \left[{}^1A + \Sigma \cdot \frac{X_{x+1}}{{}^1z_{x+1}} \right] \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ \; & {}^{n-1}u_x \cdot \left[{}^{n-1}A + \Sigma \cdot \frac{X_{x+1}}{{}^{n-1}z_{x+1}} \right]
\end{aligned}
$$

De-là résulte cette règle fort simple, pour avoir l'intégrale complète de l'équation

$y_x = H_x \cdot y_{x-1} + {}^1H_x \cdot y_{x-2} \ldots\ldots + {}^{n-1}H_x \cdot y_{x-n} + X_x.$

lorsqu'on sait intégrer celle-ci,

$y_x = H_x \cdot y_{x-1} + {}^1H_x \cdot y_{x-2} \ldots\ldots + {}^{n-1}H_x \cdot y_{x-n}.$

soit $y_x = A \cdot u_x + {}^1A \cdot {}^1u_x + {}^2A \cdot {}^2u_x \ldots\ldots + {}^{n-1}A \cdot {}^{n-1}u_x$

l'intégrale de cette dernière, & que l'on fasse

$$
\left.\begin{aligned}
\overset{1}{u}_x &= u_x \cdot \Delta \left(\frac{{}^1u_{x-1}}{u_{x-1}} \right) \\
{}^1\overset{1}{u}_x &= u_x \cdot \Delta \left(\frac{{}^2u_{x-1}}{u_{x-1}} \right) \\
{}^2\overset{1}{u}_x &= u_x \cdot \Delta \left(\frac{{}^3u_{x-1}}{u_{x-1}} \right) \\
&\&c.
\end{aligned}\right\} \cdot
\left\{\begin{aligned}
\overset{2}{u}_x &= \overset{1}{u}_x \cdot \Delta \left(\frac{{}^1\overset{1}{u}_{x-1}}{\overset{1}{u}_{x-1}} \right) \\
{}^1\overset{2}{u}_x &= \overset{1}{u}_x \cdot \Delta \left(\frac{{}^2\overset{1}{u}_{x-1}}{\overset{1}{u}_{x-1}} \right) \\
{}^2\overset{2}{u}_x &= \overset{1}{u}_x \cdot \Delta \left(\frac{{}^3\overset{1}{u}_{x-1}}{\overset{1}{u}_{x-1}} \right) \\
&\&c.
\end{aligned}\right\} \cdot
\left\{\begin{aligned}
\overset{3}{u}_x &= \overset{2}{u}_x \cdot \Delta \left(\frac{{}^1\overset{2}{u}_{x-1}}{\overset{2}{u}_{x-1}} \right. \\
&\&c.
\end{aligned}\right.
$$

jusqu'à ce que l'on parvienne à former $\overset{n-1}{u}_x$, soit $\overset{n-1}{u}_x = {}^{n-1}z_x$: si dans l'expression de ${}^{n-1}z_x$, on change ${}^{n-1}u_x$ en ${}^{n-2}u_x$, & ${}^{n-2}u_x$ en ${}^{n-1}u_x$, on formera ${}^{n-2}z_x$, si dans la même expression de ${}^{n-1}z_x$ on change ${}^{n-1}u_x$ en ${}^{n-3}u_x$, & réciproquement ${}^{n-3}u_x$ en ${}^{n-1}u_x$, on formera ${}^{n-3}z_x$ & ainsi de suite; l'intégrale complète de l'équation

$y_x = H_x \cdot y_{x-1} + {}^1H_x \cdot y_{x-2} \ldots + {}^{n-1}H_x \cdot y_{x-n} + X_x \; (B)$,

ſera

$$\begin{aligned} y_x = {} & u_x.[\ A + \Sigma.\frac{X_{x+1}}{z_{x+1}}] \\ & + {}'u_x.[\ {}'A + \Sigma.\frac{X_{x+1}}{{}'z_{x+1}}] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + {}^{n-1}u_x.[{}^{n-1}A + \Sigma.\frac{X_{x+1}}{{}^{n-1}z_{x+1}}] \end{aligned} \quad (\Pi)$$

VIII.

Je reprends maintenant les équations (>) de l'article précedent; elles donnent

$${}^{n-1}A + \Sigma.\frac{X_{x+2}}{{}^{n-1}z_{x+1}} = \gamma_{x+1}.y_{x+1}\ldots + {}^{n-1}\gamma_{x+1}\,y_{x-n+2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A + \Sigma.\frac{X_{x+2}}{z_{x+1}} = \frac{\gamma_{x+1}}{n-1}.y_{x+1}\ldots + \frac{{}^{n-1}\gamma_{x+1}}{n-1}y_{x-n+2}$$

ſi l'on multiplie la première par ${}^{n-1}u_x$, la ſeconde par ${}^{n-2}u_x$, &c. on aura en les ajoutant enſemble, une équation de cette forme.

$$\lambda_x.y_{x+1} + {}'\lambda_x.y_{x+2}\ldots + {}^{n-1}\lambda_x.y_{x-n+2} = A\,u_x + {}'A.{}'u_x\ldots + {}^{n-1}A.{}^{n-1}u_x$$

donc

$$\lambda_x.y_{x+1} + {}'\lambda_x.y_{x+2}\ldots + {}^{n-1}\lambda_x.y_{x-n+2} = y_x,$$

équation qui doit être identique; partant

$$\begin{aligned} y_x = {} & u_x\ [A + \Sigma\ \frac{X_{x+2}}{z_{x+1}}] \\ & + {}'u_x\ [{}'A + \Sigma.\frac{X_{x+2}}{{}'z_{x+1}}]; \\ & + \text{\&c.} \end{aligned}$$

On trouvera pareillement

$$\begin{aligned} y_x = {} & u_x\ [A + \Sigma.\frac{X_{x+1}}{z_{x+1}}], \\ & + {}'u_x\ [{}'A + \Sigma.\frac{X_{x+1}}{{}'z_{x+1}}], \\ & + \text{\&c.} \end{aligned}$$

& ainſi de ſuite juſqu'à ce qu'on parvienne à cette dernière équation incluſivement,

$$y_x = u_x[A + \Sigma . \frac{X_{x+n}}{z_{x+n}}],$$
$$+ {}'u_x['A + \Sigma . \frac{X_{x+n}}{'z_{x+n}}],$$
$$+ \&c.$$

Toutes ces équations étant l'intégrale complète de l'équation *(B)* ſont identiquement les mêmes, en les comparant enſemble on formera les équations ſuivantes

$$\frac{u_x}{z_{x+1}} + \frac{'u_x}{'z_{x+1}} + \&c. \ldots + \frac{^{n-1}u_x}{^{n-1}z_{x+1}} = 0$$
$$\frac{u_x}{z_{x+2}} + \frac{'u_x}{'z_{x+2}} + \&c. \ldots + \frac{^{n-1}u_x}{^{n-1}z_{x+2}} = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{u_x}{z_{x+n-1}} + \frac{'u_x}{'z_{x+n-1}} + \&c. \ldots + \frac{^{n-1}u_x}{^{n-1}z_{x+n-1}} = 0.$$

IX.

L'intégration de l'équation *(B)* du Problème II étant réduite à l'intégration de cette même équation lorſque $X_x = 0$, il ne s'agit plus pour réſoudre le Problème, que d'intégrer celle-ci; mais cela paroît très-difficile en général; ainſi je me bornerai aux cas particuliers, En voici un fort étendu, dans lequel l'intégration réuſſit, & qui embraſſe tous les cas déjà connus; c'eſt celui dans lequel on a

$$y_x = C . \varphi_x . y_{x-1} + {}'C . \varphi_x . \varphi_{x-1} . y_{x-2} \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ {}^{n-1}C . \varphi_x . \varphi_{x-1} \ldots\ldots\ldots \varphi_{x-n+1} . y_{x-n} \quad (B'),$$

ſi $\varphi_x = 1$, on aura l'équation des ſuites récurrentes.

L'équation *(E)* de l'*article IV* devient dans ce cas

$$0 = 1 - \frac{C . \varphi_x}{\alpha_x} - \frac{{}'C . \varphi_x . \varphi_{x-1}}{\alpha_x . \alpha_{x-1}} \ldots - \frac{^{n-1}C . \varphi_x \ldots \varphi_{x-n+1}}{\alpha_x \ldots \alpha_{x-n+1}} \quad (E').$$

Or *(article VI)*, il ſuffit, pour intégrer l'équation *(B')* de connoître un nombre n de valeurs pour α_x dans l'équation *(E')*. Soit donc $\alpha_x = a . \varphi_x$, a étant conſtant, & l'équation

l'équation (E') donnera

$$a^n = C . a^{n-1} + {}^1C . a^{n-2} + {}^2C . a^{n-3} \ldots + {}^{n-1}C; \quad (h)$$

d'où l'on aura un nombre n de valeurs pour a, & par conféquent pour α_x, puifque $\alpha_x = a . \varphi_x$.

Soient p, ${}^1p$, ${}^2p \ldots\ldots {}^{n-1}p$, les différentes valeurs de a, dans l'équation (h). On aura *(article IV)*,

$$\delta_x = p . \varphi_x, \; {}^1\delta_x = {}^1p . \varphi_x, \; {}^2\delta_x = {}^2p . \varphi_x, \text{ \&c.}$$

Or, on a *(article V)*,

$$u_x = \nabla . \delta_x = \varphi_1 . \varphi_2 . \varphi_3 \ldots\ldots\ldots \varphi_x . p^x$$

$${}^1u_x = \nabla . {}^1\delta_x = \varphi_1 . \varphi_2 . \varphi_3 \ldots\ldots\ldots \varphi_x . {}^1p^x, \text{ \&c.}$$

L'intégrale complète de l'équation (B') eft donc

$$y_x = \varphi_1 . \varphi_2 . \varphi_3 \ldots \varphi_x . [A . p^x + {}^1A . {}^1p^x \ldots + {}^{n-1}A . {}^{n-1}p^x].$$

On déterminera les conftantes arbitraires, A, ${}^1A$, ${}^2A$, &c. au moyen de n, valeurs de y_x, dans autant de fuppofitions particulières pour x. Soit

$$y_1 = M; \quad y_2 = {}^1M; \quad y_3 = {}^2M \ldots \text{ \&c.} \quad y_n = {}^{n-1}M,$$

& l'on aura

$$\frac{M}{\varphi_1} = A . p + {}^1A . {}^1p + {}^2A . {}^2p \ldots + {}^{n-1}A . {}^{n-1}p,$$

$$\frac{{}^1M}{\varphi_1 . \varphi_2} = A . p^2 + {}^1A . {}^1p^2 + {}^2A . {}^2p^2 \ldots + {}^{n-1}A . {}^{n-1}p^2,$$

$$\frac{{}^2M}{\varphi_1 . \varphi_2 . \varphi_3} = A . p^3 + {}^1A . {}^1p^3 + {}^2A . {}^2p^3 \ldots + {}^{n-1}A . {}^{n-1}p^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{{}^{n-1}M}{\varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_n} = A . p^n + {}^1A . {}^1p^n + {}^2A . {}^2p^n \ldots + {}^{n-1}A . {}^{n-1}p^n.$$

pour réfoudre ces équations, on peut faire ufage des méthodes ordinaires d'élimination; mais en voici une qui me paroît plus fimple.

Je multiplie la première équation par ${}^{n-1}p$, & je la retranche de la feconde; je multiplie pareillement la feconde, par ${}^{n-1}p$, & je la retranche de la troifième, & ainfi de fuite, ce qui produit les équations fuivantes:

$$\frac{{}^{1}M}{\varphi_1 . \varphi_2} - \frac{M}{\varphi_1} . {}^{n-1}p = A p\,(p - {}^{n-1}p) + {}^{1}A . {}^{1}p\,({}^{1}p - {}^{n-1}p) \ldots$$
$$+ {}^{n-2}A . {}^{n-2}p({}^{n-2}p - {}^{n-1}p)$$

$$\frac{{}^{2}M}{\varphi_1 . \varphi_2 . \varphi_3} - \frac{{}^{1}M}{\varphi_1 . \varphi_2} . {}^{n-1}p = A . p^2 (p - {}^{n-1}p) + {}^{1}A . {}^{1}p^2 ({}^{1}p - {}^{n-1}p) \ldots$$
$$+ {}^{n-2}A . {}^{n-2}p^2 ({}^{n-2}p - {}^{n-1}p)$$

. . . .

$$\frac{{}^{n-1}M}{\varphi_1 \ldots \varphi_n} - \frac{{}^{n-2}M}{\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}} . {}^{n-1}p = A . p^{n-1} (p - {}^{n-1}p) \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$+ {}^{n-2}A . {}^{n-2}p^{n-1} ({}^{n-2}p - {}^{n-1}p).$$

Je multiplie encore la première de ces équations par ${}^{n-2}p$, & je la retranche de la ſeconde; je multiplie pareillement la ſeconde, par ${}^{n-2}p$, & je la retranche de la troiſième, ce qui donne

$$\frac{{}^{2}M}{\varphi_1 . \varphi_2 . \varphi_3} - \frac{{}^{1}M}{\varphi_1 . \varphi_2} ({}^{n-1}p + {}^{n-2}p) + \frac{M}{\varphi_1} . {}^{n-1}p . {}^{n-2}p = A . p(p - {}^{n-1}p)(p - {}^{n-2}p)$$
$$+ {}^{1}A . {}^{1}p({}^{1}p - {}^{n-1}p)({}^{1}p - {}^{n-2}p)$$
$$+ \text{\&c.}$$
$$+ {}^{n-3}A . {}^{n-3}p({}^{n-3}p - {}^{n-1}p)({}^{n-3}p - {}^{n-2}p)$$

$$\frac{{}^{3}M}{\varphi_1 . \varphi_2 . \varphi_3 . \varphi_4} - \frac{{}^{2}M}{\varphi_1 . \varphi_2 . \varphi_3} . ({}^{n-1}p + {}^{n-2}p) + \frac{{}^{1}M}{\varphi_1 . \varphi_2} {}^{n-1}p . {}^{n-2}p = A p^2 (p - {}^{n-1}p)(p - {}^{n-2}p)$$
$$+ \text{\&c.}$$
$$+ {}^{n-3}A . {}^{n-3}p^2 ({}^{n-3}p - {}^{n-1}p)({}^{n-3}p - {}^{n-2}p)$$

&c.

en opérant ſur ces dernières équations, comme ſur les précédentes, on aura

$$\frac{{}^{3}M}{\varphi_1 . \varphi_2 . \varphi_3 . \varphi_4} - \frac{{}^{2}M}{\varphi_1 . \varphi_2 . \varphi_3} ({}^{n-1}p + {}^{n-2}p + {}^{n-3}p) + \frac{{}^{1}M}{\varphi_1 . \varphi_2} . [({}^{n-2}p + {}^{n-1}p) . {}^{n-3}p + {}^{n-1}p . {}^{n-2}p]$$
$$- \frac{M}{\varphi_1} . {}^{n-1}p . {}^{n-2}p . {}^{n-3}p = A p . (p - {}^{n-1}p)(p - {}^{n-2}p)(p - {}^{n-3}p) + \text{\&c.}$$

& ainſi de ſuite.

De-là il eſt aiſé de conclure que ſi l'on nomme f la ſomme des quantités ${}^{1}p$, ${}^{2}p$, ${}^{3}p \ldots\ldots {}^{n-1}p$.

h, la ſomme de leurs produits deux à deux.

i, la ſomme de leurs produits trois à trois.

q, la ſomme de leurs produits quatre à quatre, &c.

$'f$, la ſomme des quantités $p, {}^2p, {}^3p \ldots\ldots {}^{n-1}p$.

$'h$, la ſomme de leurs produits deux à deux.

$'i$, la ſomme de leurs produits trois à trois, &c.

& ainſi de ſuite on aura

$$'A = \frac{{}^{n-1}M - \varphi_n . f . {}^{n-2}M + \varphi_n . \varphi_{n-1} . h . {}^{n-3}M - \varphi_n . \varphi_{n-1} . \varphi_{n-2} . i . {}^{n-4}M + \&c.}{\varphi_1 . \varphi_2 . {}_3 \ldots\ldots \varphi_n . p(p - 'p) . (p - {}^2p) . (p - {}^3p) . \&c.}$$

$${}^2A = \frac{{}^{n-1}M - \varphi_n . 'f . {}^{n-2}M + \varphi_n . \varphi_{n-1} . 'h . {}^{n-3}M - \&c.}{\varphi_1 . \varphi_2 . \varphi_3 \ldots\ldots \varphi_n . 'p('p - p)('p - {}^2p)('p - {}^3p) . \&c.}$$

&c.

on peut déterminer d'une manière fort ſimple les quantités $f, h, i, q, 'f, 'h, 'i, 'q$, &c. je reprends pour cela l'équation

$a^n - C . a^{n-1} - 'C . a^{n-2} - \&c. \ldots - {}^{n-1}C = 0$, (h);

je la diviſe par $a - p$, & l'équation réſultante ſera

$a^{n-1} + f . a^{n-2} + h . a^{n-3} + i . a^{n-4} + q . a^{n-5} + \&c. = 0$.

je multiplie cette réſultante par $a - p$, & j'aurai l'équation ſuivante.

$a^n + (p + f) . a^{n-1} + (pf + h) a^{n-2} + (ph + i) a^{n-3} + \&c. = 0$,

je la compare avec l'équation (h), & j'en conclus

$$f = - C - p$$
$$h = - 'C - pf$$
$$i = - {}^2C - ph$$

&c.

& par conſéquent $'f = - C - 'p$

$$'h = - 'C - 'p'f$$

&c.

J'ai ſuppoſé juſqu'ici que toutes les racines de l'équation (h) ſont inégales, mais il peut arriver qu'une ou pluſieurs de ces racines ſoient égales entr'elles; voici dans ce cas la méthode qu'il faut ſuivre.

Je suppose que l'on ait $p = {}'p$; on fera $'p = p + dp$, & l'équation

$$y_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots . \varphi_x . [A . p^x + {}'A . {}'p^x + {}^2A . {}^2p^x \ldots . + {}^{n-1}A . {}^{n-1}p^x]$$

donnera en réduisant $(p + dp)^x$ en séries;

$$y_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_x \left\{ \begin{array}{l} p^x [A + {}'A(1 + \frac{x dp}{p} + \frac{x . x-1}{1.2} . \frac{dp^2}{p^2} + \&c.)] \\ + {}^2A . {}^2p^x + \&c. \end{array} \right\}$$

soit $A + {}'A = B$, & $'A . \frac{dp}{p} = D$, B & D étant des constantes arbitraires & finies, $'A$ sera donc infiniment grand de l'ordre $\frac{1}{dp}$; $'A . \frac{dp^2}{p^2}$, $'A . \frac{dp^3}{p^3}$, &c. seront infiniment petits. Partant

$$y_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_x [p^x(B + Dx) + {}^2A . {}^2p^x + {}^3A . {}^3p^x + \&c.]$$

si de plus on a $p = {}^2p$, on fera dans cette expression de y_x ${}^2p = p + dp$; & l'on aura $y_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \ldots \ldots \varphi_x$

$$\left\{ \begin{array}{l} p^x [B + {}^2A + (D + {}^2A . \frac{dp}{p})x + {}^2A . \frac{dp^2}{p^2} . \frac{x . x-1}{1.2} + \&c.] \\ + {}^3A . {}^3p^x + \&c. \end{array} \right\}$$

Soit ${}^2A + B = {}'B$, $D + {}^2A . \frac{dp}{p} = {}'D$, & ${}^2A . \frac{dp^2}{p^2} = {}'E$; $'B$, $'D$ & $'E$ étant des constantes arbitraires & finies, on aura

$$y_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_x [p^x('B + {}'Dx + {}'E . \frac{x.(x-1)}{1.2}) + {}^3A . {}^3p^x + \&c.]$$

si de plus on avoit $p = {}^3p$, on auroit

$$y_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_x \left\{ \begin{array}{l} p^x({}^2B + {}^2D.x + {}^2E . \frac{x.(x-1)}{1.2} + {}^2F . \frac{x.(x-1).(x-2)}{1.2.3}) \\ + {}^4A . {}^4p^x + \&c. \end{array} \right\}$$

& ainsi de suite; on détermineroit les constantes arbitraires, au moyen de n, valeurs particulières de y_x.

Si l'équation *(h)* a deux racines imaginaires, p & $'p$, on

fera $p = a + b\sqrt{-1}$, & $'p = a - b\sqrt{-1}$.
Soit $\frac{a}{\sqrt{(aa + bb)}} = \text{cof.}\, q$, & $\frac{b}{\sqrt{(aa + bb)}} = \text{fin.}\, q$, on aura

$$A.p^x + 'A.'p^x = (aa + bb)^{\frac{x}{2}}.[A.(\text{cof.}\, q + \sqrt{-1}.\text{fin.}\, q)^x$$

$$+ 'A.(\text{cof.}\, q - \sqrt{-1}.\text{fin.}\, q)^x] = (aa + bb)^{\frac{x}{2}}$$
$$[(A + 'A).\text{cof.}\, qx + (A - 'A\sqrt{-1}).\text{fin.}\, qx],$$

parce que

$$(\text{cof.}\, q \pm \sqrt{-1}.\text{fin.}\, q)^x = \text{cof.}\, qx \pm \sqrt{-1}.\text{fin.}\, qx.$$

Soit $A + 'A = B$, & $(A - 'A)\sqrt{-1} = 'B$, B & $'B$ étant réels, on aura

$$Ap^x + 'A.'p^x = (aa + bb)^{\frac{x}{2}}\, (B.\text{cof.}\, qx + 'B.\text{fin.}\, qx)$$

on aura donc alors

$$y^x = \varphi_1.\varphi_2 \ldots \varphi_x[(aa + bb)^{\frac{x}{2}}\, (B.\text{cof.}\, qx + 'B.\text{fin.}\, qx) + {}^2A.{}^2p^x + \&c.];$$

ce feroit le même procédé, s'il y avoit un plus grand nombre d'imaginaires.

Si l'on fuppofe, dans les calculs précédens, $\varphi_x = 1$, on aura le cas des fuites récurrentes. De-là réfulte ce théorème.

Si l'on nomme Y_x le terme général d'une fuite récurrente, telle que l'on ait

$$Y_x = C.Y_{x-1} + 'C.Y_{x-2} \ldots\ldots + {}^{n-1}C.Y_{x-n},$$

le terme général d'une fuite telle que l'on ait

$$y = C.\varphi_x.y_{x-1} + 'C.\varphi_x.\varphi_{x-1}.y_{x-2} \ldots + {}^{n-1}C.\varphi_x \ldots \varphi_{x-n+1}.y_{x-n},$$

& dans laquelle les conftantes arbitraires qui viennent en intégrant font les mêmes que dans la précédente fera

$$y_x = \varphi_1.\varphi_2 \ldots\ldots\ldots \varphi_x.Y_x;$$

c'eft ce dont il eft facile de s'affurer d'ailleurs, car fi l'on fubftitue cette valeur de y_x dans l'équation

$$y_x = C.\varphi_x.y_{x-1} + \&c.$$

On aura

$$\varphi_1 . \varphi_2 \ldots . \varphi_x . Y_x = C . \varphi_1 . \varphi_2 \ldots . \varphi_x . Y_x + \&c,$$

partant

$$Y_x = C . Y_{x-1} + {}^{1}C . Y_{x-2} + \&c.$$

équation qui a lieu par la ſuppoſition.

X.

Lorſqu'on a, par l'*article précédent*, l'intégrale de l'équation

$$y_x = C . \varphi_x . y_{x-1} + {}^{1}C . \varphi_x . \varphi_{x-1} . y_{x-2} \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ {}^{n-1}C . \varphi_x \ldots \varphi_{x-n+1} . y_{x-n} + X_x$$

en y ſuppoſant $X_x = 0$, il eſt facile de conclure cette même intégrale, X_x étant quelconque. Pour cela j'obſerve que puiſque X_x, étant nul, on a

$$y_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_x . [A p^x + {}^{1}A . {}^{1}p^x \ldots + {}^{n-1}A . {}^{n-1}p^x],$$

on aura, par l'*article V*,

$$u_x = \varphi_1 . \varphi_2 . \varphi_3 \ldots \varphi_x . p^x$$
$${}^{1}u_x = \varphi_1 . \varphi_2 . \varphi_3 \ldots \varphi_x . {}^{1}p^x$$
$${}^{2}u_x = \varphi_1 . \varphi_2 . \varphi_3 \ldots \varphi_x . {}^{2}p^x$$

&c.

d'où l'on conclura, par l'*article VII*,

$$\overset{1}{u}_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_x . p_x \Delta\left(\frac{{}^{1}p^{x-1}}{p^{x-1}}\right) = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_x . ({}^{1}p - p) . {}^{1}p^{x-1}$$
$${}^{1}\overset{1}{u}_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_x . ({}^{2}p - p) . {}^{2}p^{x-1}$$
$${}^{2}\overset{1}{u}_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_x . ({}^{3}p - p) . {}^{3}p^{x-1}$$

&c.

$$\overset{2}{u}_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_x . ({}^{2}p - p) . ({}^{2}p - {}^{1}p)\, {}^{2}p^{x-2}$$
$${}^{1}\overset{2}{u}_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_x . ({}^{3}p - p) . ({}^{3}p - {}^{1}p) . {}^{3}p^{x-2}$$

&c.

$\overset{y}{u}_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_x \, ({}'p - p) \, ({}^2p - {}'p) ({}^3p - {}^2p) . {}^3p^{x-3}$
&c.

& ainſi de ſuite, partant

$\overset{n-1}{u}_{x+1} = {}^{n-1}z_{x+1} = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_{x+1} ({}^{n-1}p - p)({}^{n-1}p - {}'p)({}^{n-1}p - {}^2p)$ &c.. ${}^{n-1}p^{x-n+2}$;

pareillement

${}^{n-2}z_{x+1} = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \varphi_{x+1} . ({}^{n-2}p - p)({}^{n-2}p - {}'p)$ &c... ${}^{n-2}p^{x-n+3}$,
&c.

d'où l'on conclura en ſubſtituant ces valeurs dans la formule (Π) de l'*article VII*, & faiſant pour abréger

$${}'X_x = \varphi_1 . \varphi_2 \ldots \ldots \varphi_x . X_x,$$

$$y_x = \frac{\varphi_1 . \varphi_2 \ldots \ldots \varphi_x}{(p - {}'p)(p - {}^2p)(p - {}^3p) . \&c.} . p^{x+n-1} \left[G + \Sigma . \frac{{}'X_{x+1}}{p^{x+1}}\right]$$
$$+ \frac{\varphi_1 . \varphi_2 \ldots \ldots \varphi_x}{({}'p - p)({}'p - {}^2p) . \&c.} . {}'p^{x+n-1} \left[{}'G + \Sigma . \frac{{}'X_{x+1}}{{}'p^{x+1}}\right]$$
$$+ \&c.$$

ſi $p = {}'p$, on fera ${}'p = p + dp$. Soit $K = \frac{1}{(p - {}^2p)(p - {}^3p) . \&c.}$
& l'on aura

$$y_x = \varphi_1 . \varphi_2 . . \varphi_x . p^{x+n-1} \left\{ \begin{array}{l} B + Dx - \frac{K}{p} . \Sigma . \frac{{}'X_{x+1} \overline{x+1}}{p^{x+1}} \\ + \left(\frac{dK}{dp} + \frac{K}{p} . \overline{x+n-1}\right) \Sigma . \frac{{}'X_{x+1}}{p^{x+1}} \end{array} \right\}$$
$$+ \frac{\varphi_1 . \varphi_2 \ldots \ldots \varphi_x . {}^2p^{x+n-1}}{({}^2p - p)^2 . ({}^2p - {}^3p) . \&c.} \left[{}^2G + \Sigma . \frac{{}'X_{x+1}}{{}^2p^{x+1}}\right]$$

B & D étant deux conſtantes arbitraires.

Si de plus on a $p = {}^2p$, on fera dans cette dernière expreſſion de y_x, ${}^2p = p + dp$, & ainſi de ſuite.

On peut donc intégrer généralement toutes les équations différentielles compriſes dans la forme ſuivante.

$$y_x = C . \varphi_x . y_{x-1} + {}'C . \varphi_x . \varphi_{x-1} . y_{x-2} + \&c. + X_x;$$

d'où il réſulte que ſi l'on déſigne par θ_x une fonction

quelconque de x, l'équation ſuivante

$$\theta_x \cdot y_x = C \cdot \theta_{x-1} \cdot \varphi_x \cdot y_{x-1} + {}'C \cdot \theta_{x-2} \varphi_x \cdot \varphi_{x-1} \cdot y_{x-2} + \&c. + X_x$$

eſt généralement intégrable, puiſqu'en faiſant $\theta_x \cdot y_x = t_x$, cette équation eſt de même forme que la précédente.

XI.

Voici maintenant une autre eſpèce d'équations différentielles linéaires, dont l'ordre dépend de la variable x; ſoit, par exemple,

$$\begin{aligned} y_x = {} & a_{x-1} \cdot y_{x-1} + b_{x-2} \cdot y_{x-2} + f_{x-3} \cdot y_{x-3} + X_x \\ & + a_{x-4} \cdot y_{x-4} + b_{x-5} \cdot y_{x-5} + f_{x-6} \cdot y_{x-6} \\ & + a_{x-7} \cdot y_{x-7} + b_{x-8} \cdot y_{x-8} + \&c. \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_3 \cdot y_3 + b_2 \cdot y_2 + f_1 \cdot y_1 \end{aligned}$$

Il eſt facile de ramener ces équations à la forme de l'équation *(B)* du problème II; car on a

$$\begin{aligned} y_{x-3} = {} & a_{x-4} \cdot y_{x-4} + b_{x-5} \cdot y_{x-5} + f_{x-6} \cdot y_{x-6} + X_{x-3} \\ & + a_{x-7} \cdot y_{x-7} + b_{x-8} \cdot y_{x-8} + \&c. \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_3 \cdot y_3 + b_2 \cdot y_2 + f_1 \cdot y_1; \end{aligned}$$

Si l'on retranche cette dernière équation de la précédente, on aura

$$y_x = a_{x-1} \cdot y_{x-1} + b_{x-2} \cdot y_{x-2} + (f_{x-3} + 1) \cdot y_{x-3} + X_x - X_{x-3}$$

équation compriſe dans l'équation *(B)*.

XII.

Préſentement voici un uſage fort étendu du calcul intégral aux différences finies, pour déterminer directement l'expreſſion générale des quantités aſſujetties à une certaine loi qui ſert à les former, expreſſion que juſqu'ici il me ſemble que l'on a toujours cherché à tirer par voie d'induction, méthode non-ſeulement indirecte, mais qui de plus doit être ſouvent en défaut.

Pour

Pour me faire mieux entendre, je prends l'exemple suivant.

Soit x le sinus d'un angle z, & u son cosinus; on a généralement, comme l'on sait

$$\text{sin.}\, nz = 2u \cdot \text{sin.}\,(n-1)z - \text{sin.}\,(n-2)z,$$

d'où l'on tire

$$\text{sin.}\, z = x,$$
$$\text{sin.}\, 2z = x(2u),$$
$$\text{sin.}\, 3z = x(4u^2 - 1),$$
$$\text{sin.}\, 4z = x(8u^3 - 4u),$$
$$\text{sin.}\, 5z = x(16u^4 - 12u^2 + 1),$$

&c.

Il faut maintenant déterminer l'expression générale de sin. nz.

On peut y parvenir par voie d'induction, en continuant plus loin ces expressions & cherchant à découvrir la loi des différens coëfficiens des puissances de u; mais il arrivera, si ce n'est pas dans cet exemple, au moins dans une infinité d'autres, que cette loi sera très-compliquée & très-difficile à saisir: il importe conséquemment d'avoir une méthode générale & sûre pour la trouver dans tous les cas possibles.

Soit pour cela l'équation différentielle

$$\begin{aligned} y_n = {} & y_{n-1} \cdot [a_n \cdot u + b_n], \\ & + y_{n-2} \cdot [{}^1a_n \cdot u^2 + {}^1b_n \cdot u + {}^1c_n], \quad (\nabla) \\ & + y_{n-3} \cdot [{}^2a_n \cdot u^3 + {}^2b_n \cdot u^2 + {}^2c_n + {}^2f_n], \\ & + \&c. \end{aligned}$$

Je suppose que l'on ait

$$y_1 = \alpha u + \beta,$$
$$y_2 = \delta u^2 + \gamma u + \Omega,$$
$$y_3 = \varpi \cdot u^3 + \pi \cdot u^2 + \theta u + \sigma, \text{ \&c.}$$

Voici comme je conclus l'expression générale de y_n.

Je fais

$$y_n = A_n \,.\, u^n + B_n \,.\, u^{n-1} + C_n \,.\, u^{n-2} + \&c.$$

Partant

$$y_{n-1} = A_{n-1} \,.\, u^{n-1} + B_{n-1} \,.\, u^{n-2} + C_{n-1} \,.\, u^{n-3} + \&c.$$
$$y_{n-2} = A_{n-2} \,.\, u^{n-2} + B_{n-2} \,.\, u^{n-3} + C_{n-2} \,.\, u^{n-4} + \&c.$$

& ainſi de ſuite; ſi l'on ſubſtitue ces valeurs de y_{n-1}, y_{n-2}, &c. dans l'équation (∇), on aura

$$y_n = u^n \,.\, [\; a_n \,.\, A_{n-1} + {}^{1}a_n \,.\, A_{n-2} + {}^{2}a_n \,.\, A_{n-3} + \&c.]$$
$$+ u^{n-1} \,.\, \left\{ \begin{array}{l} a_n \,.\, B_{n-1} + {}^{1}a_n \,.\, B_{n-2} + {}^{2}a_n \,.\, B_{n-3} + \&c. \\ + b_n \,.\, A_{n-1} + {}^{1}b_n \,.\, A_{n-2} + {}^{2}b_n \,.\, A_{n-3} + \&c. \end{array} \right\}$$
$$+ u^{n-2} \,.\, \left\{ \begin{array}{l} a_n \,.\, C_{n-1} + {}^{1}a_n \,.\, C_{n-2} + {}^{2}a_n \,.\, C_{n-3} + \&c. \\ + b_n \,.\, B_{n-1} + {}^{1}b_n \,.\, B_{n-2} + {}^{2}b_n \,.\, B_{n-3} + \&c. \\ + {}^{1}c_n \,.\, A_{n-2} + {}^{2}c_n \,.\, A_{n-3} + {}^{3}c_n \,.\, A_{n-4} + \&c. \end{array} \right\}$$
$$+ \&c.$$

En comparant cette expreſſion de y_n avec la précédente, on aura les équations ſuivantes

$$A_n = a_n \,.\, A_{n-1} + {}^{1}a_n \,.\, A_{n-2} + {}^{2}a_n \,.\, A_{n-3} + \&c.$$
$$B_n = a_n \,.\, B_{n-1} + {}^{1}a_n \,.\, B_{n-2} + {}^{2}a_n \,.\, B_{n-3} + \&c.$$
$$+ b_n \,.\, A_{n-1} + {}^{1}b_n \,.\, A_{n-2} + {}^{2}b_n \,.\, A_{n-3} + \&c.$$
$$\&c.$$

au moyen deſquelles on déterminera par les méthodes précédentes A_n, B_n, &c. & l'on aura ainſi l'expreſſion générale de y_n.

Je ſuppoſe que l'on veuille avoir l'expreſſion générale de ſin. nz, il eſt aiſé de voir, par ce qui précède, qu'elle aura cette forme.

$$\text{ſin. } nz = x\,[A_n \,.\, u^{n-1} + B_n \,.\, u^{n-3} + C_n \,.\, u^{n-5} + D_n \,.\, u^{n-7} + \&c.]$$

donc,

$$\text{ſin. } (n-1)z = x\,[A_{n-1} \,.\, u^{n-2} + B_{n-1} \,.\, u^{n-4} + C_{n-1} \,.\, u^{n-6} + \&c.]$$
$$\text{ſin. } (n-2)z = x\,[A_{n-2} \,.\, u^{n-3} + B_{n-2} \,.\, u^{n-5} + C_{n-2} \,.\, u^{n-7} + \&c.]$$

Si l'on ſubſtitue ces valeurs de ſin. $(n - 1)z$, & ſin. $(n - 2)z$ dans l'équation

$$\text{ſin. } nz = 2u \, . \, \text{ſin.} (n - 1)z - \text{ſin.} (n - 2)z,$$

on aura

$$\text{ſin. } nz = x \, . \begin{Bmatrix} 2A_{n-1} \, . \, u^{n-1} + 2B_{n-1} \, . \, u^{n-3} + 2C_{n-1} \, . \, u^{n-5} + \&c. \\ - A_{n-2} \, . \, u^{n-3} - B_{n-2} \, . \, u^{n-5} \end{Bmatrix}$$

& ſi l'on compare cette expreſſion avec la précédente, on aura

$$\begin{aligned} A_n &= 2 \, . \, A_{n-1} \\ B_n &= 2 \, . \, B_{n-1} - A_{n-2} \quad (\text{A}) \\ C_n &= 2 \, . \, C_{n-1} - B_{n-2} \\ &\&c. \end{aligned}$$

Au moyen de ces équations on déterminera A_n, B_n, C_n, &c. mais on doit faire ici une obſervation à laquelle il eſt néceſſaire de faire attention dans toutes les recherches qui dépendent du calcul intégral aux différences finies ; ce qui rend ſon uſage fort délicat. Cette obſervation conſiſte en ce que les équations précédentes (A), ne commencent point à exiſter toutes à la fois, c'eſt-à-dire, lorſque n a une même valeur dans ces équations. Pour le faire voir, j'obſerve que l'équation fondamentale ſin. $nz = 2u$. ſin. $(n - 1)z$ — ſin. $(n - 2)z$, au moyen de laquelle j'ai conclu ſin. $2z$, ſin. $3z$, ſin. $4z$, &c. ſuppoſe connus les deux premiers ſinus, ſin. $0.z$ & ſin. $1.z$; elle ne peut donc commencer à avoir lieu que lorſque $n = 2$; partant auſſi, les équations (A) ne peuvent commencer à exiſter que lorſque $n = 2$. La première de ces équations commence à exiſter lorſque $n = 2$, auquel cas on a $A_2 = 2A_1$; ainſi, le plus petit indice de A_n, c'eſt-à-dire, la moindre valeur que puiſſe avoir n dans cette expreſſion, eſt l'unité ; la ſeconde équation ne peut donc commencer à avoir lieu que lorſque $n = 3$; auquel cas on a $B_3 = 2B_2 - A_1$, partant le plus petit indice de B_n eſt 2 ; la troiſième équation ne peut donc commencer à avoir lieu que lorſque $n = 4$, auquel cas on a $C_4 = 2C_3 - B_2$;

partant, le plus petit indice de C_n est 3, & ainsi de suite. Cela posé :

Si l'on intègre la première équation, on aura $A_n = 2^n . H$, H étant arbitraire; or, posant $n = 1$, $A_n = 1$; donc, $H = \frac{1}{2}$ & $A_n = 2^{n-1}$, partant $A_{n-1} = 2^{n-2}$. Si l'on substitue cette valeur de A_{n-1} dans la seconde équation, & qu'ensuite on l'intègre, on aura $B_n = - 2^{n-3} (n + H)$, puisque l'équation différentielle en B_n commence à exister lorsque $n = 3$, la constante arbitraire H doit être déterminée par la valeur de B_n, lorsque $n = 2$; or, u ne pouvant avoir d'exposant négatif dans l'expression de sin. nz, il suit que $B_2 = 0$; partant $H = -2$; donc, $B_n = - 2^{n-3}. (n-2)$, & $B_{n-2} = - 2^{n-5} (n-4)$. Si l'on substitue cette valeur de B_{n-2} dans la troisième équation, & qu'ensuite on l'intègre, on aura $C_n = 2^{n-5} \left(\frac{nn - 7n}{2} + H\right)$; or posant $n = 3$, $C_n = 0$, donc, $H = 6$ & $C_n = 2^{n-5} . \frac{(n-3).(n-4)}{1.2}$, & ainsi du reste. Donc,

$$\text{sin. } nz = x \left\{ \begin{array}{l} 2^{n-1}.u^{n-1} - \frac{n-2}{1} . 2^{n-3}.u^{n-3} + \frac{n-3.n-4}{1.2} . 2^{n-5}.u^{n-5} \\ - \frac{(n-4).(n-5).(n-6)}{1.2.3} . 2^{n-7}.u^{n-7} + \&c. \end{array} \right\}$$

Soit encore $z = \text{ang. sin. } x$, on aura en différentiant

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$$

& je veux avoir l'expression générale de $\frac{d^n z}{dx^n}$, dx étant supposé constant. Pour cela soit $u = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$, on aura

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{2x^2+1}{(1-xx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{6.x^3+9x}{(1-xx)^{\frac{7}{2}}}$$

&c.

Il eſt aiſé de voir en conſidérant la loi de ces expreſſions de du, d^2u, &c. que l'expreſſion générale de $\frac{d^n u}{dx^n}$ a la forme ſuivante,

$$\frac{d^n u}{dx^n} = \frac{A_n . x^n + B_n . x^{n-2} + C_n . x^{n-4} + D_n . x^{n-6} + \&c.}{(1 - xx)^{n + \frac{1}{2}}}$$

en différentiant cette expreſſion on a

$$\frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} = \frac{\begin{matrix}(n+1) A_n . x^{n+1} + (n+3) B_n . x^{n-1} + (n+5) . C_n . x^{n-3} + (n+7) D_n . x^{n-5} + \&c. \\ + n . A_n \qquad + (n-2)\ B_n \qquad + (n-4) . C_n \qquad + \&c.\end{matrix}}{(1 - xx)^{n + \frac{1}{2}}}$$

mais on a

$$\frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} = \frac{A_{n+1} . x^{n+1} + B_{n+1} . x^{n-1} + C_{n+1} . x^{n-3} + D_{n+1} . x^{n-5} + \&c.}{(1 - xx)^{n + \frac{1}{2}}}$$

en comparant ces deux expreſſions de $\frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}}$, on aura les équations ſuivantes.

$$A_{n+1} = (n + 1)\ A_n,$$
$$B_{n+1} = (n + 3)\ B_n + n . A_n,$$
$$C_{n+1} = (n + 5)\ C_n + (n - 2) B_n,$$
&c.

Toutes ces équations commencent à exiſter à la fois, & lorſque $n = 1$; cela poſé, la première donne

$$A_n = 1 . 2 . 3 \ldots\ldots n;$$

la ſeconde donne

$$B_n = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 \ldots n . (n + 1) . (n + 2) [H + \Sigma . \frac{k}{(n+1) . (n+2) . (n+3)}],$$

ou

$$B_n = 1 . 2 . 3 \ldots n . (n + 1) . (n + 2) . [Q + \tfrac{1}{2} . \frac{1}{(n+1) . (n+2)} - \frac{1}{n+2}].$$

On déterminera la conſtante Q, par cette condition que B_n ſoit zéro, lorſque $n = 1$, on a donc $Q = \frac{1}{2 . 2}$.

Donc, $B_n = 1 . 2 . 3 \ldots n . \frac{1}{2} . \frac{n.(n-1)}{1.2}$.

La troisième équation donne, en intégrant & ajoutant les constantes convenables,

$$C_n = 1 . 2 . 3 \ldots n \frac{1.3}{2.4} . \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4};$$

on trouvera pareillement

$$D_n = 1 . 2 . 3 \ldots n . \frac{1.3.5}{2.4.6} . \frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4).(n-5)}{1.2.3.4.5.6},$$

& ainsi de suite. Partant

$$\frac{d^n z}{dx^n} = \frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(1-xx)^{n-\frac{1}{2}}} . \left\{ \begin{array}{l} x^{n-1} + \frac{1}{2} . \frac{(n-1).(n-2)}{1.2} . x^{n-3} \\ + \frac{1.3}{2.4} . \frac{(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{1.2.3.4} . x^{n-5} \\ + \frac{1.3.5}{2.4.6} . \frac{(n-1).(n-2).(n-3).(n-4).(n-5).(n-6)}{1.2.3.4.5.6} . x^{n-7} \\ + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} . \frac{(n-1).(n-2)\ldots\ldots n-8}{1.2.3\ldots\ldots 8} . x^{n-9} \\ + \&c. \end{array} \right\}$$

J'ai supposé, dans les deux exemples précédens, la loi des exposans connue, parce qu'elle étoit très-facile à apercevoir, mais s'il arrivoit qu'elle fût compliquée, ce qui doit être extrêmement rare; on pourra la déterminer par la méthode précédente.

XIII.

Voici encore un usage remarquable du calcul intégral aux différences finies, pour déterminer la nature des fonctions d'après des conditions données, ce qui est souvent utile, principalement dans le calcul des différences partielles *(a)*.

(a) J'avois trouvé cette méthode sur la fin de 1772, à l'occasion de quelques Problèmes que me proposa M. Monge, habile Professeur de Mathématiques aux écoles du Génie à Mézières; je lui en fis part alors: dans le même temps je l'envoyai à M. de la Grange; & je l'ai présentée à l'Académie au mois de Février 1773. Depuis ce temps, M. le Marquis de Condorcet a fait

On propose de trouver une fonction de x, telle qu'en y faisant successivement $x = \varphi(x)$ & $x = \psi(x)$, on ait

$$\text{fonct.}\,[\varphi(x)] = H_x \cdot \text{fonct.}\,[\psi(x)] + X_x \quad (\sigma),$$

$\varphi(x)$, $\psi(x)$, H_x & X_x étant des fonctions données de x.

Soit pour cela $u_z = \psi(x)$, & $u_{z+1} = \varphi(x)$. De la première de ces équations, je conclus $x = \Gamma(u_z)$, & $\varphi(x) = \Pi(u_z)$; $\Gamma(u_z)$ & $\Pi(u_z)$ représentant des fonctions connues de u_z. Partant, $u_{z+1} = \Pi(u_z)$, équation différentielle dont la différence constante est égale à l'unité, & que l'on peut intégrer dans plusieurs cas.

L'intégrale de cette équation donnera u_z en fonction de z, & l'équation $x = \Gamma(u_z)$ donnera x en fonction de z. Substituant cette valeur de x dans H_x & X_x, ces quantités deviendront des fonctions de z, que je désigne par L_z & Z_z. De plus, on a

fonct. $[\varphi(x)] =$ fonct. (u_{z+1}), & fonct. $[\psi(x)] =$ fonct. (u_z); l'équation (σ) deviendra donc, en supposant fonct. $(u_z) = y_z$,

$$y_{z+1} = L_z \cdot y_z + Z_z,$$

équation intégrable par le Problème Ier

On doit observer ici, conformément à une remarque dûe à M. Euler, que les constantes qui viennent en intégrant les équations finies différentielles dont la variable est z, & dont la différence constante est l'unité, peuvent être supposées des fonctions quelconques de $\sin.\, 2\pi z$, & de $\cos.\, 2\pi z$, π exprimant le rapport de la circonférence au diamètre.

Présentement, si l'on remet dans l'expression de y_z au lieu de z sa valeur en x, on aura fonct. $[\psi(x)]$, & si l'on change $\psi(x)$ en x, on aura la fonction de x, qui satisfait au Problème. Les exemples suivans éclairciront cette méthode.

---

imprimer dans le volume de l'Académie pour l'année 1771, un fort beau Mémoire sur cet objet; mais la route que je suis diffère de la sienne en ce qu'il ne se propose pas, comme je le fais, de ramener la question aux équations différentielles dont la différence soit constante & égale à l'unité.

Il s'agit de trouver une fonction de x, telle qu'en y changeant successivement x en x^q & en mx, on ait fonct. (x^q) $=$ fonct. $(mx) + p$; m & p étant constans. Je fais $u_z = mx$, & $u_{z+1} = x^q$. Partant, $u_{z+1} = (\frac{u_z}{m})^q$. Pour intégrer cette équation, je fais $u_1 = a$; donc, $u_2 = \frac{a^q}{m^q}$, $u_3 = \frac{a^{q^2}}{m^{q^2+q}}$, &c. Soit $u_z = \frac{a^{g_z}}{m^{f_z}}$; donc....... $u_{z+1} = \frac{a^{q \cdot g_z}}{m^{qf_z+q}} = \frac{a^{g_{z+1}}}{m^{f_{z+1}}}$. Donc, $g_{z+1} = q \cdot g_z$, ce qui donne $g_z = A \cdot q^z$. Or, posant $z = 2$, $g_z = q$. Donc, $A = \frac{1}{q}$, & $g_z = q^{z-1}$. De plus, on a $f_{z+1} = q \cdot f_z + q$. Donc, $f_z = A \cdot q^z + \frac{q}{1-q}$. Or, posant $z = 2, f_z = q$, donc, $A = \frac{1}{q-1}$, & $f_z = \frac{1}{q-1}$ $[q^z - q]$; donc, $u_z = \frac{a^{q^{z-1}}}{m^{\frac{1}{q-1}(q^z-q)}}$. Cette expression de u_z est complète, puisque a est arbitraire; maintenant l'équation fonct. (x^q) $=$ fonct. $(mx) + p$, deviendra $y_{z+1} = y_z + p$. Donc, $y_z = C + p \cdot z =$ fonct. (mx).

Il faut présentement avoir la valeur de z en x; or, puisqu'on a $u_z = mx$, on aura $mx = \frac{a^{q^{z-1}}}{m^{\frac{1}{q-1}(q^z-q)}}$, d'où l'on tire $l.mx = q^z . \frac{l.a}{q} - \frac{1}{q-1}(q^z - q) . l.m$, ou $q^z \left[\frac{l.a}{q} - \frac{l.m}{q-1}\right] = l . \left(\frac{mx}{m^{\frac{q}{q-1}}}\right)$; soit

.l.a

$\frac{l.\bar{a}}{q} - \frac{lm}{q-1} = K$, & l'on trouvera

$$z = \frac{l.l.\left(\frac{mx}{m^{\frac{q}{q-1}}}\right)}{l.q} - \frac{l.K}{l.q},$$

partant

$$y_z = A + p. \frac{l.l.\left(\frac{mx}{m^{\frac{q}{q-1}}}\right)}{l.q},$$

A, étant une constante arbitraire qui peut être une fonction quelconque de sin. $2\pi z$, & de cos. $2\pi z$. Soit $\Gamma\left[\begin{smallmatrix}\text{sin.}\,2\pi z\\ \text{cos.}\,2\pi z\end{smallmatrix}\right]$, cette fonction; en y substituant au lieu de z, sa valeur, on aura

$$A = \Gamma'.\left\{\begin{matrix}\text{sin.}\left(2\pi.\frac{l.l.\left(\frac{mx}{m^{\frac{q}{q-1}}}\right)}{l.q}\right)\\ \text{cos.}\left(2\pi.\frac{l.l.\left(\frac{mx}{m^{\frac{q}{q-1}}}\right)}{l.q}\right)\end{matrix}\right\}:$$

Donc

$$= \text{fonct.}(mx) = \Gamma'.\left\{\begin{matrix}\text{sin.}\left(2\pi.\frac{l.l.\left(\frac{mx}{m^{\frac{q}{q-1}}}\right)}{l.q}\right)\\ \text{cos.}\left(2\pi.\frac{l.l.\left(\frac{mx}{m^{\frac{q}{q-1}}}\right)}{l.q}\right)\end{matrix}\right\} + p.\frac{l.l.\left(\frac{mx}{m^{\frac{q}{q-1}}}\right)}{l.q}$$

ainsi la fonction de x, demandée, est

$$\text{fonct.}\,(x) = \Gamma'.\left\{\begin{matrix}\text{sin.}\left(2\pi.\dfrac{l.l.\left(\dfrac{x}{m^{\frac{q}{q-1}}}\right)}{l.q}\right)\\ \text{cos.}\left(2\pi.\dfrac{l.l.\left(\dfrac{x}{m^{\frac{q}{q-1}}}\right)}{l.q}\right)\end{matrix}\right\} + p.\dfrac{l.l.\left(\dfrac{x}{m^{\frac{q}{q-1}}}\right)}{l.q}$$

Il s'agit encore de trouver fonct. (x), telle que

$$[\text{fonct.}\,(x)]^2 = \text{fonct.}\,(2x) + 2:$$

on pourroit d'abord penser qu'il est impossible de satisfaire à cette équation, à moins que de supposer fonct. (x) égale à une constante; c'est en effet ce qu'ont cru d'habiles Géomètres, *(Voyez le second Volume des Mémoires de Turin, page 320)*; mais on va voir qu'il y a une infinité d'autres moyens d'y satisfaire. Soit $u_z = x$, & $u_{z+1} = 2x$, donc $u_{z+1} = 2.u_z$, & $u_z = A.2^z = x$. De plus on a fonct. $(2x) =$ fonct. (u_{z+1}), que je désigne par t_{z+1}, & fonct. $(x) =$ fonct. $(u_z) = t_z$; on aura donc $t_{z+1} = (t_z)^2 - 2$. Pour intégrer cette équation je suppose $t_1 = a + \frac{1}{a}$, donc $t_2 = a^2 + \frac{1}{a^2}$; $t_3 = a^4 + \frac{1}{a^4}$, & généralement $t_z = a^{2^{z-1}} + \frac{1}{a^{2^{z-1}}}$, expression complète de t_z, puisque a est arbitraire; or on a $2^{z-1} = \frac{x}{2A}$, donc $t_z = a^{\frac{x}{2A}} + a^{-\frac{x}{2A}}$, ou $t_z = b^x + b^{-x}$, b étant une constante arbitraire; or cette constante peut être supposée une fonction quelconque de sin. $2\pi z$, & de cos. $2\pi z$, & puisque $z = H + \frac{l.x}{l.2}$, H étant une constante quelconque, on aura

$$b = \text{fonct.}\left\{\begin{matrix}\text{fin.}\ (2\pi.\ \frac{l.x}{l.2})\\ \text{cof.}\ (2\pi.\ \frac{l.x}{l.2})\end{matrix}\right\}$$

partant la fonction de x, demandée, eſt

$$\left\{\text{fonct.}\left[\begin{matrix}\text{fin.}\ (2\pi.\ \frac{l.x}{l.2})\\ \text{cof.}\ (2\pi.\ \frac{l.x}{l.2})\end{matrix}\right]\right\}^x + \left\{\text{fonct.}\left[\begin{matrix}\text{fin.}\ (2\pi.\ \frac{l.x}{l.2})\\ \text{cof.}\ (2\pi.\ \frac{l.x}{l.2})\end{matrix}\right]\right\}^{-x}$$

Il s'agit enfin de trouver fonct. $(x - y\sqrt{-1})$, telle que l'on ait

$\text{fonct.}\ (x + y\sqrt{-1}) - \text{fonct.}\ (x - y\sqrt{-1} = 2M.\sqrt{-1}$,

en ſuppoſant $y = f + hx$; on aura

$\text{fonct.}\ [f\sqrt{-1} + x(1 + h\sqrt{-1})] - \text{fonct.}\ [x(1 - h\sqrt{-1}) - f\sqrt{-1}] = 2M.\sqrt{-1}$.

Soit $x(1 + h\sqrt{-1}) + f\sqrt{-1} = u_{z+1}$, & $x(1 - h\sqrt{-1}) - f\sqrt{-1} = u_z$; on aura donc $x = \frac{u_z + f.\sqrt{-1}}{1 - h\sqrt{-1}}$; donc

$$u_{z+1} = (\frac{1 + h\sqrt{-1}}{1 - h\sqrt{-1}}).u_z + \frac{2f\sqrt{-1}}{1 - h\sqrt{-1}},$$

équation dont l'intégrale eſt

$u_z = A[\frac{1 + h\sqrt{-1}}{1 - h\sqrt{-1}}]^z - \frac{f}{h} = x(1 - h\sqrt{-1}) - f\sqrt{-1}$;

partant,

$$z.l.(\frac{1 + h\sqrt{-1}}{1 - h\sqrt{-1}}) = l.(f + hx) + K.$$

Or, ſi l'on nomme $\varpi\pi$ l'angle dont la tangente eſt h, & π le rapport de la demi-circonférence au rayon, on aura

$l.(\frac{1 + h\sqrt{-1}}{1 - h\sqrt{-1}}) = 2\sqrt{-1}.\varpi\pi$; donc, $z = \frac{l.(f + hx)}{2\sqrt{-1}.\varpi\pi} + K$.

Maintenant on a,

$$\text{fonct.}\ (u_{z+1}) - \text{fonct.}\ (u_z) = 2M.\sqrt{-1};$$

& en repréſentant fonct. (u_z) par t_z, $t_{z+1} = t_z + 2M\sqrt{-1}$, donc, $t_z = H + 2Mz\sqrt{-1}$; ſubſtituant au lieu

de z, sa valeur, on aura $t_z = M \cdot \frac{l(f+hx)}{\varpi\pi} + L$, L étant une constante arbitraire, laquelle peut être fonction quelconque de fin. $2\pi z$ & de cof. $2\pi z$, ou de fin. $\frac{l(f+hx)}{\varpi\sqrt{-1}}$ & de cof. $\frac{l.(f+hx)}{\varpi\sqrt{-1}}$, & par conséquent de $e^{\frac{l.(f+hx)}{\varpi}}$; or, $e^{l(f+hx)} = f + hx$; donc, L peut être fonction de $(f+hx)^{\frac{1}{\varpi}}$; partant,

$$\text{fonct.}\,(x - y\sqrt{-1}) = M \cdot \frac{l.(f+hx)}{\varpi\pi} + \Gamma\left[(f+hx)^{\frac{1}{\varpi}}\right].$$

XIV.

Des Équations aux différences finies, lorsqu'on a plusieurs Équations entre plusieurs variables.

Je suppose que l'on ait les deux équations suivantes entre les trois variables y_x, $'y_x$ & x,

$$y_x + A_x \cdot y_{x-1} = B_x \cdot {'y_x} + C_x \cdot {'y_{x-1}} \quad (1)$$
$$y_x + {'A_x} \cdot y_{x-1} = {'B_x} \cdot {'y_x} + {'C_x} \cdot {'y_{x-1}} \quad (2)$$

La manière la plus simple de les intégrer est de les réduire par élimination à deux autres équations, l'une entre y_x & x, l'autre entre $'y_x$ & x; pour cela, je multiplie la première par $'C_x$, la seconde par C_x, & je les retranche l'une de l'autre; ce qui donne

$$('C_x - C_x) \cdot y_x + ['C_x \cdot A_x - C_x \cdot {'A_x}] \cdot y_{x-1} = ['C_x \cdot B_x - C_x \cdot {'B_x}] \cdot {'y_x},$$

partant,

$$['C_{x-1} - C_{x-1}] \cdot y_{x-1} + ['C_{x-1} \cdot A_{x-1} - C_{x-1} \cdot {'A_{x-1}}] y_{x-2} = ['C_{x-1} \cdot B_{x-1} - C_{x-1} \cdot {'B_{x-1}}] \cdot {'y_{x-1}} \quad (3).$$

Je multiplie l'équation (1) par α, l'quation (2) par $'\alpha$, &

je les ajoute avec l'équation (3), ce qui donne,

$$(\alpha + {}'\alpha)y_x + [\alpha A_x + {}'\alpha . {}'A_x + {}'C_x - C_{x-1}] . y_{x-1}$$
$$+ [{}'C_{x-1} . A_{x-1} - C_{x-1} . {}'A_{x-1}] . y_{x-2} =$$
$$= [\alpha B_x + {}'\alpha_x . {}'B_x] . {}'y_x$$
$$+ [\alpha C_x + {}'\alpha . {}'C_x + {}'C_{x-1} . B_{x-1} - C_{x-1} . {}'B_{x-1}] . {}'y_{x-1}$$

je fais disparoître ${}'y_x$ & ${}'y_{x-1}$, au moyen des équations

$$\alpha B_x + {}'\alpha . {}'B_x = 0$$
$$\alpha C_x + {}'\alpha . {}'C_x + {}'C_{x-1} . B_{x-1} - C_{x-1} . {}'B_{x-1} = 0,$$

& j'ai de cette manière une équation différentielle entre y_x & x seules; par un procédé entièrement semblable, on en trouvera une entre ${}'y_x$ & x; & ce seroit la même chose si l'on avoit un plus grand nombre d'équations & de variables.

Il est aisé de voir que *s'il y avoit dans chaque équation* des termes tels que T_x, X_x, &c. T_x, X_x étant des fonctions quelconques de x, elles seroient intégrables dans les mêmes cas où elles le sont, ces termes n'y étant pas.

Lorsqu'on a $n - 1$ équations entre n variables, celle-ci pouvant avoir une *infinité* de rapports différens entr'elles, l'intégration de *ces équations présente ainsi un grand nombre* de recherches curieuses; mais il est un cas qui mérite une attention particulière, en ce qu'il se rencontre quelquefois & principalement dans l'analyse des hasards; c'est le cas dans lequel ces équations rentrent en elles-mêmes.

X V.

Des équations différentielles rentrantes en elles-mêmes.

Si l'on a les équations suivantes entre les n variables, $\overset{1}{y}_x$, $\overset{2}{y}_x$, $\overset{3}{y}_x$, &c.

$$\overset{1}{y}_x = A . \overset{2}{y}_{x-1}$$
$$\overset{2}{y}_x = A . \overset{3}{y}_{x-1}$$

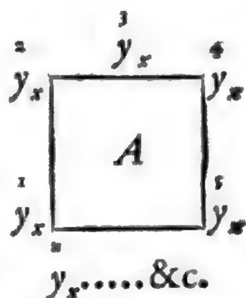
$$\overset{3}{y}_x = A\cdot\overset{4}{y}_{x-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overset{n}{y}_x = A\cdot\overset{1}{y}_{x-1}$$

Ces équations ſont ce que j'appelle *équations rentrantes en elles-mêmes.*

En général, ſi l'on diſpoſe ſur le périmètre de la figure A, les n variables $\overset{1}{y}_x, \overset{2}{y}_x, \overset{3}{y}_x$, &c. ainſi que la figure les repréſente, & qu'alors une fonction quelconque d'une de ces variables & de ſes différences finies, ſoit conſtamment égale à une fonction quelconque de celles qui la ſuivent, & de leurs différences finies, l'équation qui en réſulte eſt ce que je nomme *équation rentrante en elle-même.* Si, par exemple, chacune de ces variables eſt égale à deux fois celle qui la ſuit, lorſqu'on y ſuppoſe x diminuer d'une unité, plus à trois fois celle qui ſuit cette dernière, lorſqu'on y ſuppoſe x diminuer de deux unités, on aura



$$\overset{1}{y}_x = 2\cdot\overset{2}{y}_{x-1} + 3\cdot\overset{3}{y}_{x-2}$$

$$\overset{2}{y}_x = 2\cdot\overset{3}{y}_{x-1} + 3\cdot\overset{4}{y}_{x-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overset{n}{y}_x = 2\cdot\overset{1}{y}_{x-1} + 3\cdot\overset{2}{y}_{x-2}.$$

On voit par-là que bien que dans l'ordre des calculs, la variable $\overset{1}{y}_x$ ſoit la première; on auroit pu cependant également commencer par une quelconque de ces variables, & les équations auroient été abſolument les mêmes, ce qui eſt le caractère particulier de ce genre d'équations. Cela poſé.

XVI.

PROBLEME III.

Je suppose que l'on ait les équations *rentrantes*

$$\overset{1}{y}_x + A.\overset{1}{y}_{x-1} + {}'A.\overset{1}{y}_{x-2} + \&c.$$
$$= B.\overset{2}{y}_x + {}'B.\overset{2}{y}_{x-1} + {}^2B.\overset{2}{y}_{x-2} + \&c. + X_x$$
$$\overset{2}{y}_x + A.\overset{2}{y}_{x-1} + {}'A.\overset{2}{y}_{x-2} + \&c.$$
$$= B.\overset{3}{y}_x + {}'B.\overset{3}{y}_{x-1} + {}^3B.\overset{3}{y}_{x-2} + \&c. + X_x$$

....

$$\overset{n}{y}_x + A.\overset{n}{y}_{x-1} + {}'A.\overset{n}{y}_{x-2} + \&c.$$
$$= B.\overset{1}{y}_x + {}'B.\overset{1}{y}_{x-1} + {}^2B.\overset{1}{y}_{x-2} + \&c. + X_x$$

il faut déterminer $\overset{1}{y}_x$, $\overset{2}{y}_x$, &c.

La première équation donne

$$\overset{1}{y}_x + A.\overset{1}{y}_{x-1} + {}'A.\overset{1}{y}_{x-2} + \&c.$$
$$+ A.\overset{1}{y}_{x-1} + A^2.\overset{1}{y}_{x-2} + \&c.$$
$$+ {}'A.\overset{1}{y}_{x-2} + \&c.$$
$$= B[\overset{2}{y}_x + A.\overset{2}{y}_{x-1} + {}'A.\overset{2}{y}_{x-2} + \&c.]$$
$$+ {}'B[\overset{2}{y}_{x-1} + A.\overset{2}{y}_{x-2} + {}'A.\overset{2}{y}_{x-3} + \&c.]$$
$$+ \&c.$$
$$+ X_x + A.X_{x-1} + {}'A.X_{x-2} + \&c.$$

Je substitue au lieu de $\overset{2}{y}_x + A.\overset{2}{y}_{x-1} + \&c.$ $\overset{2}{y}_{x-1} + A.\overset{2}{y}_{x-2} + \&c.$ leurs valeurs que donne la seconde équation, ce qui me donne une équation entre $\overset{1}{y}_x$, $\overset{1}{y}_{x-1}$, &c. & $\overset{3}{y}_x$, $\overset{3}{y}_{x-1}$, &c. en opérant sur celle-ci

comme ſur la première, j'aurai une équation entre $\overset{1}{y}_x$, $\overset{1}{y}_{x-1}$, $\overset{4}{y}_x$, $\overset{4}{y}_{x-1}$, &c. & en continuant d'opérer ainſi juſqu'à la variable $\overset{q}{y}_x$, je parviendrai à une équation de cette forme

$$\begin{aligned} &\overset{1}{y}_x + b_q.\overset{1}{y}_{x-1} + {}'b_q.\overset{1}{y}_{x-2} + \text{\&c.} \\ = {}& a^q.[\overset{q}{y}_x + A.\overset{q}{y}_{x-1} + {}'A.\overset{q}{y}_{x-2} + \text{\&c.}] \\ &+ {}'a_q.[\overset{q}{y}_{x-1} + A.\overset{q}{y}_{x-2} + \text{\&c.}] \\ &+ \text{\&c.} \\ &+ \overset{q}{u}_x. \end{aligned}$$

Il faut maintenant déterminer b_q, $'b_q$, &c. a_q, $'a_q$, &c. $\overset{q}{u}_x$.

Pour cela, je ſubſtitue dans l'équation précédente, au lieu de $\overset{q}{y}_x + A.\overset{q}{y}_{x-1} +$ &c. $\overset{q}{y}_{x-1} + A.\overset{q}{y}_{x-2} +$ &c. leurs valeurs que donne la $q.^{ième}$ des équations rentrantes, ce qui donne

$$\begin{aligned} &\overset{1}{y}_x + b_q.\overset{1}{y}_{x-1} + {}'b_q.\overset{1}{y}_{x-2} + \text{\&c.} \\ = {}& a_q.[B.\overset{q+1}{y}_x + {}'B.\overset{q+1}{y}_{x-1} + \text{\&c.} + X_x\ ] \\ &+ {}'a_q.[B.\overset{q+1}{y}_{x-1} + {}'B.\overset{q+1}{y}_{x-2} + \text{\&c.} + X_{x-1}] \\ &+ \text{\&c.} \\ &+ \overset{q}{u}_x. \end{aligned}$$

d'où je conclus

$$\begin{array}{llll} \overset{1}{y}_x & + b_q.\overset{1}{y}_{x-1} & + {}'b_q.\overset{1}{y}_{x-2} & + \text{\&c.} \\ & + A & + A.b_q & \\ & & + {}'A & \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= a_qB.[\overset{q+1}{y}_x + A.\overset{q+1}{y}_{x-1} + {}'A.\overset{q+1}{y}_{x-2} + \text{\&c.}] \\ &+ [{}'a_qB + a_q.{}'B].[\overset{q+1}{y}_{x-1} + A.\overset{q+1}{y}_{x-2} + \text{\&c.}] \\ &+ \end{aligned}$$

$$+ [{}^2a_qB + {}'a_q.{}'B + a_q.{}^2B].[\overset{q+1}{y}_{x-2} + \&c.]$$
$$+ \&c.$$
$$+ X_x.a_q$$
$$+ X_{x-1}['a_q + A.a_q]$$
$$+ X_{x-2}.[{}^2a_q + A.{}'a_q + {}'A.a_q]$$
$$+ \&c.$$
$$+ \overset{q}{u}_x + A.\overset{q}{u}_{x-1} + {}'A.\overset{q}{u}_{x-2} + \&c.$$

mais on a

$$\overset{1}{y}_x + b_{q+1}.\overset{1}{y}_{x-1} + {}'b_{q+1}.\overset{1}{y}_{x-2} + \&c.$$
$$= a_{q+1}.[\overset{q+1}{y}_x + A.\overset{q+1}{y}_{x-1} + \&c.]$$
$$+ {}'a_{q+1}.[\overset{q+1}{y}_{x-1} + \&c.]$$
$$+ \&c.$$
$$+ \overset{q+1}{u}_x$$

d'où l'on a en comparant

$$b_{q+1} = b_q + A$$
$${}'b_{q+1} = {}'b_q + A.b_q + {}'A$$
$$\&c.$$
$$a_{q+1} = a_q.B$$
$${}'a_{q+1} = {}'a_q.B + a_q.{}'B$$
$$\&c.$$

$$\overset{q+1}{u}_x = \overset{q}{u}_x + A.\overset{q}{u}_{x-1} + {}'A.\overset{q}{u}_{x-2} + \&c.$$
$$+ X_x.a_q + X_{x-1}.['a_q + A.a_q] \quad (A)$$
$$+ X_{x-2}.[{}^2a_q + A.{}'a_q + {}'A.a_q]$$
$$+ \&c.$$

Au moyen de ces équations, on déterminera facilement a_q, $'a_q$, &c. b_q, $'b_q$, &c. pour déterminer $\overset{q}{u}_x$, j'obſerve

que l'on a

$$\overset{q}{u}_x = f_q . X_x + {}'f_q . X_{x-1} + {}^2f_q . X_{x-2} + \&c.$$

je substitue cette valeur dans l'équation (A), ce qui donne

$$\overset{q+1}{u}_x = X_x [f_q + a_q] + X_{x-1} . [{}'f_q + {}'a_q + A . a_q + A . f_q]$$
$$+ X_{x-2} \left\{ \begin{matrix} {}^2f_q + {}^2a_q + A . {}'a_q + {}'A . a_q \\ + {}'A . f_q + A . {}'f_q \end{matrix} \right\}$$
$$+ \&c.$$

mais on a

$$\overset{q+1}{u}_x = f_{q+1} . X_x + {}'f_{q+1} . X_{x-1} + {}^2f_{q+1} . X_{x-2} + \&c.$$

donc

$$f_{q+1} = f_q + a_q$$
$${}'f_{q+1} = {}'f_q + {}'a_q + A . f_q$$
&c.

Au moyen de ces équations on déterminera f_q, ${}'f_q$. &c. & partant, $\overset{q}{u}_x$.

Je suppose maintenant $q = n$, & l'on aura

$$\overset{n}{y}_x + b_n . \overset{1}{y}_{x-1} + \&c. = a_n . [\overset{n}{y}_x + A . \overset{n}{y}_{x-1} + \&c.]$$
$$+ {}'a_n . [\overset{n}{y}_{x-1} + {}'A . \overset{n}{y}_{x-2} + \&c.]$$
$$+ \&c.$$
$$+ \overset{n}{u}_x$$

mais on a

$$\overset{n}{y}_x + A . \overset{n}{y}_{x-1} + \&c. = B . \overset{1}{y}_x + {}'B . \overset{1}{y}_{x-1} + \&c. + X_x;$$

donc,

$$\overset{1}{y}_x + b_n . \overset{1}{y}_{x-1} + \&c. = a_n . [B . \overset{1}{y}_x + {}'B . \overset{1}{y}_{x-1} + \&c.] + a_n . X_x$$
$$+ {}'a_n . [B . \overset{1}{y}_{x-1} + \&c.] \quad + {}'a_n . X_{x-1}$$
$$+ \&c. \quad + \&c.$$
$$+ \overset{n}{u}_x$$

& en ordonnant les différens termes de cette équation,

$$\left.\begin{array}{l}\overset{n}{y}_x.[1 - a_n.B] + \overset{n}{y}_{x-1}.[b_n - a_n.'B - 'a_n.B] \\ + \overset{n}{y}_{x-2}.['b_n - a_n.{}^2B - 'a_n.'B - {}^2a_n.B] + \&c. \\ - \overset{n}{u}_x - a_n.X_x - 'a_n.X_{x-1} - \&c.\end{array}\right\} = 0$$

on aura une équation entièrement semblable pour $\overset{2}{y}_x$, $\overset{3}{y}_x$, &c.

XVII.

PROBLEME IV.

Je suppose maintenant que les équations rentrantes renferment trois variables, & que l'on ait

$$\begin{array}{l}\overset{1}{y}_x + .A.\overset{1}{y}_{x-1} + 'A.\overset{1}{y}_{x-2} + \&c. \\ = B.\overset{2}{y}_x + 'B.\overset{2}{y}_{x-1} + {}^2B.\overset{2}{y}_{x-2} + \&c. \\ + C.\overset{3}{y}_x + 'C.\overset{3}{y}_{x-1} + {}^2C.\overset{3}{y}_{x-2} + \&c. \\ + X_x\end{array}$$

....

$$\begin{array}{l}\overset{n}{y}_x + A.\overset{n}{y}_{x-1} + 'A.\overset{n}{y}_{x-2} + \&c. \\ = B.\overset{1}{y}_x + 'B.\overset{1}{y}_{x-1} + {}^2B.\overset{1}{y}_{x-2} + \&c. \\ + C.\overset{2}{y}_x + 'C.\overset{2}{y}_{x-1} + \&c. \\ + X_x.\end{array}$$

il faut déterminer $\overset{1}{y}_x$, $\overset{2}{y}_x$, &c.

En suivant le procédé du Problème précédent, on arrivera à une équation de cette forme

$$\begin{array}{l}\overset{1}{y}_x + b_q.\overset{1}{y}_{x-1} + 'b_q.\overset{1}{y}_{x-2} + \&c. \\ \quad = a_q.[\overset{q}{y}_x + A.\overset{q}{y}_{x-1} + 'A.\overset{q}{y}_{x-2} + \&c.] \\ \quad + 'a_q.[\overset{q}{y}_{x-1} + A.\overset{q}{y}_{x-2} + 'A.\overset{q}{y}_{x-3} + \&c.] \\ \quad + \&c.\end{array}$$

$$+ c_q . [\overset{q+1}{y_x} + A . \overset{q+1}{y_{x-1}} + {}'A . \overset{q+1}{y_{x-2}} + \&c.]$$
$$+ {}'c_q . [\overset{q+1}{y_{x-1}} + A . \overset{q+1}{y_{x-2}} + \&c.]$$
$$+ \&c.$$
$$+ \overset{q}{u_x}$$

Je substitue maintenant dans cette équation au lieu de $\overset{q}{y_x} + A . \overset{q}{y_{x-1}} + \&c.$ $\overset{q}{y_{x-1}} + A . \overset{q}{y_{x-2}} + \&c.$ leurs valeurs que donne la $q.^{ième}$ équation, ce qui produit la suivante,

$$\overset{1}{y_x} + b_q . \overset{1}{y_{x-1}} + {}'b_q . \overset{1}{y_{x-2}} + \&c.$$
$$= a_q . [B . \overset{q+1}{y_x} + {}'B . \overset{q+1}{y_{x-1}} + {}^2B . \overset{q+1}{y_{x-2}} + \&c.]$$
$$+ {}'a_q . [B . \overset{q+1}{y_{x-1}} + {}'B . \overset{q+1}{y_{x-2}} + {}^2B . \overset{q+1}{y_{x-3}} + \&c.]$$
$$+ \&c.$$
$$+ a_q . [C . \overset{q+2}{y_x} + {}'C . \overset{q+2}{y_{x-1}} + \&c.]$$
$$+ {}'a_q . [C . \overset{q+2}{y_{x-1}} + \&c.]$$
$$+ \&c.$$
$$+ c_q . [\overset{q+1}{y_x} + A \overset{q+1}{y_{x-1}} + \&c.]$$
$$+ {}'c_q . [\overset{q+1}{y_{x-1}} + \&c.]$$
$$+ \&c.$$
$$+ a_q . X_x + {}'a_q . X_{x-1} + \&c. + \overset{q}{u_x}$$

d'où l'on conclura facilement,

$$\begin{array}{llll} \overset{1}{y_x} & + b_q . \overset{1}{y_{x-1}} & + b_q . \overset{1}{y_{x-2}} & + \&c. \\ & + A & + A . b_q & + \&c. \\ & & + {}'A & + \&c. \end{array}$$
$$= [a_q . B + c_q] . [\overset{q+1}{y_x} + A . \overset{q+1}{y_{x-1}} + \&c.]$$
$$+ \left\{ \begin{array}{l} {}'a_q B + a_q . {}'B \\ + {}'c_q + A . c_q \end{array} \right\} . [\overset{q+1}{y_{x-1}} + A . \overset{q+1}{y_{x-2}} + \&c.]$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} {}^{2}a_q . B + {}'a_q . {}'B + a_q . {}^{2}B \\ + {}^{2}c_q + A . {}'c_q + {}'A . c_q \end{array} \right\} . [\overset{q+1}{y}_{x-2} + A . \overset{q+1}{y}_{x-3} + \&c.]$$

$+ \&c.$

$$+ a_q . C . [\overset{q+2}{y}_x + A . \overset{q+2}{y}_{x-1} + \&c.]$$

$$+ [{}'a_q . C + a_q . {}'C] . [\overset{q+2}{y}_{x-1} + A . \overset{q+2}{y}_{x-2} + \&c.]$$

$$+ [{}^{2}a_q . C + {}'a_q . {}'C + a_q . {}^{2}C] . [\overset{q+2}{y}_{x-2} + A . \overset{q+2}{y}_{x-3} + \&c.]$$

$+ \&c.$

$$+ \overset{q}{u}_x + A . \overset{q}{u}_{x-1} + {}'A . \overset{q}{u}_{x-2} + \&c.$$

$$+ X_x . a_q + X_{x-1} . [{}'a_q + A . a_q] + \&c.$$

or, on a,

$$\overset{1}{y}_x + b_{q+1} . \overset{1}{y}_{x-1} + \&c. = a_{q+1} [\overset{q+1}{y}_x + A . \overset{q+1}{y}_{x-1} + \&c.]$$
$$+ \&c.$$
$$+ c_{q+1} [\overset{q+2}{y}_x + A . \overset{q+2}{y}_{x-1} + \&c.]$$
$$+ \&c.$$
$$+ \overset{q+1}{u}_x$$

d'où l'on aura en comparant

$$b_{q+1} = b_q + A$$
$${}'b_{q+1} = {}'b_q + A . b_q + {}'A$$
$$\&c.$$

ainsi l'on déterminera b_q, ${}'b_q$, &c. ensuite

$$a_{q+1} = a_q . B + c_q, \ \& \ c_{q+1} = a_q . C,$$

partant, $a_{q+1} = a_q . B + a_{q-1} . C$; d'où l'on aura a_q & c_q.

De plus, on aura

$${}'a_{q+1} = {}'a_q . B + a_q . {}'B + {}'c_q + A . c_q$$
$${}'c_{q+1} = {}'a_q . C + a_q . {}'C.$$

Donc,

$$'a_{q+1} = {}'a_q . B + a_q . {}'B + {}'a_{q-1} . {}'C + a_{q-1} . {}'C + A . c_q;$$

d'où l'on aura $'a_q$ & $'c_q$, & ainſi du reſte; enfin, on déterminera $\overset{q}{u}_x$, comme dans le Problème précédent.

Si l'on ſuppoſe préſentement $q = n$, on aura

$$\begin{aligned} \overset{n}{y}_x [1 - c_n] + \overset{n}{y}_{x-1} . [1 - A . c_n - {}'c_n] + \&c. \\ = a_n . [\overset{n}{y}_x + A . \overset{n}{y}_{x-1} + \&c.] \\ + {}'a_n [\overset{n}{y}_{x-1} + A . \overset{n}{y}_{x-2} + \&c.] \\ + \&c. \\ + \overset{n}{u}_x \end{aligned}$$

On formera des équations entièrement ſemblables entre $\overset{n-1}{y}_x$ & $\overset{n}{y}_x$, $\overset{n-2}{y}_x$ & $\overset{n-1}{y}_x$, &c. & l'on aura un nombre n d'équations rentrantes à deux variables, telles que je les ai conſidérées dans le Problème précédent.

La même méthode réuſſiroit également, ſi les équations rentrantes renfermoient quatre ou un plus grand nombre de variables.

XVIII.

Du Calcul intégral aux différences finies & partielles.

Je ſuppoſe que ${}_n y_x$ repréſente une fonction quelconque des deux variables x & n, je puis dans cette fonction faire varier n en regardant x comme conſtant; je puis faire varier x, en regardant n comme conſtant; enfin, je puis faire varier n & x à la fois, leurs variations étant dans un rapport quelconque; or, s'il exiſte entre ${}_n y_x$ & ces différentes variations une équation quelconque, elle ſera ce que je nomme *équation aux différences finies & partielles.*

${}_n y_x$ repréſentant toujours une fonction de deux variables x & n.

${}_{n-1}y_{n}$, ${}_{n-2}y_{x}$, &c. signifient que n a diminué d'une de deux, &c. unités dans cette fonction.

${}_{n}y_{x-1}$, ${}_{n}y_{x-2}$, &c. signifient que x a diminué de une, de deux, &c. unités dans cette fonction.

${}_{n-1}y_{x-2}$, &c. signifie que n a diminué d'une unité, & x de deux unités, & ainsi de suite.

Une équation aux différences partielles, est donc une équation entre ces différentes quantités; telle est celle-ci,

$$ {}_{n}y_{x} = a \cdot {}_{n}y_{x-1} + b \cdot {}_{n-1}y_{x-1}. $$

Les équations aux différences finies ont été trouvées par la considération des suites *(article II)*. C'est pareillement la considération de certaines suites que j'ai nommées *récurro-récurrentes (voyez le tome VI des Savans étrangers)*, qui m'a conduit aux différences finies & partielles, voici comment; je suppose que l'on ait les suites,

$$ \begin{array}{l} {}_{1}y_{1} \cdot {}_{1}y_{2} \cdot {}_{1}y_{3} \cdot {}_{1}y_{4} \cdot {}_{1}y_{5} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \; {}_{1}y_{x} \cdot \text{\&c.} \\ {}_{2}y_{1} \cdot {}_{2}y_{2} \cdot {}_{2}y_{3} \cdot {}_{2}y_{4} \cdot {}_{2}y_{5} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \; {}_{2}y_{x} \cdot \text{\&c.} \\ {}_{3}y_{1} \cdot {}_{3}y_{2} \cdot {}_{3}y_{3} \cdot {}_{3}y_{4} \cdot {}_{3}y_{5} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \; {}_{3}y_{x} \cdot \text{\&c.} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ {}_{n}y_{1} \cdot {}_{n}y_{2} \cdot {}_{n}y_{3} \cdot {}_{n}y_{4} \cdot {}_{n}y_{5} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \; {}_{n}y_{x} \cdot \text{\&c.} \end{array} \quad (i) $$

Si un terme quelconque ${}_{n}y_{x}$ de ces suites est constamment égal à un nombre quelconque de termes précédens pris dans plusieurs de ces suites, & multipliés chacun par une fonction de x & de n; ces suites sont celles que j'ai nommées *récurro-récurrentes*, & l'équation qui exprime la loi d'après laquelle elles sont formées, est une équation aux différences finies & partielles.

J'observerai ici que les suites *(i)* peuvent être considérées non-seulement dans le sens horizontal, mais encore dans le sens vertical, & au lieu que dans le premier sens, x est leur indice, n le sera dans le second.

Je supposerai dans la suite, comme je l'ai fait ci-dessus

dans les équations aux différences ordinaires, que les différences de x & de n ſont conſtantes & égales à l'unité; ſi elles ſont conſtantes ſans être égales à l'unité, il ſera toujours poſſible de les rendre telles, par l'introduction de nouvelles variables; je ſuppoſerai de plus (ce qui eſt encore permis) que les plus petites valeurs que puiſſent recevoir x & n, ſont l'unité; & toutes les fois que je m'écarterai de cette ſuppoſition, l'état de la queſtion le fera connoître. Cela poſé :

Si l'on a une équation aux différences partielles telle que

$$ {}_{n}y_{x} = 2 \cdot {}_{n}y_{x-1} + 2 \cdot {}_{n-1}y_{x-1}, $$

elle ne commence à avoir lieu que lorſque x & n ſont plus grands que l'unité, comme dans les différences ordinaires l'équation ${}_{1}y_{x} = a \cdot {}_{1}y_{x-1}$, n'a lieu que lorſque x eſt plus grand que 1; en ſorte que ${}_{1}y_{1}$ reſte arbitraire, & l'on ne détermine au moyen de cette équation que les valeurs de ${}_{1}y$, ${}_{1}y_{1}$, &c. de même dans l'équation

$$ {}_{n}y_{x} = 2 \cdot {}_{n}y_{x-1} + 2 \cdot {}_{n-1}y_{x-1}; $$

${}_{1}y_{x}$, ou ${}_{n}y_{1}$, ſont arbitraires, ainſi l'expreſſion générale de ${}_{n}y_{x}$ renferme une fonction arbitraire.

En général, le nombre des fonctions arbitraires que renferme l'intégrale d'une équation aux différences partielles ſe déterminera par le degré de la différence de celle des deux quantités x & n qui varie le moins; ainſi dans l'équation

$$ {}_{n}y_{x} = {}_{n}y_{x-1} + 3 \cdot {}_{n-1}y_{x-1}, $$

le nombre des fonctions arbitraires que renferme l'intégrale eſt 1, parce que n étant ici celle des deux variables, dont la différence eſt la plus petite, elle ne varie que d'une unité; en effet, il eſt clair que ſi l'on connoît ${}_{1}y_{x}$, on peut déterminer ${}_{2}y_{x}$, ${}_{3}y_{x}$, ${}_{4}y_{x}$, &c. au moyen de l'équation

$$ {}_{n}y_{x} = {}_{n}y_{x-1} + 3 \cdot {}_{n-1}y_{x-1}: $$

il n'y a donc alors que ${}_{1}y_{x}$ d'arbitraire.

XIX.

XIX.

PROBLEME V.

L'équation aux différences finies & partielles

$_{n}y_{x} = {}_{n}H_{x} \cdot {}_{n-1}y_{x-1} + {}_{n}{}^{1}H_{x} \cdot {}_{n-2}y_{x-2} + {}_{n}{}^{2}H_{x} \cdot {}_{n-3}y_{x-3} + \&c... + {}_{n}P_{x};$

étant donnée, on propose de l'intégrer.

Puisque dans chaque terme de cette équation, la variable n décroît suivant la même loi que la variable x, je puis supposer $x = n + K$, K étant une constante quelconque; $_{n}y_{x}$, $_{n}H_{x}$, $_{n}{}^{1}H_{x}$, &c. deviennent alors fonctions de x & de K; je représente dans ce cas, $_{n}y_{x}$, par u_{x}; $_{n}H_{x}$, $_{n}{}^{1}H_{x}$, &c. par L_{x}, $^{1}L_{x}$, &c. enfin, $_{n}P_{x}$ par X_{x}; l'équation proposée devient donc $u_{x} = L_{x} \cdot u_{x-1} + {}^{1}L_{x} \cdot u_{x-2} + {}^{2}L_{x} \cdot u_{x-3} + \&c... + X_{x}$, équation aux différences ordinaires, & dont l'intégrale a cette forme par les articles précédens, en y restituant au lieu de K, sa valeur $x - n$,

$u_{x} = C \cdot {}_{n}z_{x} + {}^{1}C \cdot {}_{n}{}^{1}z_{x} + {}^{2}C \cdot {}_{n}{}^{2}z_{x} + \&c... + {}_{n}R_{x};$

C, ^{1}C, ^{2}C, &c. sont des constantes arbitraires, lesquelles peuvent être fonctions de K, ou de $x - n$; on aura donc

$$_{n}y_{x} = {}_{n}z_{x} \cdot \varphi(x - n) + {}_{n}{}^{1}z_{x} \cdot {}^{1}\varphi(x - n) + {}_{n}{}^{2}z_{x} \cdot {}^{2}\varphi(x - n) + \&c. + {}_{n}R_{x};$$

on déterminera les fonctions arbitraires $\varphi(x - n)$, $^{1}\varphi(x - n)$, &c. au moyen des valeurs de $_{n}y_{x}$, dans autant de suppositions particulières pour x qu'il y a de ces fonctions arbitraires.

L'équation proposée aux différences partielles est donc généralement intégrable, ce qui vient de ce que dans chaque terme, n & x varient de la même manière; mais si l'on excepte ce cas, & quelques autres fort rares, il est impossible d'avoir une intégrale entièrement débarrassée de tout signe d'intégration; pour le faire voir par un exemple fort simple, je suppose que l'on ait à intégrer l'équation $_{n}y_{x} = {}_{n}y_{x-1} + {}_{n-1}y_{x-1}$; en supposant $_{1}y_{x} = \varphi(x)$,

on aura $y_x - {}_1y_{x-1} = \varphi(x-1)$ ou $\Delta . {}_1y_x = \varphi(x)$. Partant, ${}_1y_x = \Sigma . \varphi(x)$; on trouvera pareillement ${}_3y_x = \Sigma . \Sigma . \varphi(x)$, ${}_4y_x = \Sigma^3 . \varphi(x)$, & généralement, ${}_ny_x = \Sigma^{n-1} . \varphi(x)$; telle eſt donc la valeur complète de ${}_ny_x$, en ayant ſoin d'ajouter à chaque intégration une conſtante arbitraire.

On peut ſimplifier cette valeur & la réduire à des quantités affectées du ſimple ſigne d'intégration, de la manière ſuivante.

Il faut réduire la double intégrale $\Sigma^2 . \varphi(x)$ à des ſimples intégrales; je fais pour cela

$$\Sigma^2 . \varphi(x) = z_x . \Sigma . \varphi(x) - \Sigma . t_x . \varphi(x);$$

en différenciant il vient

$$\Sigma . \varphi(x) = (z_x + \Delta . z_x)[\varphi(x) + \Sigma . \varphi(x)] - z_x . \Sigma . \varphi(x) - t_x . \varphi(x),$$

ou

$$\Sigma . \varphi(x) = [z_x + \Delta . z_x - t_x] . \varphi(x) + \Delta . z_x . \Sigma . \varphi(x).$$

Donc $\Delta . z_x = 1$, & $t_x = z_x + \Delta . z_x$. Je puis donc ſuppoſer $z_x = x$, & $t_x = x + 1$; ce qui donne

$$\Sigma^2 . \varphi(x) = x . \Sigma . \varphi(x) - \Sigma . (x+1) . \varphi(x);$$

on réduira, par un procédé ſemblable, $\Sigma^3 . \varphi(x)$, à des quantités affectées d'un ſeul ſigne d'intégration; mais il ſera impoſſible de l'en débarraſſer entièrement.

Voici maintenant une méthode d'intégrer les équations aux différences partielles, dans laquelle l'inconvénient des quantités affectées de pluſieurs ſignes d'intégration n'eſt point à craindre.

XX.

PROBLEME VI.

L'équation aux différences finies & partielles

$$\begin{aligned} {}_ny_x = {} & A_n . {}_ny_{x-1} + {}^1A_n . {}_ny_{x-2} + {}^2A_n . {}_ny_{x-3} + \&c. + N_n \\ & + B_n . {}_{n-1}y_x + {}^1B_n . {}_{n-1}y_{x-1} + {}^2B_n . {}_{n-1}y_{x-2} + \&c. \qquad (h) \end{aligned}$$

étant donnée, on propoſe de l'intégrer.

Pour cela je cherche à ramener l'intégration à celle d'une équation aux différences ordinaires. Je suppose donc que l'on ait ${}_1y_x = \varphi(x)$; l'équation (h) donnera la suivante,

$$\begin{aligned} {}_2y_x = {} & A_2\cdot{}_2y_{x-1} + {}'A_2\cdot{}_2y_{x-2} + \&c.\ldots + N_2 \\ & + B_2\cdot\varphi(x) + {}'B_2\cdot\varphi(x-1) + \&c. \qquad (1) \end{aligned}$$

ensuite

$$\begin{aligned} {}_3y_x = {} & A_3\cdot{}_3y_{x-1} + {}'A_3\cdot{}_3y_{x-2} + \&c.\ldots + N_3 \\ & + B_3\cdot{}_2y_x + {}'B_3\cdot{}_2y_{x-1} + \&c. \end{aligned}$$

d'où il est facile de conclure

$$\begin{aligned} & {}_3y_x - A_3\cdot{}_3y_{x-1} - {}'A_3\cdot{}_3y_{x-2} - \&c. \\ & \quad - A_2[{}_3y_{x-1} - A_3\,{}_3y_{x-2} - \&c.] \\ & \qquad\qquad - {}'A_2[{}_3y_{x-2} - \&c.] \\ & = B_3\cdot[{}_2y_x - A_2\cdot{}_2y_{x-1} - \&c.] \\ & + {}'B_3\cdot[{}_2y_{x-1} - A_2\cdot{}_2y_{x-2} - \&c.] \\ & + \&c. \\ & + N_3\cdot[1 - A_2 - {}'A_2 - \&c.] \end{aligned}$$

Si l'on substitue au lieu de
$$\begin{aligned} & {}_2y_x - A_2\cdot{}_2y_{x-1} - \&c. \\ & {}_2y_{x-1} - A_2\cdot{}_2y_{x-2} - \&c. \\ & \&c. \end{aligned}$$

leurs valeurs tirées de l'équation (1); on aura une équation de cette forme:

$${}_3y_x - a_3\cdot{}_3y_{x-1} - {}'a_3\cdot{}_3y_{x-2} - \&c. = {}_3u_x;$$

cette équation est aux différences ordinaires; pour l'intégrer par les articles précédens, il faut connoître ${}_3u_x$ & les racines de l'équation

$$1 = \frac{a_3}{f} + \frac{{}'a_3}{ff} + \frac{{}''a_3}{f^3} + \&c.$$

or, cette équation est la même que celle-ci

$$0 = 1 - \frac{A_3}{f} - \frac{{}'A_3}{ff} - \&c.$$

$$- \frac{A_1}{f} \cdot [1 - \frac{A_1}{f} - \&c.]$$

$$- \frac{{}^1A_1}{ff} \cdot [1 - \frac{A_1}{f} - \&c.]$$

& partant, elle eſt égale à la ſuivante;

$$0 = [1 - \frac{A_1}{f} - \frac{{}^1A_1}{ff} - \frac{{}^2A_1}{f^3} - \&c.] \cdot [1 - \frac{A_1}{f} - \frac{{}^1A_1}{ff} - \&c.]$$

En ſuivant le même procédé pour ${}_4y_x$, ${}_5y_x$, & généralement pour ${}_ny_x$, on transformera l'équation *(h)* du Problème dans la ſuivante.

$${}_ny_x = a_n \cdot {}_ny_{x-1} + {}^1a_n \cdot {}_ny_{x-2} + \&c. + {}_nu_x \quad (2)$$

qu'il ſera facile d'intégrer lorſqu'on connoîtra ${}_nu_x$ & les racines de l'équation

$$0 = 1 - \frac{a_n}{f} - \frac{{}^1a_n}{ff} - \frac{{}^2a_n}{f^3} - \&c.$$

or, on verra facilement que cette équation eſt la même que celle-ci,

$$0 = [1 - \frac{A_1}{f} - \frac{{}^1A_1}{ff} - \frac{{}^2A_1}{f^3} - \&c.] \cdot [1 - \frac{A_1}{f} - \frac{{}^1A_1}{ff} - \&c.] \&c.$$

$$\ldots\ldots [1 - \frac{A_n}{f} - \frac{{}^1A_n}{ff} - \&c.]$$

d'où il eſt facile de conclure a_n, ${}^1a_n$, &c.

Pour déterminer préſentement la valeur de ${}_nu_x$, j'obſerve que de l'équation

$${}_ny_x = a_n \cdot {}_ny_{x-1} + {}^1a_n \cdot {}_ny_{x-2} + \&c. + {}_nu_x \, (2),$$

on tire,

$$B_n \cdot {}_{n-1}y_x = B_n \cdot a_{n-1} \cdot {}_{n-1}y_{x-1} + B_n \cdot {}^1a_{n-1} \cdot {}_{n-1}y_{x-2} + \&c. + B_n \cdot {}_{n-1}u_x$$

$${}^1B_n \cdot {}_{n-1}y_{x-1} = {}^1B_n \cdot a_{n-1} \cdot {}_{n-1}y_{x-2} + {}^1B_n \cdot {}^1a_{n-1} \cdot {}_{n-1}y_{x-3} + \&c. + {}^1B_n \cdot {}_{n-1}u_{x-1}$$

&c.

Si l'on ajoute toutes ces équations membre-à-membre,

on aura,

$$B_n \cdot {}_{n-1}y_x + {}'B_n \cdot {}_{n-1}y_{x-1} + \&c.$$
$$= a_{n-1} \cdot [B_n \cdot {}_{n-1}y_{x-1} + {}'B_n \cdot {}_{n-1}y_{x-2} + \&c.]$$
$$+ {}'a_{n-1} \cdot [B_n \cdot {}_{n-1}y_{x-2} + \&c.]$$
$$+ \&c.$$
$$+ B_n \cdot {}_{n-1}u_x + {}'B_n \cdot {}_{n-1}u_{x-1} + \&c.$$

Or, si l'on subſtitue au lieu de

$$B_n \cdot {}_{n-1}y_x + {}'B_n \cdot {}_{n-1}y_{x-1} + \&c.$$
$$B_n \cdot {}_{n-1}y_{x-1} + {}'B_n \cdot {}_{n-1}y_{x-2} + \&c.$$

leurs valeurs données par l'équation du Problème, on aura

$$\begin{aligned} {}_ny_x - A_n \cdot {}_ny_{x-1} - \&c. &= a_{n-1} \cdot [{}_ny_{x-1} - A_n \cdot {}_ny_{x-2} - \&c. - N_n] \\ - N_n \quad & \quad + {}'a_{n-1} \cdot [{}_ny_{x-2} - \&c. - N_n] \\ & \quad + \&c. \\ & \quad + B_n \cdot {}_{n-1}u_x + {}'B_n \cdot {}_{n-1}u_{x-1} + \&c. \end{aligned}$$

en ordonnant les différens termes de cette équation, on aura

$$\begin{aligned} {}_ny_x = \; & {}_ny_{x-1} \cdot (a_{n-1} + A_n) \\ & + {}_ny_{x-2} \cdot ({}'a_{n-1} - a_{n-1} \cdot A_n + {}'A_n) \\ & + {}_ny_{x-3} \cdot ({}''a_{n-1} - {}'a_{n-1} \cdot A_n - a_{n-1} \cdot {}'A_n + {}''A_n) \\ & + \&c. \\ & + B_n \cdot {}_{n-1}u_x + {}'B_n \cdot {}_{n-1}u_{x-1} + \&c. \\ & + N_n \cdot (1 - a_{n-1} - {}'a_{n-1} - \&c.) \end{aligned}$$

Si l'on compare maintenant terme-à-terme cette dernière équation avec l'équation (2), on aura les ſuivantes

$$a_n = a_{n-1} + A_n,$$
$${}'a_n = {}'a_{n-1} - a_{n-1} \cdot A_n + {}'A_n,$$
$${}''a_n = {}''a_{n-1} - {}'a_{n-1} \cdot A_n - a_{n-1} \cdot {}'A_n + {}''A_n.$$
&c.

on pourroit en intégrant ces équations, déterminer a_n, $'a_n$, &c. s'il n'étoit pas beaucoup plus ſimple de les conclure par la méthode précédente.

Enfin on aura

$$_{n}u_{x} = N_{n}(1 - a_{n-1} - {}'a_{n-1} - {}^{2}a_{n-1} - \&c.) + B_{n} \cdot {}_{n-1}u_{x} + {}'B_{n} \cdot {}_{n-1}u_{x-1} + \&c. \quad (3)$$

Pour intégrer cette dernière équation, j'obſerve que puiſque $_{1}y_{x} = \varphi(x)$, on aura $_{1}u_{x} = \varphi(x)$, d'où je conclus

$$_{2}u_{x} = N_{2}[1 - a_{1} - \&c.] + B_{2} \cdot \varphi(x) + {}'B_{2} \cdot \varphi(x-1) + \&c.$$

on auroit de la même manière $_{3}u_{x}$, $_{4}u_{x}$, &c. & l'on voit qu'en procédant ainſi, on aura généralement

$$_{n}u_{x} = b_{n} \cdot \varphi(x) + {}'b_{n} \cdot \varphi(x-1) + {}^{2}b_{n} \cdot \varphi(x-2) + \&c. + C_{n} \quad (4)$$

donc,

$$_{n-1}u_{x} = b_{n-1} \cdot \varphi(x) + {}'b_{n-1} \cdot \varphi(x-1) + \&c. + C_{n-1}$$
$$_{n-1}u_{x-1} = b_{n-1} \cdot \varphi(x-1) + {}'b_{n-1} \cdot \varphi(x-2) + \&c. + C_{n-1}$$

&c.

ſi l'on ſubſtitue ces valeurs dans l'équation (3), on aura

$$_{n}u_{x} = N_{n}[1 - a_{n-1} - {}'a_{n-1} - \&c.] + C_{n-1}[B_{n} + {}'B_{n} + \&c.] + b_{n-1} \cdot B_{n} \cdot \varphi(x) + \varphi(x-1) \cdot [{}'b_{n-1} \cdot B_{n} + b_{n-1} {}'B_{n}] + \&c.$$

d'où, en comparant avec l'équation (4), on aura

$$b_{n} = B_{n} \cdot b_{n-1}$$
$${}'b_{n} = B_{n} \cdot {}'b_{n-1} + {}'B_{n} \cdot b_{n-1}$$

&c.

$$C_{n} = C_{n-1} \cdot [B_{n} + {}'B_{n} + \&c.] + N_{n} \cdot [1 - a_{n-1} - {}'a_{n-1} - \&c.]$$

En intégrant ces différentes équations, & ajoutant les conſtantes convenables, on aura les valeurs de b_{n}, ${}'b_{n}$, &c. C_{n}, & partant celle de $_{n}u_{x}$. Les conſtantes doivent être telles qu'en ſuppoſant $n = 1$, on ait $_{n}u_{x} = \varphi(x)$; en ſorte que l'on doit avoir $C_{1} = 0$, $b_{1} = 1$, ${}'b_{1} = 0$, ${}^{2}b_{1} = 0$, &c.

En intégrant l'équation (2) à laquelle ſe réduit l'équation du Problème, cette opération introduit dans l'expreſſion de $_{n}y_{x}$ des conſtantes arbitraires, leſquelles peuvent être fonctions de n, mais ces fonctions ne ſont pas arbitraires, puiſque

l'intégrale de l'équation *(h)* ne peut renfermer d'autre fonction arbitraire que $\varphi(x)$, on les déterminera de cette manière.

Si l'on nomme p_n, ${}^1p_n$, ${}^2p_n$, &c. les racines de l'équation

$$1 = \frac{a_n}{f} + \frac{{}^1a_n}{f^2} + \frac{{}^2a_n}{f^3} + \&c.$$

on aura par l'*art. X*,

$$_ny_x = C_n \cdot p_n^x + {}^1C_n \cdot {}^1p_n^x + {}^2C_n \cdot {}^2p_n^x + \&c. \ldots + {}_nL_x$$

Si l'on substitue cette expression de $_ny_x$ dans l'équation *(h)*, on en tirera, en comparant les termes homologues par rapport à x, autant d'équations différentielles qu'il y a de fonctions C_n, ${}^1C_n$, &c. & en intégrant ces équations on déterminera ces fonctions.

Au lieu de faire $_1y_x = \varphi(x)$, on peut imaginer une équation différentielle quelconque entre $_1y_x$ & x, je suppose que cette équation soit celle d'une suite récurrente, en sorte que l'on ait

$_1y_x = F \cdot {}_1y_{x-1} + {}^1F \cdot y_{x-2} + \&c. + L;\ F,\ F'$ &c. & L, étant constans; en suivant la méthode du Problème, on parviendra à l'équation suivante.

$$_ny_x = a_n \cdot {}_ny_{x-1} + {}^1a_n \cdot {}_ny_{x-2} + {}^2a_n \cdot {}_ny_{x-3} + \&c. + u_n \quad (5)$$

& l'on trouvera que l'équation

$$1 = \frac{a_n}{f} + \frac{{}^1a_n}{f^2} + \frac{{}^2a_n}{f^3} + \&c.$$

est la même que celle-ci,

$$0 = \left[1 - \frac{F}{f} - \frac{{}^1F}{f^2} - \&c.\right] \cdot \left[1 - \frac{A_1}{f} - \frac{{}^1A_1}{ff} - \&c.\right] \&c.$$
$$\ldots\ldots\left[1 - \frac{A_n}{f} - \frac{{}^1A_n}{f^2} - \&c.\right]$$

on aura ensuite

$$u_n = u_{n-1} \cdot [B_n + {}^1B_n + \&c.]$$
$$+ N_n \cdot [1 - a_{n-1} - a_{n-1} - \&c.]$$

d'où il sera facile de conclure la valeur de $_ny_x$.

Le cas dans lequel l'équation entre $_1y_x$ & x, est celle

d'une ſuite récurrente, eſt celui qui ſe rencontre le plus fréquemment dans l'application de cette Théorie.

On peut obſerver ici que les quantités B_n, $'B_n$, &c. n'entrent point dans la formation de a_n, $'a_n$, &c. mais ſimplement dans celle de u_n; d'où il ſuit que lorſque cette quantité eſt nulle, (ce qui doit arriver très-ſouvent), l'équation (5) reſtera la même quelles que ſoient les quantités B_n, $'B_n$, &c. de-là, il réſulte que dans ce cas, ces quantités n'influent dans la ſolution du Problème, que ſur la détermination des conſtantes arbitraires qui viennent de l'intégration de l'équation (5).

XXI.

Pour éclaircir la Théorie précédente par quelques exemples, je ſuppoſe que l'on ait les deux équations

$$_{1}y_x = 2 \cdot {}_{1}y_{x-1}$$
$$_{n}y_x = 2 \cdot {}_{n}y_{x-1} + 2 \cdot {}_{n-1}y_{x-1}$$

Si dans la première équation on fait $_1y_1 = 1$, on formera à ſon moyen la ſérie ſuivante 1 . 2 . 4 . 8 . 16, &c. La ſeconde équation donne $_2y_x = 2 \cdot {}_2y_{x-1} + 2 \cdot {}_1y_{x-1}$; & ſi l'on ſuppoſe $_2y_1 = 0$, on aura $_2y_2 = 2$, $_2y_3 = 8$, &c. on formera de cette manière, la ſuite, 0 . 2 . 8 . 24, &c. en continuant ainſi, & ſuppoſant toujours $_3y_1 = 0$, $_4y_1 = 0$, $_5y_1 = 0$, &c. on formera les ſuites *récurro-récurrentes.*

	1	2	3	4	5	6	7	8..... x.
1	1 .	2 .	4 .	8 .	16 .	32 .	64 .	128 .&c.
2	0 .	2 .	8 .	24 .	64 .	160 .	384 .	896 .&c.
3	0 .	0 .	4 .	24 .	96 .	320 .	960 .	2688 .&c.
4	0 .	0 .	0 .	8 .	64 .	320 .	1280 .	4480 .&c.
5	0 .	0 .	0 .	0 .	16 .	160 .	960 .	4480 .&c.
⋮ n	&c.							

Il faut présentement déterminer le terme général de ces suites, ou ce qui revient au même, l'expression de ${}_n y_x$.

Pour cela j'observe que l'on a, par l'article précédent,
$${}_n y_x = a_n \cdot {}_n y_{x-1} + {}'a_n \cdot {}_n y_{x-2} + \&c. \ldots + u_n.$$
ensuite l'équation
$$1 = \frac{a_n}{f} + \frac{{}'a_n}{f^2} + \&c.$$
est dans ce cas égale à celle-ci, $o = (1 - \frac{2}{f})^n$, dont toutes les racines sont égales à 2; on a de plus $u_n = 2 . u_{n-1}$: donc $u_n = H . 2^n$, or posant $n = 1$, $u_n = o$, donc $H = o$; on aura ainsi par l'*art. IX*,
$${}_n y_x = 2^{x-1} . \begin{cases} C_n \cdot \frac{(x-1).(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots(n-1)} + D_n \cdot \frac{(x-1).(x-2)\ldots(x-n+2)}{1.2.3\ldots(n-2)} \\ + E_n \cdot \frac{(x-1)\ldots(x-n+3)}{1.2.3\ldots(n-3)} + \&c. \end{cases}$$

Pour déterminer les constantes arbitraires C_n, D_n, &c. on substituera cette valeur de ${}_n y_x$ dans l'équation ${}_n y_x = 2 . {}_n y_{x-1} + 2 . {}_{n-1} y_{x-1}$; en observant que
$$\frac{(x-1).(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)} = \frac{(x-2).(x-3)\ldots(x-n)}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots(n-2)}$$
$$\frac{(x-1).(x-2)\ldots(x-n+2)}{1.2.3\ldots\ldots(n-2)} = \frac{(x-2)\ldots\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots(n-2)} + \frac{(x-2)\ldots(x-n+2)}{1.2.3\ldots(n-3)}$$
&c.

& l'on aura
$$C_n \cdot \frac{(x-2).(x-3)\ldots(x-n)}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)} + (C_n + D_n) \cdot \frac{(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots(n-2)}$$
$$+ (D_n + E_n) \cdot \frac{(x-2)\ldots(x-n+2)}{1.2.3\ldots\ldots(n-3)} + \&c.$$
$$= C_n \cdot \frac{(x-2)\ldots\ldots(x-n)}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)} + (D_n + C_{n-1}) \cdot \frac{(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots(n-2)}$$
$$+ (E_n + D_{n-1}) \cdot \frac{(x-2)\ldots(x-n+2)}{1.2.3\ldots\ldots(n-3)} + \&c.$$
En comparant terme-à-terme, on aura 1.° $C_n = C_{n-1}$. Donc, $C_n = A$. Or, posant $n = 1$, la quantité

$\frac{1.(x-1).(x-2)\dots(x-n+1)}{1.2.3\dots\dots(n-1)}$ se réduit à son 1.er facteur 1, & les quantités suivantes, $\frac{(x-1).(x-2)\dots(x-n+2)}{1.2.3\dots\dots(n-2)}$, &c. deviennent nulles; donc, ${}_1y_x = A . 2^{x-1}$. Or, on a ${}_1y_1 = 1$; donc $A = 1 = C_n$.

2.° $D_n = D_{n-1}$, partant, $D_n = A$, & ${}_2y_x = 2^{x-1}.[\frac{(x-1)}{1} + A]$. Or, posant $x = 1$, ${}_2y_1 = 0$, par la formation des suites précédentes; donc $A = 0$ & $D_n = 0$.

On trouvera semblablement $E_n = 0$, $F_n = 0$, &c. donc,

$${}_ny_x = 2^{x-1}.[\frac{(x-1).(x-2)\dots\dots(x-n+1)}{1.2.3\dots\dots(n-1)}].$$

Soit par exemple, $x = 8$ & $n = 5$, on aura

$${}_5y_8 = 2^7 . \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4} = 4480.$$

Je prends encore pour exemple les deux équations

$${}_1y_x = 2 . {}_1y_{x-1}$$
$${}_ny_x = (n+1) . {}_ny_{x-1} + {}_{n-1}y_{x-1}.$$

Si l'on suppose

$${}_1y_1 = 0,\ {}_2y_1 = 0,\ {}_3y_1 = 0,\ {}_4y_1 = 0,\ \text{\&c.}$$

on formera les séries suivantes:

	1	2	3	4	5	6	7	8.....x
1	1 .	2 .	4 .	8 .	16 .	32 .	64 .	&c.
2	0 .	1 .	5 .	19 .	65 .	211 .	665 .	&c.
3	0 .	0 .	1 .	9 .	55 .	285 .	1351 .	&c.
4	0 .	0 .	0 .	1 .	14 .	125 .	910 .	&c.
5	0 .	0 .	0 .	0 .	1 .	20 .	245 .	&c.
⋮ n	&c.							

Pour trouver maintenant le terme général de ces ſuites, ou l'expreſſion de ${}_{n}y_{x}$, j'obſerve que l'on a, par l'*art. précéd.*

$${}_{n}y_{x} = a_{n} \cdot {}_{n}y_{x-1} + {}^{1}a_{n} \cdot {}_{n}y_{x-2} + {}^{2}a_{n} \cdot {}_{n}y_{x-3} + \&c. \ldots + u_{n}$$

& que l'équation

$$1 = \frac{a_{n}}{f} + \frac{{}^{1}a_{n}}{f^{2}} + \frac{{}^{2}a_{n}}{f^{3}} + \&c.$$

eſt la même que celle-ci

$$0 = [1 - \tfrac{2}{f}] \cdot [1 - \tfrac{3}{f}] \cdot [1 - \tfrac{4}{f}] \ldots [1 - \tfrac{n+1}{f}];$$

enfin, que l'on a $u_{n} = 2 \cdot u_{n-1}$; d'où en intégrant $u_{n} = H \cdot 2^{n}$. Or poſant $n = 1$, $u_{1} = 0$, donc $H = 0$ & $u_{n} = 0$.

En intégrant, on aura donc

$$\begin{aligned} {}_{n}y_{x} = C_{n} \cdot 2^{x-1} + {}^{1}C_{n} \cdot 3^{x-1} + {}^{2}C_{n} \cdot 4^{x-1} \ldots \ldots \\ + {}^{n-1}C_{n} \cdot (n+1)^{x-1}, \end{aligned}$$

équation dans laquelle il faut préſentement déterminer les conſtantes arbitraires C_{n}, ${}^{1}C_{n}$, &c. Pour cela je ſubſtitue cette valeur de ${}_{n}y_{x}$ dans l'équation

$${}_{n}y_{x} = (n+1) \cdot {}_{n}y_{x-1} + {}_{n-1}y_{x-1},$$

ce qui me donne

$$\begin{aligned} & C_{n} \cdot 2^{x-1} + {}^{1}C_{n} \cdot 3^{x-1} + \&c. \\ = & (n+1) \cdot C_{n} \cdot 2^{x-2} + (n+1) \cdot {}^{1}C_{n} \cdot 3^{x-2} + \&c. \\ + & C_{n-1} \cdot 2^{x-2} + {}^{1}C_{n-1} \cdot 3^{x-2} + \&c. \end{aligned}$$

d'où en comparant terme-à-terme, j'aurai

$$\begin{aligned} 2 \cdot C_{n} &= (n+1) \cdot C_{n} + C_{n-1} \\ 3 \cdot {}^{1}C_{n} &= (n+1) \cdot {}^{1}C_{n} + {}^{1}C_{n-1} \\ &\&c. \end{aligned}$$

Il eſt viſible que la première équation ne commence à avoir lieu que lorſque $n = 2$; la ſeconde, lorſque $n = 3$; la troiſième, lorſque $n = 4$, &c. en intégrant la première, on aura $C_{n} = \frac{C_{1}}{(1-2)(1-3)(1-4)\ldots(1-n)}$. Or, puiſque

l'on a ${}_{1}y_x = 2^{x-1}$, on aura $C_1 = 1$; donc......
$C_n = \pm \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}$, le ſigne + ayant lieu ſi n eſt impair, & le ſigne — s'il eſt pair.

On aura pareillement $'C_n = \frac{'C_2}{(2-3).(2-4)\ldots(2-n)}$.
Or, poſant $n = 2$, on a
${}_{2}y_x = C_2 . 2^{x-1} + 'C_2 . 3^{x-1} = 'C_2 . 3^{x-1} - 2^{x-1}$.
Donc, puiſque ${}_{2}y_1 = 0$, on aura $'C_2 = 1$. Partant, $'C_n = \mp \frac{1}{1.2.3\ldots(n-2)}$, le ſigne + ayant lieu ſi n eſt pair, & le ſigne — s'il eſt impair. On trouvera, par un calcul ſemblable,

$$^{2}C_n = \pm \frac{1}{1.2} . \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(n-3)}$$
$$^{3}C_n = \mp \frac{1}{1.2.3} . \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(n-4)}$$
&c.

Donc,

$${}_{n}y_x = \pm . \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} . \left\{ \begin{array}{l} 2^{x-1} - \frac{(n-1)}{1} . 3^{x-1} + \frac{(n-1).(n-2)}{1.2} . 4^{x-1} \\ - \frac{(n-1).(n-2).n-3)}{1.2.3} . 5^{x-1} \ldots \pm (n+1)^{x-1} \end{array} \right\}$$

le ſigne + ayant lieu ſi n eſt impair, & le ſigne — s'il eſt pair. Soit $n = 4$ & $x = 7$, on aura

$${}_{4}y_7 = - \frac{1}{1.2.3} . [2^6 - 3 . 3^6 + 4 . 4^6 - 5^6] = 910.$$

XXII.

PROBLEME VII.

L'équation différentielle

$${}_{n}y_x + A_n . {}_{n}y_{x-1} + 'A_n . {}_{n}y_{x-2} + \&c. + N_n$$
$$= B_n . {}_{n-1}y_x + 'B_n . {}_{n-1}y_{x-1} + \&c.$$
$$+ C_n . {}_{n-}y_x + 'C_n . {}_{n-}y_{x-1} + \&c.$$

étant donnée, on propoſe de l'intégrer.

En suivant l'analyse du Problème précédent, je fais ${}_{1}y_{x} = \varphi(x)$ & ${}_{2}y_{x} = {}'\varphi(x)$; l'équation proposée donnera donc

$$\begin{aligned}&{}_{3}y_{x} + A_{3}\cdot{}_{3}y_{x-1} + {}'A_{3}\cdot{}_{3}y_{x-2} + \&c.\ldots + N_{3}\\ &\quad = B_{3}\cdot{}'\varphi(x) + {}'B_{3}\cdot{}'\varphi(x-1) + \&c.\\ &\quad + C_{3}\cdot\varphi(x) + {}'C_{3}\cdot\varphi(x-1) + \&c.\end{aligned}$$

&

$$\begin{aligned}&{}_{4}y_{x} + A_{4}\cdot{}_{4}y_{x-1} + {}'A_{4}\cdot{}_{4}y_{x-2} + \&c.\ldots + N_{4}\\ &\quad = B_{4}\cdot{}_{3}y_{x} + {}'B_{4}\cdot{}_{3}y_{x-1} + \&c.\\ &\quad + C_{3}\cdot{}'\varphi(x) + {}'C_{3}\cdot{}'\varphi(x-1) + \&c.\end{aligned}$$

d'où l'on tirera

$$\begin{aligned}&{}_{4}y_{x} + A_{4}\cdot{}_{4}y_{x-1} + {}'A_{4}\cdot{}_{4}y_{x-2} + \&c.\ldots + N_{4}\\ &\quad + A_{3}\cdot[{}_{4}y_{x-1} + A_{4}\cdot{}_{4}y_{x-2} + \&c.]\\ &\quad + \&c.\\ &\quad = B_{3}\cdot[{}_{3}y_{x} + A_{3}\cdot{}_{3}y_{x-1} + \&c.]\\ &\quad + {}'B_{3}\cdot[{}_{3}y_{x-1} + A_{3}\cdot{}_{3}y_{x-2} + \&c.]\\ &\quad + \&c.\\ &\quad + C_{3}\cdot{}'\varphi(x) + {}'C_{3}\cdot{}'\varphi(x-1) + \&c.\\ &\quad + A_{3}\cdot C_{3}\cdot{}'\varphi(x-1) + \&c.\end{aligned}$$

Or, si l'on substitue dans cette équation au lieu de

$$\begin{aligned}&{}_{3}y_{x} + A_{3}\cdot{}_{3}y_{x-1} + \&c.\\ &{}_{3}y_{x-1} + A_{3}\cdot{}_{3}y_{x-2} + \&c.\end{aligned}$$

leurs valeurs, on aura une équation de cette forme

$${}_{4}y_{x} = a_{4}\cdot{}_{4}y_{x-1} + {}'a_{4}\cdot{}_{4}y_{x-2} + {}^{2}a_{4}\cdot{}_{4}y_{x-3} + \&\ldots + {}_{4}u_{x}.$$

Cette équation s'intégrera par ce qui précède, dès que l'on connoîtra ${}_{4}u_{x}$ & les racines de l'équation

$$1 = \frac{a_{4}}{f} + \frac{{}'a_{4}}{f^{2}} + \frac{{}^{2}a_{4}}{f^{3}} + \&c.$$

Or, il eſt aiſé de voir que cette équation eſt la même que celle-ci,

$$o = \left[1 + \frac{A_1}{f} + \frac{'A_1}{f^2} + \&c.\right] . \left[1 + \frac{A_4}{f} + \frac{'A_4}{f^2} + \&c.\right]$$

En ſuivant le même procédé pour ${}_5y_x$, ${}_6y_x$, &c. & généralement pour ${}_ny_x$, on parviendra à une équation de cette forme

$${}_ny_x = a_n . {}_ny_{x-1} + {}'a_n . {}_ny_{x-2} + {}^2a_n . {}_ny_{x-3} + \&c. ... + {}_nu_x (\Lambda),$$

équation qui ſera facilement intégrable, lorſqu'on connoîtra ${}_nu_x$ & les racines de l'équation

$$1 = \frac{a_n}{f} + \frac{'a_n}{f^2} + \frac{{}^2a_n}{f^3} + \&c.$$

Or, on trouvera facilement que cette équation eſt la même que celle-ci,

$$o = \left[1 + \frac{A_1}{f} + \frac{'A_1}{f^2} + \&c.\right] . \left[1 + \frac{A_4}{f} + \frac{'A_4}{f^2} + \&c.\right] ...$$
$$\left[1 + \frac{A_n}{f} + \frac{'A_n}{f^2} + \&c.\right]$$

d'où il eſt facile de conclure a_n, $'a_n$, &c.

Pour déterminer préſentement ${}_nu_x$, j'obſerve que l'équation (Λ), combinée avec celle du Problème, donne la ſuivante

$$\begin{aligned}{}_ny_x - a_n . {}_ny_{x-1} - {}'a_n . {}_ny_{x-2} - \&c. &+ N_n [1 - a_n - {}'a_n - \&c.] \\ &+ A_n . [{}_ny_{x-1} - {}'a_n . {}_ny_{x-2} - \&c.] \\ &+ \&c. \\ &= B_n \; [{}_{n-1}y_x - a_n . {}_{n-1}y_{x-1} - \&c.] \\ &+ \&c. \\ &+ C_n . [{}_{n-2}y_x - a_n . {}_{n-2}y_{x-1} - \&c.] \\ &+ \&c.\end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned}{}_ny_x &- a_n . {}_ny_{x-1} - \&c. = {}_nu_x \\ {}_ny_{x-1} &- a_n . {}_ny_{x-2} - \&c. = {}_nu_{x-1} \\ &\&c.\end{aligned}$$

de plus, $_{n-1}y_x - a_n \cdot {}_{n-1}y_{x-1} - {}'a_n \cdot {}_{n-1}y_{x-2} - \&c.$

$$= {}_{n-2}y_x - a_{n-1} \cdot {}_{n-1}y_{x-1} - \&c.$$
$$+ A_n \cdot [{}_{n-1}y_{x-1} - a_{n-1} \cdot {}_{n-1}y_{x-2} - \&c.]$$
$$+ \&c.$$
$$= {}_{n-1}u_x + A_n \cdot {}_{n-1}u_{x-1} + \&c.$$

pareillement,

$$\left.\begin{array}{l} {}_{n-2}y_x - a_{n-1} \cdot {}_{n-2}y_{x-1} - \&c. \\ = {}_{n-2}y_x - a_{n-2} \cdot {}_{n-2}y_{x-1} - \&c. \\ + A_{n-1} [{}_{n-2}y_{x-1} - \&c.] \\ + \&c. \end{array}\right\} = {}_{n-2}u_x + A_{n-1} \cdot {}_{n-2}u_{x-1} + \&c.$$

$$\& \; {}_{n-1}y_x - a_n \cdot {}_{n-2}y_{x-1} - \&c. = {}_{n-2}y_x - a_{n-1} \cdot {}_{n-2}y_{x-1} - \&c.$$
$$+ A_n \cdot [{}_{n-2}y_{x-1} - \&c.]$$
$$+ \&c.$$
$$= {}_{n-2}u_x + A_{n-1} \cdot {}_{n-2}u_{x-1} + \&c.$$
$$+ A_n \cdot [{}_{n-2}u_{x-1} + A_{n-1} \cdot {}_{n-2}u_{x-2} + \&c.]$$
$$+ \&c.$$

donc,

$$\begin{array}{l} {}_nu_x + A_n \cdot {}_nu_{x-1} + {}'A_n \cdot {}_nu_{x-2} + \&c. + N_n [1 - a_n - {}'a_n - \&c.] \\ = B_n \cdot [{}_{n-1}u_x + A_n \cdot {}_{n-1}u_{x-1} + \&c.] + {}'B_n \cdot [{}_{n-1}u_{x-1} + \&c.] + \&c. \\ + C_n \left\{\begin{array}{l} {}_{n-2}u_x + A_{n-1} \cdot {}_{n-2}u_{x-1} + \&c. \\ + A_n [{}_{n-2}u_{x-1} + A_{n-1} \cdot {}_{n-2}u_{x-2} + \&c.] \\ + \&c. \end{array}\right. \\ + \&c. \end{array} \qquad (V)$$

pour intégrer cette équation, on obſervera que la valeur de ${}_nu_x$ doit avoir cette forme,

$$\begin{array}{l} {}_nu_x = b_n \cdot \varphi(x) + {}'b_n \cdot \varphi(x-1) + {}^2b_n \cdot \varphi(x-2) + \&c. \\ + c_n \cdot {}'\varphi(x) + {}'c_n \cdot {}'\varphi(x-1) + {}^2c_n \cdot {}'\varphi(x-2) + \&c. + g_n \end{array}$$

Il ne s'agit plus maintenant que de déterminer b_n, ${}'b_n$, &c. c_n, ${}'c_n$, &c. g_n. Pour cela, on ſubſtituera cette valeur de

${}_n u_x$ dans l'équation (V), ce qui donne

$$b_n . \varphi(x) + \varphi(x-1) . [{}'b_n + A_n . b_n] + \&c.$$
$$+ c_n . {}'\varphi(x) + {}'\varphi(x-1) . [{}'c_n + A_n . c_n] + \&c.$$
$$= \varphi(x) . [B_n . b_{n-1} + C_n . b_{n-2}]$$
$$+ \varphi(x-1) . \left\{ \begin{array}{l} B_n . {}'b_{n-1} + B_n . A_n . b_{n-1} \\ + {}'B_n . b_{n-1} + C_n . {}'b_{n-2} \\ + C_n . A_{n-1} . b_{n-2} + C_n . A_n . b_{n-2} \\ + {}'C_n . b_{n-2} \end{array} \right.$$
$$+ \&c.$$
$$+ {}'\varphi(x) . [B_n . c_{n-1} + C_n . c_{n-2}]$$
$$+ {}'\varphi(x-1) . \left\{ \begin{array}{l} B_n . {}'c_{n-1} + B_n . A_n . c_{n-1} + {}'B_n . c_{n-1} \\ + C_n . {}'c_{n-2} + C_n . A_{n-1} . c_{n-2} + C_n . A_n . c_{n-2} \\ + {}'C_n . c_{n-2} \end{array} \right.$$
$$+ \&c.$$

d'où l'on aura

$$b_n = B_n . b_{n-1} + C_n . b_{n-2}$$
$${}'b_n = B_n . {}'b_{n-1} + C_n . {}'b_{n-2} + b_{n-1} . [B_n . A_n + {}'B_n + C_n . A_{n-1}]$$
$$+ b_{n-2} . [C_n . A_n + \quad + {}'C_n]$$
$$\&c.$$
$$c_n = B_n . c_{n-1} + C_n . c_{n-2}$$
$$\&c.$$

en intégrant, on aura les valeurs de b_n, ${}'b_n$, &c. c_n, ${}'c_n$, &c.

Ces équations montant aux secondes différences, leur intégrale doit renfermer deux constantes arbitraires. Or, en supposant $n = 1$, ${}_n y_x = \varphi(x)$. On doit donc avoir alors

$$b_n = 1, \; {}'b_n = 0, \; {}^2b_n = 0, \; \&c.$$
$$c_n = 0, \; {}'c_n = 0, \; {}^2c_n = 0, \; \&c.$$

De plus, en supposant $n = 2$, ${}_n y_x = {}'\varphi(x)$. Donc alors

$$b_n = 0, \; {}'b_n = 0, \; {}^2b_n = 0, \; \&c.$$
$$c_n = 1, \; {}'c_n = 0, \; {}^2c_n = 0, \; \&c.$$

Au

au moyen de ces conditions, il ſera facile de déterminer les conſtantes arbitraires. Connoiſſant ainſi l'expreſſion de ${}_nu_x$, il ne s'agira plus que d'intégrer l'équation (Λ), & les conſtantes arbitraires que l'intégration introduit, leſquelles peuvent être fonctions de n, ſe détermineront par la méthode que j'ai donnée *article XX.*

Si au lieu des deux équations

$$ {}_1y_x = \varphi\,(x) $$
$$ {}_2y_x = {}'\varphi\,(x), $$

on avoit les deux ſuivantes:

$$ {}_1y_x + E.{}_1y_{x-1} + {}'E.{}_1y_{x-2} + \text{\&c.} + K = 0. $$
$$ {}_2y_x + H.{}_2y_{x-1} + {}'H.{}_2y_{x-2} + \text{\&c.} + L $$
$$ = F.{}_1y_x + {}'F.{}_1y_{x-1} + \text{\&c.} $$

On parviendra, par la méthode précédente, à une équation de cette forme:

$$ {}_ny_x = a_n.{}_ny_{x-1} + {}'a_n.{}_ny_{x-2} + \text{\&c.} + {}_nu_x, $$

& l'on trouvera que l'équation

$$ 1 = \frac{a_n}{f} + \frac{{}'a_n}{f^2} + \text{\&c. eſt la même que celle-ci.} $$

$$ 0 = \left[1 + \frac{E}{f} + \frac{{}'E}{f^2} + \text{\&c.}\right].\left[1 + \frac{H}{f} + \frac{{}'H}{f^2} + \text{\&c.}\right]. $$
$$ \left[1 + \frac{A_3}{f} + \text{\&c.}\right]\ldots\ldots\left[1 + \frac{A_n}{f} + \text{\&c.}\right] $$

Pour déterminer u_n, on doit obſerver que dans ce cas l'équation (V) devient

$$ u_n[1 + A_n + {}'A_n + \text{\&c.}] + N_n.[1 - a_n - {}'a_n - \text{\&c.}] $$
$$ = u_{n-1}[1 + A_n + \text{\&c.}].[B_n + {}'B_n + \text{\&c.}] $$
$$ + u_{n-2}[1 + A_{n-1} + \text{\&c.}].[1 + A_n + \text{\&c.}].[C_n + \text{\&c.}] $$

or, $1 - a_n - {}'a_n - \text{\&c.} = [1 - a_{n-1} - {}'a_{n-1} - \text{\&c.}].$
$[1 + A_n + {}'A_n + \text{\&c.}].$

$$\text{donc, } u_n = N_n \left\{ \begin{matrix} a_{n-1} + {}'a_{n-1} + \&c. \\ -1 \end{matrix} \right\}$$

$$+ u_{n-1} . [B_n + {}'B_n + \&c.]$$

$$+ u_{n-2} . [1 + A_{n-1} + \&c.] . [C_n + {}'C_n + \&c.]$$

cette équation étant différentielle du second ordre, renferme deux constantes arbitraires; elles se détermineront au moyen des valeurs de u_1 & u_2. Or, on a

$$u_1 = - L$$

$$\& \; u_2 = - L . [1 + E + {}'E + \&c.]$$

$$- K . [F + {}'F + \&c.]$$

XXIII.

Quoique dans les deux derniers Problèmes, les équations aux différences partielles considérées par rapport à la variable n, ne passent pas le second ordre, on voit cependant que la méthode réussira généralement, quel que soit le degré de la différence des variables. Cette méthode suppose à la vérité que ${}_1y_x$, ou ${}_1y_x$ & ${}_2y_x$, &c. suivant le degré de la différence de n, sont données en fonctions de x, ou par des équations linéaires entre x & ces quantités; or, il peut arriver que cela ne soit pas. Je suppose, par exemple, que l'on ait les équations suivantes:

$${}_1y_x = {}_2y_{x-1}$$

$${}_2y_x = {}_1y_{x-1} + {}_3y_{x-1}$$

. . . .

$${}_ny_x = {}_{n-1}y_{x-1} + {}_{n+1}y_{x-1}$$

. . . .

$${}_my_x = {}_{m-1}y_{x-1}$$

L'équation ${}_ny_x = {}_{n-1}y_{x-1} + {}_{n+1}y_{x-1}$, est aux différences partielles; mais elle diffère des équations précédentes: 1.° en ce que ${}_1y_x$ & ${}_2y_x$ ne sont point données en fonctions de x, ou par deux équations différentielles. 2.° En ce qu'elle

cesse d'avoir lieu lorsque $n = m$. Comme ce genre d'équations se rencontre quelquefois, & principalement dans l'analyse des hasards, je vais donner ici la manière de les intégrer.

J'observe pour cela, que si l'on pouvoit réduire l'équation ${}_ny_x = {}_{n-1}y_{x-1} + {}_{n+1}y_{x-1}$, laquelle est du troisième ordre par rapport à n, à une autre du second ordre, le Problème seroit résolu; je suppose en effet que l'équation du second ordre soit

$$\begin{aligned} {}_ny_x &= a_n \cdot {}_ny_{x-1} + {}'a_n \cdot {}_ny_{x-2} + \&c. \ldots + u_n \\ &+ b_n \cdot {}_{n+1}y_x + {}'b_n \cdot {}_{n+1}y_{x-1} + \&c. \end{aligned}$$

Dans le cas de $n = m - 1$, on aura

$$\begin{aligned} {}_{m-1}y_x &= a_{m-1} \cdot {}_{m-1}y_{x-1} + {}'a_{m-1} \cdot {}_{m-1}y_{x-2} + \&c. + u_{m-1} \\ &+ b_{m-1} \cdot {}_my_x + \&c. \end{aligned}$$

d'où éliminant ${}_{m-1}y_x$, au moyen de l'équation ${}_my_x = {}_{m-1}y_{x-1}$, on aura une équation aux différences ordinaires entre x & ${}_my_x$.

Toute la difficulté consiste donc à abaisser l'équation du troisième ordre par rapport à n;

$${}_ny_x = {}_{n-1}y_{x-1} + {}_{n+1}y_{x-1}$$

à une du second ordre; c'est l'objet du Problème suivant.

PROBLEME VIII.

L'équation aux différences partielles du second ordre par rapport à n,

$$\begin{aligned} {}_ny_x &= A_n \cdot {}_ny_{x-1} + {}'A_n \cdot {}_ny_{x-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + N_n \\ &+ B_n \cdot {}_{n+1}y_x + {}'B_n \cdot {}_{n+1}y_{x-1} + {}^2B_n \cdot {}_{n+1}y_{x-2} + \&c. \quad (\gamma) \\ &+ C_n \cdot {}_{n-1}y_x + {}'C_n \cdot {}_{n-1}y_{x-1} + {}^2C_n \cdot {}_{n-1}y_{x-2} + \&c. \end{aligned}$$

étant donnée, il faut l'abaisser à une autre du premier ordre par rapport à n.

Il est nécessaire pour cela que dans une supposition particulière pour n, cette équation se réduise à une du premier ordre. Je suppose donc qu'en faisant $n = 2$, on ait celle-ci;

$$\begin{aligned} {}_1y_x &= F\,.\,{}_1y_{x-1} + {}'F\,.\,{}_1y_{x-2} + \&c. + L \\ &\quad + H\,.\,{}_1y_x \quad + {}'H\,.\,{}_1y_{x-1} + \&c. \end{aligned} \qquad (\eta)$$

Il est aisé de voir, cela posé, que l'équation (γ) peut toujours être transformée dans la suivante (θ) du second ordre par rapport à n.

$$\begin{aligned} {}_ny_x = a_n\,.\;{}_ny_{x-1} + {}'a_n\,.\;{}_ny_{x-2} + {}^2a_n\,.\;{}_ny_{x-3} + \&c.\ldots + u_n \\ + b_n\,.\,{}_{n+1}y_x \quad + {}'b_n\,.\,{}_{n+1}y_{x-1} + {}^2b_n\,.\,{}_{n+1}y_{x-2} + \&c. \end{aligned} \qquad (\theta)$$

dont on déterminera les coëfficiens a_n, $'a_n$, &c. b_n, $'b_n$, &c. de cette manière ; l'équation (θ) donne celle-ci.

$$C_n\,.\,{}_{n-1}y_x \quad = C_n\,.\begin{cases} a_{n-1}\,.\,{}_{n-1}y_{x-1} \;+\; {}'a_{n-1}\,.\,{}_{n-1}y_{x-2} \\ + {}^2a_n\,.\,{}_{n-1}y_{x-3} + \&c.\ldots + u_{n-1} \\ + b_{n-1}\,.\,{}_ny_x \;+\; {}'b_{n-1}\,.\,{}_ny_{x-1} \\ + {}^2b_{n-1}\,.\,{}_ny_{x-2} + \&c. \end{cases}$$

$${}'C_n\,.\,{}_{n-1}y_{x-1} = {}'C_n\,.\begin{cases} a_{n-1}\,.\,{}_{n-1}y_{x-2} \;+\; {}'a_{n-1}\,.\,{}_{n-1}y_{x-3} \\ + \&c.\ldots\ldots\ldots + u_{n-1} \\ + b_{n-1}\,.\,{}_ny_{x-1} \;+\; {}'b_{n-1}\,.\,{}_ny_{x-2} \\ + \&c. \end{cases}$$

&c.

Si l'on ajoute ces différentes équations membre-à-membre, & que l'on substitue dans leur somme, au lieu de

$$\begin{aligned} &C_n\,.\,{}_{n-1}y_x \quad + {}'C_n\,.\,{}_{n-1}y_{x-1} + \&c. \\ &C_n\,.\,{}_{n-1}y_{x-1} + {}'C_n\,.\,{}_{n-1}y_{x-2} + \&c. \end{aligned}$$

leurs valeurs que fournit l'équation (γ), on aura, après avoir ordonné

$$\begin{aligned} {}_ny_x = {}&{}_ny_{x-1}\,.\,\frac{\left\{\begin{matrix} a_{n-1} + A_n \\ + b_{n-1}.{}'C_n + {}'b_{n-1}.C_n \end{matrix}\right\}}{1 - b_{n-1}.C_n} \\ &+ {}_ny_{x-2}\,.\left\{\begin{matrix} {}'a_{n-1} - a_{n-1}.A_n + {}'A_n \\ + b_{n-1}.{}^2C_n + {}'b_{n-1}.{}'C_n + {}^2b_{n-1}.C_n \end{matrix}\right\} \\ &+ {}_ny_{x-3}\,.\,\frac{\left\{\begin{matrix} {}^2a_{n-1} - {}'a_{n-1}.A_n - a_{n-1}.{}'A_n + {}^2A_n \\ + b_{n-1}.{}^3C_n + {}'b_{n-1}.{}^2C_n + {}^2b_{n-1}.{}'C_n + {}^3b_{n-1}.C_n \end{matrix}\right\}}{1 - b_{n-1}.C_n} \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

$$+ {}_{n+1}y_{x-1} \cdot \frac{B_n}{1 - b_{n-1} \cdot C_n}$$

$$+ {}_{n+1}y_{x-1} \cdot \frac{({}^1B_n - a_{n-1} \cdot B_n)}{1 - b_{n-1} \cdot C_n}$$

$$+ {}_{n+1}y_{x-1} \cdot \frac{({}^2B_n - a_{n-1} \cdot {}^1B_n - {}^1a_{n-1} \cdot B_n)}{1 - b_{n-1} \cdot C_n}$$

+ &c.

$$+ u_{x-1} \cdot \frac{C_n + {}^1C_n + {}^2C_n + \&c.}{1 - b_{n-1} \cdot C_n}$$

$$+ N_n \cdot \frac{(1 - a_{n-1} - {}^1a_{n-1} - {}^2a_{n-1} - \&c.)}{1 - b_{n-1} \cdot C_n}$$

En comparant cette équation avec l'équation (θ), on aura

1.° $b_n = \dfrac{B_n}{1 - C_n \cdot b_{n-1}}$.

Pour intégrer cette équation, je fais $b_n = -\dfrac{z_{n-1}}{z_n}$; ce qui donne $0 = z_{n-1} + C_n \cdot z_{n-1} + B_n \cdot z_n$; équation linéaire aux différences ordinaires.

2.° ${}^1b_n = \dfrac{{}^1B_n - a_{n-1} \cdot B_n}{1 - C_n \cdot b_{n-1}}$

3.° $a_n = \dfrac{A_n + a_{n-1} + {}^1b_{n-1} \cdot C_n + b_{n-1} \cdot {}^1C_n}{1 - C_n \cdot b_{n-1}}$

de la première de ces équations on aura

$${}^1b_{n-1} = \frac{{}^1B_{n-1} - a_{n-2} \cdot B_{n-1}}{1 - C_{n-1} \cdot b_{n-2}};$$

subſtituant cette valeur de b_{n-1} dans la ſeconde, on aura

$$a_n = \frac{A_n + a_{n-1} + C_n \dfrac{({}^1B_{n-1} - a_{n-2} \cdot B_{n-1})}{1 - C_{n-1} \cdot b_{n-2}} + b_{n-1} \cdot {}^1C_n}{1 - C_{n-1} \cdot b_{n-1}}$$

d'où l'on aura a_n, partant ${}^1b_n$, & ainſi du reſte.

Enfin, on déterminera u_n par cette équation

$$u_n = u_{n-1} \cdot \frac{(C_n + {}^1C_n + \&c.) + N_n \cdot (1 - a_{n-1} - {}^1a_{n-1} - \&c.)}{1 - C_n \cdot b_{n-1}}$$

L'équation (γ) du ſecond ordre par rapport à n, ſera donc abaiſſée à une autre (θ) du premier ordre; & l'on voit que la méthode précédente réuſſira généralement, quel que ſoit l'ordre de la propoſée.

XXIV.

Des Équations aux différences finies & partielles à quatre variables.

Juſques ici j'ai conſidéré les équations aux différences partielles entre trois variables ${}_{n}y_{x}$, n & x; je vais préſentement dire un mot de celles qui en renferment un plus grand nombre.

Je ſuppoſe que ${}_{(m)(n)}y_{x}$ repréſente une fonction des trois variables x, m & n, dont je regarde les différences comme conſtantes & égales à l'unité, je puis dans cette fonction, faire varier m, n & x ſéparément, ou deux de ces quantités à la fois, ou toutes trois enſemble dans un rapport quelconque; or, s'il exiſte une équation entre ces différentes variations, elle ſera ce que je nomme équation aux différences partielles à quatre variables; cela poſé.

PROBLEME IX.

Je ſuppoſe que l'on ait l'équation aux différences partielles à quatre variables,

$$
\begin{aligned}
&{}_{(m)(n)}y_{x} + {}_{m}A_{n}\cdot{}_{(m)(n)}y_{x-1} + {}_{m}{}^{1}A_{n}\cdot{}_{(m)(n)}y_{x-2} + \&c\ldots\ldots + {}_{m}N_{n}\\
&+ {}_{m}B_{n}\cdot{}_{(m)(n-1)}y_{x} + {}_{m}{}^{1}B_{n}\cdot{}_{(m)(n-1)}y_{x-1} + {}_{m}{}^{2}B_{n}\cdot{}_{(m)(n-1)}y_{x-2} + \&c. \quad (\Omega)\\
&= {}_{m}C_{n}\cdot{}_{(m-1)(n)}y_{x} + {}_{m}{}^{1}C_{n}\cdot{}_{(m-1)(n)}y_{x-1} + {}_{m}{}^{2}C_{n}\cdot{}_{(m-1)(n)}y_{x-2} + \&c.
\end{aligned}
$$

on propoſe de déterminer ${}_{(m)(n)}y_{x}$

Je ſuppoſe que dans le cas de $n = 1$, on ait, ou l'on puiſſe avoir, l'équation ſuivante.

$$
{}_{(m)(1)}y_{x} + D_{m}\cdot{}_{(m)(1)}y_{x-1} + {}^{1}D_{m}{}_{(m)(1)}y_{x-2} + \&c. + L_{m} = 0
$$

& que dans le cas de $m = 1$ on ait, ou l'on puiſſe avoir, celle-ci,

$_{(1)(n)}y_x + E_n \cdot {}_{(1)(n)}y_{x-1} + {}'E_n \cdot {}_{(1)(n)}y_{x-2} + \&c. \ldots + {}'H_n = 0,$
on pourra dans ce cas transformer l'équation (Ω) dans la suivante.

$$_{(m)(n)}y_x = {}_m a_n \cdot {}_{(m)(n)}y_{x-1} + {}_m{}^1a_n \cdot {}_{(m)(n)}y_{x-2} + {}_m{}^2a_n \cdot {}_{(m)(n)}y_{x-3} + \&c. \ldots + {}_m u_n \quad (\pi)$$

dont on déterminera les coëfficiens de cette manière.

Cette équation donne

$$_mC_n \cdot {}_{(m-1)(n)}y_x = {}_mC_n \cdot [{}_{m-1}a_n \cdot {}_{(m-1)(n)}y_{x-1} + {}_{m-1}{}^1a_n \cdot {}_{(m-1)(n)}y_{x-2} + \&c. \ldots + {}_{m-1}u_n]$$
$$_mC_n \cdot {}_{(m-1)(n)}y_{x-1} = {}_mC_n \cdot [{}_{m-1}a_n \cdot {}_{(m-1)(n)}y_{x-2} + {}_{m-1}{}^1a_n \cdot {}_{(m-1)(n)}y_{x-3} + \&c. \ldots + {}_{m-1}u_n]$$
&c.

Si l'on ajoute toutes ces équations membre-à-membre, & qu'on élimine les quantités

$$_mC_n \cdot {}_{(m-1)(n)}y_x + {}_m{}^1C_n \cdot {}_{(m-1)(n)}y_{x-1} + \&c.$$
$$_mC_n \cdot {}_{(m-1)(n)}y_{x-1} + {}_m{}^1C_n \cdot {}_{(m-1)(n)}y_{x-2} + \&c.$$

au moyen de l'équation (Ω), on aura

$$\begin{aligned} _{(m)(n)}y_x = &\ {}_{(m)(n)}y_{x-1} \cdot [{}_{m-1}a_n - {}_mA_n] \\ &+ {}_{(m)(n)}y_{x-2} \cdot [{}_{m-1}{}^1a_n + {}_{m-1}a_n \cdot {}_mA_n - {}_m{}^1A_n] \\ &+ {}_{(m)(n)}y_{x-3} \cdot [{}_{m-1}{}^2a_n + {}_{m-1}{}^1a_n \cdot {}_mA_n + {}_{m-1}a_n \cdot {}_mA_n - {}_m{}^2A_n] \\ &+ \&c. \\ &- {}_{(m)(n-1)}y_x \cdot {}_mB_n \qquad (\sigma) \\ &+ {}_{(m)(n-1)}y_{x-1} \cdot [- {}_m{}^1B_n + {}_{m-1}a_n \cdot {}_mB_n] \\ &+ {}_{(m)(n-1)}y_{x-2} \cdot [- {}_m{}^2B_n + {}_{m-1}{}^1a_n \cdot {}_mB_n + {}_{m-1}a_n \cdot {}_m{}^1B_n] \\ &+ \&c. \\ &+ {}_{m-1}u_n \cdot [{}_mC_n + {}_m{}^1C_n + \&c.] \\ &- {}_mN_n \cdot [1 - {}_{m-1}a_n - {}_{m-1}{}^1a_n - \&c.] \end{aligned}$$

Cette équation eſt aux différences partielles entre trois variables en conſidérant m comme conſtante, & elle eſt compriſe dans celle du *Problème VI de l'article XX.* Or, puiſque l'équation (σ) peut être transformée dans l'équation (π), on aura par l'*art. XX*, les équations ſuivantes.

$$_ma_n = {}_ma_{n-1} + {}_{m-1}a_n - {}_mA_n$$

$$_m{}^1a_n = {}_m{}^1a_{n-1} + {}_{m-1}{}^1a_n + {}_{m-1}a_n \cdot {}_mA_n - {}_m{}^1A_n$$
$$- {}_ma_{n-1} \cdot [{}_{m-1}a_n - {}_mA_n]$$

&c.

$$_mu_n = {}_mu_{n-1} \cdot [- {}_mB_n - {}_m{}^1B_n + {}_{m-1}a_n \cdot {}_mB_n + \&c.]$$
$$+ {}_{m-1}u_n \cdot [{}_mC_n + {}_m{}^1C_n + \&c.] \cdot [1 - {}_ma_{n-1} - {}_m{}^1a_{n-1} - \&c.]$$
$$- {}_mN_n \cdot [1 - {}_{m-1}a_n - {}_{m-1}{}^1a_n - \&c.] \cdot [1 - {}_ma_{n-1} - {}_m{}^1a_{n-1} - \&c.]$$

Ces équations ſont aux différences partielles à trois variables; pour les intégrer, j'obſerve qu'elles ſont toutes compriſes dans celle-ci.

$$_ny_x = {}_nR_x \cdot {}_ny_{x-1} + {}_nT_x \cdot {}_{n-1}y_x + {}_nM_x \; (b).$$

Je ſuppoſe donc que dans le cas de $n = 1$, on ait $_1y_x = \varphi\,(x)$. Cela poſé, on pourra toujours transformer l'équation *(b)* dans la ſuivante.

$$_ny_x = {}_nb_x \cdot {}_ny_{x-1} + {}_n{}^1b_x \cdot {}_ny_{x-2} + {}_n{}^2b_x \cdot {}_ny_{x-3} + \&c.\ldots$$
$$+ {}_nz_x \; (l)$$

d'où l'on aura celle-ci;

$$_{n-1}y_x \cdot {}_nT_x = {}_nT_x \cdot [{}_{n-1}b_x \cdot {}_{n-1}y_{x-1} + {}_{n-1}{}^1b_x \cdot {}_{n-1}y_{x-2} + \&c.]$$
$$+ {}_nT_x \cdot {}_{n-1}z_x$$

Si l'on y ſubſtitue au lieu de $_nT_x \cdot {}_{n-1}y_x$, $_nT_x \cdot {}_{n-1}y_{x-1}$, &c. leurs valeurs tirées de l'équation *(b)*, on aura

$$_ny_x = {}_nR_x \cdot {}_ny_{x-1} + {}_nM_x$$
$$+ {}_{n-1}b_x \cdot [{}_ny_{x-1} - {}_nR_{x-1} \cdot {}_ny_{x-2} - {}_nM_{x-1}] \cdot \frac{{}_nT_x}{{}_nT_{x-1}}$$
$$+ {}_{n-1}{}^1b_x \cdot [{}_ny_{x-2} - {}_nR_{x-2} \cdot {}_ny_{x-3} - {}_nM_{x-2}] \cdot \frac{{}_nT_x}{{}_nT_{x-2}}$$
$$+ \&c.$$
$$+ {}_nT_x \cdot {}_{n-1}z_x$$

d'où l'on tirera, en comparant cette équation avec l'équation *(l)*,

$$_nb_x = {}_{n-1}b_x \cdot \frac{{}_nT_x}{{}_nT_{x-1}} + {}_nR_x$$

&c.

$_nz_x$

$$ {}_{n}z_{x} = {}_{n-1}z_{x} \cdot {}_{n}T_{x} + {}_{n}M_{x} - {}_{n-1}b_{x} \cdot {}_{n}M_{x-1} \cdot \frac{{}_{n}T_{x}}{{}_{n}T_{x-1}} $$
$$ - \&c. $$

équations qui s'intègrent facilement par le Problème I.er en regardant n seule comme variable.

On pourroit faire des recherches analogues sur les équations aux différences partielles à cinq, six, &c. variables, & l'on voit que la méthode précédente réussira généralement, quel que soit le nombre de ces variables.

XXV.

Application des Recherches précédentes à l'analyse des Hasards.

L'état présent du système de la Nature est évidemment une suite de ce qu'il étoit au moment précédent, & si nous concevons une Intelligence qui, pour un instant donné, embrasse tous les rapports des êtres de cet Univers, elle pourra déterminer pour un temps quelconque pris dans le passé ou dans l'avenir, la position respective, les mouvemens, & généralement les affections de tous ces êtres.

L'Astronomie-Physique, celle de toutes nos connoissances qui fait le plus d'honneur à l'esprit humain, nous offre une idée, quoiqu'imparfaite, de ce que seroit une semblable Intelligence. La simplicité de la loi qui fait mouvoir les Corps célestes, les rapports de leurs masses & de leurs distances, permettent à l'analyse de suivre, jusqu'à un certain point, leurs mouvemens; & pour déterminer l'état du système de ces grands Corps dans les siècles passés ou futurs, il suffit au Géomètre que l'observation lui donne leur position & leur vitesse pour un instant quelconque: l'homme doit alors cet avantage à la puissance de l'instrument qu'il emploie, & au petit nombre de rapports qu'il embrasse dans ses calculs; mais l'ignorance des différentes causes qui concourent à la production des évènemens, & leur complication jointe à l'imperfection de l'analyse, l'empêchent de

prononcer avec la même certitude ſur le plus grand nombre des phénomènes; il y a donc pour lui des choſes incertaines, il y en a de plus ou moins probables. Dans l'impoſſibilité de les connoître, il a cherché à s'en dédommager en déterminant leurs différens degrés de vraiſemblance, en ſorte que nous devons à la foibleſſe de l'eſprit humain, une des théories les plus délicates & les plus ingénieuſes des Mathématiques, ſavoir, la ſcience des haſards ou des probabilités.

Avant que d'aller plus loin, il importe de fixer le ſens de ces mots *haſard* & *probabilité.* Nous regardons une choſe comme l'effet du haſard, lorſqu'elle n'offre à nos yeux rien de régulier, ou qui annonce un deſſein, & que nous ignorons d'ailleurs les cauſes qui l'ont produite. Le haſard n'a donc aucune réalité en lui-même; ce n'eſt qu'un terme propre à déſigner notre ignorance ſur la manière dont les différentes parties d'un phénomène ſe coordonnent entr'elles & avec le reſte de la Nature.

La notion de probabilité tient à cette ignorance. Si nous ſommes aſſurés que ſur deux évènemens qui ne peuvent exiſter enſemble, l'un ou l'autre doit néceſſairement arriver, & que nous ne voyons aucune raiſon pour laquelle l'un arriveroit plutôt que l'autre, l'exiſtence & la non-exiſtence de chacun d'eux eſt également probable. Pareillement, ſi des trois évènemens qui s'excluent mutuellement, l'un doit néceſſairement arriver, & que nous ne voyons aucune raiſon pour laquelle l'un arriveroit plutôt que l'autre, leur exiſtence eſt également probable; mais la non-exiſtence de chacun d'eux eſt plus probable que ſon exiſtence, & cela dans le rapport de 2 à 1, parce que ſur trois cas également probables, il y en a deux qui lui ſont favorables, & un ſeul qui lui eſt contraire.

Le nombre des cas poſſibles reſtant le même, la probabilité d'un évènement croît avec le nombre des cas favorables; au contraire le nombre des cas favorables reſtant le même, elle diminue à meſure que le nombre des cas poſſibles augmente; en ſorte qu'elle eſt en raiſon directe du nombre des

cas favorables & dans l'inverse du nombre de tous les cas possibles.

La probabilité de l'existence d'un évènement n'est, ainsi que le rapport du nombre des cas favorables, à celui de tous les cas possibles, lorsque nous ne voyons d'ailleurs aucune raison pour laquelle l'un de ces cas arriveroit plutôt que l'autre. Elle peut être conséquemment représentée par une fraction dont le numérateur est le nombre des cas favorables, & le dénominateur, celui de tous les cas possibles.

Semblablement, la probabilité de la non-existence d'un évènement est le rapport du nombre des cas qui lui sont contraires à celui de tous les cas possibles, & doit être par conséquent exprimée par une fraction dont le numérateur est le nombre des cas contraires, & le dénominateur, celui de tous les cas possibles.

Il suit de-là, que la probabilité de l'existence d'un évènement ajoutée avec la probabilité de sa non-existence, fait une somme égale à l'unité qui représente conséquemment la certitude entière, car il est visible qu'un évènement doit nécessairement ou bien arriver ou manquer.

D'ailleurs, une chose arrive certainement, lorsque tous les cas possibles lui sont favorables, & la fraction qui exprime sa probabilité est alors l'unité elle-même. La certitude peut donc être représentée par l'unité, & la probabilité par une fraction de la certitude; elle peut approcher de plus en plus de l'unité, & même en différer moins que d'aucune quantité donnée; mais elle ne peut jamais devenir plus grande. La théorie des hasards a pour objet de déterminer ces fractions, & l'on voit par-là que c'est le supplément le plus heureux que l'on puisse imaginer à l'incertitude de nos connoissances.

La certitude & la probabilité telles que nous venons de les définir, sont évidemment comparables entr'elles, & peuvent être soumises à un calcul rigoureux; il n'en est pas ainsi des états différens de l'esprit humain, lorsqu'il voit que tous les cas possibles favorisent un évènement, ou, lorsque dans

ce nombre, il en aperçoit plusieurs qui lui sont contraires. Ces deux états sont absolument incomparables, & l'on ne peut dire du premier qu'il soit double, ou triple du second, parce que la vérité est indivisible. Il arrive ici la même chose que dans toutes les Sciences Physico-Mathématiques; nous mesurons l'intensité de la lumière, les différens degrés de chaleur des corps, leurs forces, leurs résistances, &c. Dans toutes ces recherches, les causes physiques de nos sensations, & non les sensations elles-mêmes, sont l'objet de l'analyse.

La probabilité des évènemens sert à déterminer l'espérance ou la crainte des personnes intéressées à leur existence, & c'est sous ce point de vue que la science des hasards est une des plus utiles de la vie civile. Ce mot *espérance* a différentes acceptions; il exprime ordinairement l'état de l'esprit humain lorsqu'il doit lui arriver un bien quelconque dans certaines suppositions qui ne sont que vraisemblables. Dans la théorie des chances, l'espérance est le produit de la somme espérée par la probabilité de l'obtenir. Pour distinguer les deux acceptions de ce terme, j'appellerai la première, *espérance morale*, & la seconde, *espérance mathématique*.

Concevons n personnes qui aient une égale probabilité d'obtenir la somme a, & que cette somme doive certainement appartenir à l'une d'entr'elles; la probabilité totale étant 1, ou égale à la certitude, il est visible que la probabilité de chacune de ces personnes $= \frac{1}{n}$, & conséquemment leur espérance mathématique $= \frac{a}{n}$. C'est aussi la somme qui devroit leur revenir, si elles vouloient, sans courir les risques de l'évènement, partager la somme entière a.

Si l'une de ces personnes p avoit une probabilité double de celle des autres, son espérance mathématique, & par conséquent la somme qui devroit lui revenir dans le partage, seroit pareillement deux fois plus grande; car si l'on conçoit $n + 1$ personnes qui aient une égale probabilité sur la

ſomme a, leur probabilité pour l'obtenir ſera $= \frac{1}{n+1}$, & leur eſpérance mathématique $= \frac{a}{n+1}$. Or on peut ſuppoſer que l'une d'entr'elles cède ſes prétentions & ſon eſpérance à p; celle-ci acquerra conſéquemment une double probabilité & une double eſpérance exprimée par $\frac{2a}{n+1}$; & dans le partage elle doit avoir une ſomme $\frac{2a}{n+1}$ double de celle des autres perſonnes.

On voit par-là que l'eſpérance mathématique n'eſt autre choſe que la ſomme partielle qui doit revenir, lorſqu'on ne veut point courir les riſques de l'évènement, en ſuppoſant que la répartition de la ſomme entière ſe faſſe proportionnellement à la probabilité de l'obtenir; c'eſt en effet la ſeule manière équitable de la répartir, lorſqu'on fait abſtraction de toutes circonſtances étrangères, parce qu'avec un égal degré de probabilité, on a un droit égal ſur la ſomme eſpérée.

L'eſpérance morale dépend, ainſi que l'eſpérance mathématique, de la ſomme eſpérée & de la probabilité de l'obtenir; mais elle n'eſt pas toujours proportionnelle au produit de ces deux quantités; elle ſe règle ſur mille circonſtances variables, qu'il eſt preſque toujours impoſſible de définir, & encore plus d'aſſujettir à l'analyſe; ces circonſtances, il eſt vrai, ne ſervent qu'à augmenter ou à diminuer l'avantage que procure la ſomme eſpérée, & alors on peut regarder l'eſpérance morale elle-même, comme le produit de cet avantage par la probabilité de l'obtenir; mais on doit diſtinguer dans le bien eſpéré, ſa valeur relative de ſa valeur abſolue; celle-ci eſt abſolument indépendante du beſoin & des autres raiſons qui le font deſirer, au lieu que la première croît avec ces différens motifs.

On ne peut donner aucune règle déterminée pour apprécier cette valeur relative; en voici cependant une fort ingénieuſe que M. Daniel Bernoulli propoſe dans le volume

de Péterſbourg pour l'*année 1730*. La valeur relative d'une très-petite ſomme eſt, ſuivant cet illuſtre Géomètre, proportionnelle à ſa valeur abſolue diviſée par le bien total de la perſonne intéreſſée.

Cette règle n'eſt cependant pas générale, mais elle peut ſervir dans un fort grand nombre de circonſtances, & c'eſt tout ce que l'on peut deſirer dans cette matière.

La plupart de ceux qui ont écrit ſur les haſards, ont paru confondre l'eſpérance & la probabilité morale avec l'eſpérance & la probabilité mathématique, ou régler au moins l'une ſur l'autre; ils ont voulu ainſi donner à leurs théories une étendue dont elles ne ſont pas ſuſceptibles, ce qui les a rendues obſcures & peu propres à ſatisfaire les eſprits accoutumés à la clarté rigoureuſe de la Géométrie. M. d'Alembert a propoſé contre elles des objections très-fines, qui ont réveillé l'attention des Géomètres; il a fait ſentir l'abſurdité qu'il y auroit à ſe conduire dans un grand nombre de circonſtances, d'après les réſultats du calcul des probabilités, & par conſéquent la néceſſité d'établir dans ces matières une diſtinction entre le mathématique & le moral; cette partie des Sciences lui devra donc l'avantage d'être appuyée dorénavant ſur des principes clairs, & d'être reſſerrée dans ſes véritables bornes.

Qu'on me permette ici la digreſſion ſuivante ſur les difficultés dont l'analyſe des haſards a paru ſuſceptible : la probabilité des choſes incertaines, & l'eſpérance qui ſe trouve liée à leur exiſtence, ſont, comme je l'ai dit, les deux objets de cette analyſe ; la diſtinction établie précédemment entre l'eſpérance morale & l'eſpérance mathématique, répond ce me ſemble, à toutes les objections que l'on pourroit faire contre le ſecond de ces deux objets; examinons par conſéquent celles qui ont rapport au premier.

Dans la recherche de la probabilité des évènemens, on part de ce principe, ſavoir que la probabilité eſt le nombre des cas favorables diviſé par celui de tous les cas poſſibles, ce qui eſt évident; il ne peut donc y avoir de difficulté

qu'autant que l'on ſuppoſeroit une égale poſſibilité à deux cas inégalement poſſibles; or, on ne peut s'empêcher de convenir que les applications que l'on a faites juſqu'ici du calcul des probabilités aux objets de la vie civile ſont ſujettes à cette difficulté. Je ſuppoſe, par exemple, qu'au jeu de *croix* & de *pile*, la pièce que l'on jette en l'air ait plus de pente à retomber d'un côté que de l'autre, mais que les deux joueurs ignorent de quel côté eſt la plus grande pente, il eſt viſible qu'il y a autant à parier pour *croix* comme pour *pile;* on peut donc ſuppoſer au premier coup, comme on le fait ordinairement, que *croix* & *pile* ſont également probables; mais cette ſuppoſition n'eſt plus permiſe ſi, par exemple, l'un des joueurs parie que ſur deux coups il amènera *croix;* car alors on doit faire entrer en conſidération l'inégale poſſibilité de *croix* & de *pile,* puiſque bien que l'on ignore de quel côté ſe trouve la plus grande, cependant cette inégalité favoriſe toujours celui qui parie que *croix* n'arrivera pas en deux coups, en ſorte que ſa probabilité eſt plus grande que ſi *croix* & *pile* étoient également poſſibles; la cauſe de l'erreur dans laquelle on tombe, vient de ce qu'on ſuppoſe également poſſibles ces quatre cas; 1.° *croix* au 1.er coup, *croix* au ſecond, ce que je déſigne de cette manière, *(croix, croix);* 2.° *(croix, pile):* 3.° *(pile, croix);* 4.° *(pile, pile)*, ce qui n'eſt pas; car ces deux-ci *(croix, croix)*, *(pile, pile)*, ſont plus probables que les deux autres; en effet je ſuppoſe que $\frac{1+\varpi}{2}$, repréſente la probabilité du côté qui a la plus grande pente, & $\frac{1-\varpi}{2}$, celle de l'autre côté; cela poſé, la probabilité de *(croix, croix)*, ſeroit $\frac{1+2\varpi+\varpi\varpi}{4}$, ſi *croix* étoit le plus probable; & $\frac{1-2\varpi+\varpi\varpi}{4}$, s'il étoit le moins probable, mais comme il n'y a pas plus de raiſon pour le ſuppoſer l'un plutôt que l'autre, il faut ajouter enſemble ces deux probabilités, & en

prendre la moitié; ce qui donne $\frac{1+\varpi\varpi}{4}$ pour la probabilité de *(croix, croix)*, & partant auſſi pour celle de *(pile, pile)*, on trouvera pareillement, la probabilité de *(croix, pile)*, ou de *(pile, croix)*, égale à $\frac{1-\varpi\varpi}{4}$; on voit donc que ces quatre cas ne ſont pas également poſſibles, & que l'inégalité des probabilités de *croix* & de *pile*, pourvu que l'on ignore de quel côté eſt la plus grande, favoriſe le Joueur qui parie que ſur deux coups, *croix* n'arrivera pas.

Ce que je viens dire du jeu de *croix* & de *pile*, peut s'appliquer au jeu des dés, & généralement à tous les jeux dans leſquels les différens évènemens ſont ſuſceptibles d'une inégalité phyſique; mais ayant développé ailleurs cette remarque avec aſſez d'étendue, *(voyez dans le tome VI des Savans étrangers, un Mémoire ſur la probabilité des cauſes par les évènemens)* j'obſerverai ſeulement que bien que l'on ignore quels ſont les plus probables de ces évènemens, cependant il arrive ceci de remarquable, ſavoir, que l'on peut, dans preſque tous les cas, déterminer auxquels des Joueurs cette inégalité eſt avantageuſe.

La théorie des haſards ſuppoſe encore que ſi *croix* & *pile* ſont également poſſibles, il en ſera de même de toutes les combinaiſons *(croix, croix, croix*, &c.), *(pile, croix, pile*, &c.), &c. pluſieurs Philoſophes ont penſé que cette ſuppoſition eſt inexacte, & que les combinaiſons dans leſquelles un évènement arrive pluſieurs fois de ſuite, ſont moins poſſibles que les autres; mais il faudroit ſuppoſer pour cela, que les évènemens paſſés ont quelque influence ſur ceux qui doivent arriver; ce qui n'eſt point admiſſible. A la vérité, la marche ordinaire de la Nature eſt d'entremêler les évènemens, mais cela vient, ce me ſemble, de ce que les combinaiſons où ils ſont mêlés, ſont beaucoup plus nombreuſes. Voici cependant une difficulté ſpécieuſe, à laquelle il eſt bon de répondre. Si *croix* arrivoit, par exemple, vingt fois de ſuite, on ſeroit fort tenté de croire que cela n'eſt pas l'effet du haſard,

haſard,

hasard, tandis que si *croix* & *pile* étoient entremêlés d'une manière quelconque, on n'en chercheroit point la cause. Or, pourquoi cette différence entre ces deux cas, si ce n'est parce que l'un est physiquement moins possible que l'autre? A cela, je réponds généralement que là où nous apercevons de la symétrie, nous croyons toujours y reconnoître l'effet d'une cause agissante avec ordre, & nous raisonnons en cela conformément aux probabilités, parce qu'un effet symétrique devant être nécessairement l'effet du hasard, ou celui d'une cause régulière, la seconde de ces suppositions est plus probable que la première. Soit $\frac{1}{m}$ la probabilité de son existence dans le cas où il seroit dû au hasard, & $\frac{1}{n}$, cette probabilité, s'il partoit d'une cause régulière, la probabilité de l'existence de cette cause sera *(voyez le tome VI des Savans étrangers)* . . . . . .

$$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+\frac{n}{m}};$$ d'où l'on voit que plus m sera grand par rapport à n, plus aussi la probabilité que l'évènement symétrique est l'effet d'une cause régulière, augmentera. Ce n'est donc point parce que l'évènement symétrique est moins possible que les autres, mais parce qu'il y a beaucoup plus à parier qu'il est dû à une cause agissante avec ordre, qu'au pur hasard, que nous recherchons cette cause. Un exemple fort simple éclaircira cette remarque. Je suppose que l'on trouve sur une table, des caractères d'Imprimerie arrangés dans cet ordre, INFINITÉSIMAL; la raison qui nous porte à croire que cet arrangement n'est pas l'effet du hasard, ne peut venir de ce que, physiquement parlant, il est moins possible que les autres, parce que si le mot *infinitésimal* n'étoit employé dans aucune langue, cet arrangement ne seroit ni plus, ni moins possible, & cependant nous ne lui soupçonnerions alors aucune cause particulière. Mais, comme ce mot est en usage parmi nous, il est incomparablement

plus probable qu'une personne aura ainsi disposé les caractères précédens, qu'il ne l'est que cette disposition est dûe au hasard. Je reviens présentement à mon objet.

L'incertitude des connoissances humaines porte ou sur les évènemens, ou sur les causes des évènemens. Si l'on est assuré, par exemple, qu'une urne ne renferme que des billets blancs & noirs dans un rapport donné, & que l'on demande la probabilité qu'en prenant au hasard un de ces billets, il sera blanc; l'évènement est incertain, mais la cause dont dépend la probabilité de son existence, c'est-à-dire, le rapport des billets blancs aux noirs, est connu.

Dans le Problème suivant; *une urne étant supposée renfermer un nombre donné de billets blancs & noirs, si l'on en tire un billet blanc, déterminer la probabilité que la proportion des billets blancs aux noirs dans l'urne, est celle de* p *à* q; l'évènement est connu & la cause inconnue.

On peut ramener à ces deux classes de Problèmes, tous ceux qui dépendent de la théorie des hasards. Il en existe, à la vérité, un très-grand nombre dans lesquels la cause & l'évènement paroissent également iconnues; tel est celui-ci. *Une urne étant supposée pouvoir également renfermer tous les nombres de billets blancs & noirs depuis 2 jusqu'à* n *inclusivement, déterminer la probabilité qu'en tirant au hasard deux de ces billets, ils seront blancs.* Le rapport des billets blancs aux noirs, le nombre total des billets & l'évènement qui doit en résulter, sont inconnus; mais on doit regarder ici comme cause de l'évènement, l'égale possibilité de tous les nombres depuis 2 jusqu'à n, & l'indifférence des billets à être blancs ou noirs; ainsi ce problème est du genre de ceux dans lesquels la cause étant connue, l'évènement est inconnu.

Mon dessein n'étant point ici de donner un traité complet sur la théorie des hasards, je me contenterai d'appliquer les recherches précédentes à la solution de plusieurs problèmes relatifs à cette théorie; je me bornerai même ici à ceux dans lesquels la cause étant connue, il s'agit de déterminer les évènemens, ayant considéré dans un autre Mémoire

les cas où l'on se propose de remonter des évènemens aux causes. *(Voyez le tome VI des Savans étrangers.)*

XXVI.

PROBLEME X.

Si dans un tas de x pièces, on en prend un nombre au hasard, il faut déterminer la probabilité que ce nombre soit pair ou impair.

Je suppose que l'on puisse prendre indifféremment, ou une seule, ou plusieurs, ou toutes ces pièces à la fois, cela posé.

Soit y_x la somme des cas dans lesquels le nombre peut être pair, & ${}'y_x$ celle des cas dans lesquels il peut être impair, il est visible que si l'on augmente le nombre x de pièces d'une unité, la somme des cas pairs, représentée alors par y_{x+1} sera égale 1.° au nombre précédent des cas pairs; 2.° au nombre précédent des cas impairs, puisque chacun de ces cas, combiné avec la nouvelle pièce, donne un cas pair. On aura donc

$$y_{x+1} = y_x + {}'y_x . (1)$$

ensuite le nombre des cas impairs représenté par ${}'y_{x+1}$, sera égal 1.° au nombre précédent ${}'y_x$ des cas impairs; 2.° au nombre précédent des cas pairs; 3.° à l'unité, puisque la nouvelle pièce peut être prise seule. On aura conséquemment

$${}'y_{x+1} = {}'y_x + y_x + 1 . (2)$$

Pour intégrer ces deux équations, j'observe que l'équation (1) donne $\Delta . y_x = {}'y_x$, partant, $\Delta^2 . y_x = \Delta . {}'y_x$. Or, l'équation (2) donne $\Delta . {}'y_x = y_x + 1$; donc, $\Delta^2 . y_x = y_x + 1$; d'où il est facile de conclure $y_{x+1} = 2 . y_x + 1$; en intégrant cette équation par le Problème premier, on aura $y_x = A . 2^x - 1$, A étant une constante arbitraire; pour la déterminer, j'observe que x étant 1, on a $y_x = 0$; donc, $A = \frac{1}{2}$; partant, $y_x = 2^{x-1} - 1$.

Maintenant, puiſque l'on a, $'y_x = \Delta . y_x$, on aura, $'y_x = 2^{x-1}$. La ſomme de tous les cas poſſibles eſt viſiblement.... $y_x + 'y_x = 2^x - 1$. Si donc l'on nomme z_x la probabilité que le nombre de pièces eſt pair, & $_{,}z_x$ celle qu'il eſt impair, on aura $z_x = \frac{2^{x-1}-1}{2^x-1}$ & $_{,}z_x = \frac{2^{x-1}}{2^x-1}$;

d'où il réſulte qu'il y a toujours plus d'avantage à parier pour les nombres impairs, que pour les pairs.

Je ſuppoſe que l'on ſoit aſſuré que le nombre x ne peut excéder le nombre n, mais que ce nombre & tous les inférieurs ſont également poſſibles, on aura la ſomme de tous les cas impairs $= 2^x + C$. Or, x étant 1, on doit avoir $2^x + C = 1$; donc, $C = -1$. On trouvera pareillement la ſomme de tous les cas pairs $= 2^x - x + C$; or, x étant 1, on a $2^x - x + C = 0$. Donc, $C = -1$; partant, la ſomme des cas impairs eſt $2^n - 1$, & la ſomme des cas pairs eſt $2^n - n - 1$; ainſi, la probabilité pour les impairs $= \frac{2^n-1}{2^{n+1}-n-2}$, & la probabilité pour les pairs $= \frac{2^n-n-1}{2^{n+1}-n-2}$.

XXVII.

PROBLEME XI.

Soit a, une ſomme que Paul conſtitue en rente, de manière que l'intérêt ſoit $\frac{1}{m}$ de ce qui lui eſt dû, je ſuppoſe que pour des raiſons quelconques on retienne chaque année la fraction $\frac{1}{n}$ de cet intérêt, en ſorte que Paul, à la fin de la première année, par exemple, ne doive percevoir que la quantité $\frac{a}{m} - \frac{a}{mn}$; cela poſé, ſi on lui paye tous les ans la ſomme $\frac{a}{m}$, & par conſéquent plus qu'il ne lui eſt dû, &

que le ſurplus ſoit employé à amortir le capital, on demande ce que deviendra ce capital à la x.ième année.

Soit y_x ce capital à la x.ième année; il eſt viſible qu'à la fin de l'année x, il ne ſera dû à Paul que, $y_x \left[\frac{1}{m} - \frac{1}{mn}\right]$. Donc, puiſqu'on lui paye la ſomme $\frac{a}{m}$, le capital ſera diminué de la quantité $\frac{a}{m} - y_x \cdot \frac{n-1}{mn}$; partant, on aura $y_{x+1} = y_x - \frac{a}{m} + y_x \cdot \frac{n-1}{mn}$; & en intégrant par le Problème premier, $y_x = \frac{na}{n-1} + A\left[1 + \frac{n-1}{mn}\right]^{x-1}$; or, poſant $x = 1$, $y_x = a$; donc, $A = -\frac{a}{n-1}$, partant, $y_x = \frac{a}{n-1} \cdot \left[n - \left(1 + \frac{n-1}{mn}\right)^{x-1}\right]$.

Si l'on demande l'année x, à laquelle ce capital ſera zéro, on aura

$$\left(1 + \frac{n-1}{mn}\right)^{x-1} = n. \text{ donc, } x = 1 + \frac{l.n}{l.\left(1 + \frac{n-1}{mn}\right)}$$

Je ſuppoſe que l'intérêt ſoit de cinq pour cent, & que l'on retienne un dixième ſur cet intérêt, on aura $m = 20$, & $n = 10$; partant, $x = 53,3$.

On peut réſoudre de la même manière le Problème ſuivant.

Une perſonne doit la ſomme a, & veut s'acquitter au bout de h années, en ſorte qu'elle ne doive rien à l'année $h + 1$, l'intérêt étant toujours $\frac{1}{m}$ de la quantité dûe; il s'agit de trouver ce qu'elle doit donner pour cela chaque année.

Soit p cette quantité, & y_x ce qu'elle doit à la x.ième année, on aura, par la méthode précédente, $y_{x+1} = y_x \cdot \left[1 + \frac{1}{m}\right] - p$.

d'où je conclus en intégrant $y_x = mp + A.[1 + \frac{1}{m}]^{x-1}$ or, posant $x = 1$, $y_x = a$, donc, $a = mp + A$; partant, $y_x = mp + (a - mp).(1 + \frac{1}{m})^{x-1}$; mais en faisant $x = h + 1$, on a $y_x = 0$, par la supposition; donc,

$$p = \frac{a(1 + \frac{1}{m})^h}{m[(1 + \frac{1}{m})^h - 1]}.$$

XXVIII.

PROBLEME XII.

J'imagine un solide composé d'un nombre n de faces parfaitement égales, & que je désigne par les nombres $1, 2, 3 \ldots n$, je veux avoir la probabilité qu'en un nombre x de coups, j'amenerai ces n faces de suite dans l'ordre $1.2.3.4\ldots n$.

Je nomme y_x cette probabilité, & u_x le nombre des cas favorables; le nombre de tous les cas possibles est n^x; car si l'on nomme t_x ce nombre au coup x, il sera t_{x-1} au coup $x - 1$. Or, le nombre des cas au coup $x - 1$, doit se combiner avec toutes les faces du solide, pour former tous les cas possibles au coup x; on a donc $t_x = n.t_{x-1}$; ce qui donne $t_x = A.n^x$. Or, posant $x = 1$, $t_x = n$, donc $A = 1$, & $t_x = n^x$. On aura donc $\frac{u_x}{n^x} = y_x$. Or, u_x est évidemment égal au nombre des cas favorables au coup $x - 1$, multiplié par le nombre des faces du solide, plus au nombre des cas dans lesquels la combinaison $1.2.3\ldots n$, peut arriver précisément au coup x; de plus, tous les cas dans lesquels cette combinaison n'est point arrivée au coup $x - n$, donnent chacun un cas dans lequel elle arrivera précisément au coup x. Le nombre de ces cas est $n^{x-n} - u_{x-n}$; on aura donc $u_x = n.u_{x-1} + n^{x-n} - u_{x-n}$; partant, $y_x = y_{x-1} - \frac{y_{x-n}}{n^n} + \frac{1}{n^n}$,

équation que l'on intègrera facilement par les méthodes précédentes.

Soit $n = 2$, on aura $y_x = y_{x-1} - \frac{y_{x-1}}{4} + \frac{1}{4}$; d'où je conclus, en intégrant $y_x = 1 + \frac{Ax + B}{2^{x-1}}$; or, posant $x = 1$, $y_x = 0$, & posant $x = 2$, $y_x = \frac{1}{4}$; donc, $A = -\frac{1}{2}$, & $B = -\frac{1}{2}$; partant, $y_x = 1 - \frac{(x+1)}{2^x}$.

XXIX.

PROBLEME XIII.

Je suppose un nombre n de joueurs (1), (2), (3) . . . (n), jouant de cette manière; (1) joue avec (2), & s'il gagne il gagne la partie; s'il ne perd ni gagne, il continue de jouer avec (2), jusqu'à ce que l'un des deux gagne. Que si (1) perd, (2) joue avec (3); s'il le gagne, il gagne la partie; s'il ne perd ni gagne, il continue de jouer avec (3); mais s'il perd, (3) joue avec (4), & ainsi de suite jusqu'à ce que l'un *des joueurs* ait vaincu celui qui le suit; c'est-à-dire que (1) soit vainqueur de (2), ou (2) de (3), ou (3) de (4) . . . ou $(n - 1)$ de (n), ou (n) de (1). De plus, la probabilité d'un quelconque des joueurs, pour gagner l'autre $= \frac{1}{3}$, & celle de ne gagner ni perdre $= \frac{1}{3}$. Cela posé, il faut déterminer la probabilité que l'un de ces joueurs gagnera la partie au coup x.

Soit $\overset{n}{u}_x$, la probabilité qu'au coup x, (n) sera vainqueur de $(n - 1)$, on aura

$$\overset{n}{u}_x = \frac{1}{3}\,\overset{n}{u}_{x-1} + \frac{1}{3}\,\overset{n-1}{u}_{x-1}.$$

Soit maintenant $\overset{1}{z}_x$, la probabilité que (n) au coup x, gagnera la partie; $\overset{2}{z}_x$, la probabilité que ce sera $(n - 1)$, & ainsi de suite, on aura $\overset{1}{z}_x = \frac{1}{3} \cdot \overset{n}{u}_{x-1}$. Partant

$$\overset{1}{z}_x - \frac{1}{3} \cdot \overset{1}{z}_{x-1} = \frac{1}{3} \cdot \overset{2}{z}_{x-1}.$$

On aura de même

$$\overset{2}{z}_x - \tfrac{1}{3}\cdot\overset{2}{z}_{x-1} = \tfrac{1}{3}\cdot\overset{3}{z}_{x-1};$$
$$\overset{3}{z}_x - \tfrac{1}{3}\cdot\overset{3}{z}_{x-1} = \tfrac{1}{3}\cdot\overset{4}{z}_{x-1}$$

&c.

en sorte que ces équations sont rentrantes. Cela posé, en suivant la méthode exposée précédemment pour ce genre d'équations, on aura

$$\overset{1}{z}_x - \tfrac{2}{3}\cdot\overset{1}{z}_{x-1} + \frac{1}{3^2}\cdot\overset{1}{z}_{x-2} = \tfrac{1}{3}\cdot[\overset{2}{z}_{x-1} - \tfrac{1}{3}\overset{2}{z}_{x-2}] = \frac{1}{3^2}\cdot\overset{3}{z}_{x-2};$$

partant,

$$\overset{1}{z}_x - \tfrac{3}{3}\cdot\overset{1}{z}_{x-1} + \frac{3}{3^2}\cdot\overset{1}{z}_{x-2} - \frac{1}{3^3}\cdot\overset{1}{z}_{x-3}$$
$$= \frac{1}{3^2}\cdot[\overset{3}{z}_{x-2} - \tfrac{1}{3}\overset{3}{z}_{x-3}] = \frac{1}{3^3}\overset{4}{z}_{x-3};$$

d'où, en continuant d'opérer ainsi, on aura

$$\overset{1}{z}_x - \frac{n}{3}\cdot\overset{1}{z}_{x-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{3^2}\cdot\overset{1}{z}_{x-2} - \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}\cdot$$
$$\frac{1}{3^3}\cdot\overset{1}{z}_{x-3} + \&c. = \frac{1}{3^n}\cdot\overset{1}{z}_{x-n}.$$

on aura pareillement

$$\overset{2}{z}_x - \frac{n}{3}\cdot\overset{2}{z}_{x-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{3^2}\cdot\overset{2}{z}_{x-2}$$
$$- \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{3^3}\cdot\overset{2}{z}_{x-3} + \&c. = \frac{1}{3^n}\cdot\overset{2}{z}_{x-n};$$

& ainsi de suite pour les autres variables $\overset{4}{z}_x$, $\overset{3}{z}_x$, &c.

Pour intégrer ces différentes équations, il faut résoudre celle-ci: $(f - \frac{1}{3})^n = \frac{1}{3^n}$, ou en faisant $f - \frac{1}{3} = q$, $q^n - \frac{1}{3^n} = 0$, ce qu'il est aisé de faire, par le beau théorème de Cote. Il ne reste plus ainsi de difficulté que dans la détermination

détermination des constantes arbitraires qui viennent par l'intégration. Pour cela, il est nécessaire d'avoir la probabilité de gagner de chaque joueur pour un nombre n de coups. Or, pour ce qui regarde le joueur (1), sa probabilité de gagner au premier coup est $\frac{1}{3}$; au second coup elle est $\frac{1}{3^2}$; au troisième coup, elle est $\frac{1}{3^3}$, &c. en sorte que l'on a

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & . & 2 & . & 3 & . & 4 & \ldots\ldots\ldots & n \\ \frac{1}{3} & . & \frac{1}{3^2} & . & \frac{1}{3^3} & . & \frac{1}{3^4} & \ldots\ldots & \frac{1}{3^n} \end{array}$$

en mettant sous chaque coup la probabilité de gagner du Joueur (1) à ce coup; on formera de même pour le Joueur (2), la suite

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & . & 3 & . & 4 & . & 5 & \ldots\ldots\ldots & n+1 \\ \frac{1}{3^2} & . & \frac{2}{3^3} & . & \frac{3}{3^4} & . & \frac{4}{3^5} & \ldots\ldots & \frac{n}{3^{n+1}} \end{array}$$

& pour le Joueur (3), celle-ci :

$$\begin{array}{ccccccccc} 3 & . & 4 & . & 5 & . & 6 & \ldots\ldots\ldots & n+2 \\ \frac{1}{3^3} & . & \frac{3}{3^4} & . & \frac{6}{3^5} & . & \frac{10}{3^6} & \ldots\ldots & \frac{\frac{n.(n+1)}{1.2}}{3^{n+2}} \end{array}$$

& ainsi de suite pour les autres Joueurs.

XXX.

PROBLEME XIV.

Deux Joueurs A & B, dont les adresses respectives sont en raison de p, à q, jouent ensemble de manière que sur un nombre x de coups, il en manque n au Joueur A. & conséquemment $x - n$ au Joueur B, pour gagner; il s'agit de déterminer la probabilité respective de ces deux Joueurs.

Soit ${}_ny_x$ la probabilité de B pour gagner; il est clair qu'au coup suivant elle sera, ou ${}_{n-1}y_{x-1}$, si B perd, ou ${}_ny_{x-1}$, s'il gagne. Or, la probabilité qu'il gagnera est $\frac{q}{p+q}$, & celle

qu'il perdra, $= \frac{p}{p+q}$. On a donc

$$ {}_n y_x = \frac{q}{p+q} \cdot {}_n y_{x-1} + \frac{p}{p+q} \cdot {}_{n-1} y_{x-1} \quad (g). $$

Cette équation eſt aux différences partielles : pour l'intégrer, j'obſerve que lorſque $n = 1$, on a ${}_1 y_x = \frac{q}{p+q} \cdot {}_1 y_{x-1}$, puiſque dans ce cas ${}_{n-1} y_x = 0$; on aura donc par le Problème VI, *art. XX*,

$$ {}_n y_x = a_n \cdot {}_n y_{x-1} + {}'a_n \cdot {}_n y_{x-2} + {}''a_n \cdot {}_n y_{x-3} + \&c. + u_n, $$

& l'on trouvera que l'équation

$$ 0 = 1 - \frac{a_n}{f} - \frac{{}'a_n}{f^2} - \&c. $$

eſt la même que celle-ci; $0 = [f - \frac{q}{p+q}]^n$; on aura d'ailleurs $u_n = \frac{p}{p+q} \cdot u_{n-1}$; donc, $u_n = H \cdot (\frac{p}{p+q})^n$; or, poſant $n = 1$, $u_n = 0$; donc, $H = 0$, & $u_n = 0$. L'expreſſion de ${}_n y_x$ ſera donc par l'*article IX*,

$$ {}_n y_x = \frac{q^{x-1}}{(p+q)^{x-1}} \cdot [C_n + D_n \cdot (x-1) + E_n \cdot \frac{(x-1).(x-2)}{1.2} + \&c. \ldots + L_n \frac{(x-1).(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}] $$

Pour déterminer les conſtantes arbitraires C_n, D_n, E_n, &c. leſquelles peuvent être des fonctions de n, j'obſerve que ſi l'on fait $x = n$, on aura ${}_n y_n = 1$; car il eſt viſible que A perd néceſſairement, lorſque ſur n coups il lui en manque n; ſi l'on fait $x = n - 1$, on aura pareillement ${}_n y_{n-1} = 1$; car l'équation (g) donne

$$ {}_n y_n = \frac{q}{p+q} \cdot {}_n y_{n-1} + \frac{p}{p+q} \cdot {}_{n-1} y_{n-1} \cdot \text{ ou, } 1 = \frac{q}{p+q} \cdot {}_n y_{n-1} + \frac{p}{p+q}. $$

partant, ${}_n y_{n-1} = 1$; pareillement, ſi l'on fait $x = n - 2$, on aura ${}_n y_{n-2} = 1$, & ainſi de ſuite. Si donc l'on fait dans l'expreſſion de ${}_n y_x$, $x = 1$, on aura ${}_n y_1 = 1$; partant, $C_n = 1$. Si l'on fait $x = 2$, on aura, $1 = (C_n + D_n) \cdot \frac{q}{p+q}$;

partant, $D_n = \frac{p}{q}$. Si l'on fait $x = 3$, on aura

$$1 = [C_n + 2D_n + E_n] \cdot \frac{q^2}{(p+q)^2} = \left(1 + 2\frac{p}{q} + E_n\right) \cdot \frac{q^2}{(p+q)^2}.$$

donc, $E_n = \frac{p^2}{q^2}$, & ainsi de suite; d'où il est facile de conclure

$$_{n}y_x = \frac{1}{\left(\frac{p}{q}+1\right)^{x-1}} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{p}{q} \cdot (x-1) + \frac{p^2}{q^2} \cdot \frac{(x-1) \cdot (x-2)}{1 \cdot 2} + \frac{p^3}{q^3} \cdot \frac{(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} \cdot \frac{(x-1) \cdot (x-2) \ldots\ldots (x-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots\ldots (n-1)} \end{array} \right.$$

XXXI.

PROBLEME XV.

Trois Joueurs A, B, C, dont les adresses respectives sont représentées par les lettres p, q, r, jouent ensemble de manière que sur un nombre x de coups, il en manque m, a, A; n, a, B; & $x - m - n$, a. C; on propose de déterminer la probabilité respective de ces trois Joueurs pour gagner. Soit $_{(m)(n)}y_x$ la probabilité de C, pour gagner; il est clair qu'après un nouveau coup, elle sera, ou $_{(m-1)(n)}y_{x-1}$, ou $_{(m)(n-1)}y_{x-1}$; ou $_{(m)(n)}y_{x-1}$; or la probabilité qu'elle sera $_{(m-1)(n)}y_{x-1}$, est $\frac{p}{p+q+r}$; la probabilité qu'elle sera $_{(m)(n-1)}y_{x-1}$ est $\frac{q}{p+q+r}$; & la probabilité qu'elle sera $_{(m)(n)}y_{x-1}$, est $\frac{r}{p+q+r}$. On aura donc

$$_{(m)(n)}y_x = \frac{p}{p+q+r} \cdot {}_{(m-1)(n)}y_{x-1} + \frac{q}{p+q+r} \cdot {}_{(m)(n-1)}y_{x-1} + \frac{r}{p+q+r} \cdot {}_{(m)(n)}y_{x-1} \quad (o).$$

Cette équation est aux différences partielles à quatre variables, & s'intègre par le Problème IX; mais, pour cela, il faut que l'on ait deux équations particulières pour les cas

de $m = 1$ & de $n = 1$; pour les trouver, j'obſerve que ſi l'on fait $m = 1$, on aura

$${}_{(1)(n)}y_x = \frac{r}{p+q+r} \cdot {}_{(1)(n)}y_{x-1} + \frac{q}{x+q+r}\, {}_{(1)(n-1)}y_{x-1};\ (p),$$

parce que lorſque $m = 1$, on a ${}_{(m-1)(n)}y_{x-1} = 0$.

L'équation *(p)* eſt aux différences partielles à deux variables; pour l'intégrer, j'obſerve que ſi l'on y ſuppoſe $n = 1$, on a ${}_{(1)(1)}y_x = \frac{r}{p+q+r}\, {}_{(1)(1)}y_{x-1}$; de cette équation & de l'équation *(p)*, on conclura facilement par le Problème VI,

$${}_{(1)(n)}y_x = \frac{nr}{p+q+r} \cdot {}_{(1)(n)}y_{x-1} - \frac{n.(n-1)}{1.2} \cdot \frac{r^2}{(p+q+r)^2} \cdot {}_{(1)(n)}y_{x-2}$$
$$+ \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3} \cdot \frac{r^3}{(p+q+r)^3} \cdot {}_{(1)(n)}y_{x-3} - \text{\&c. } (q).$$

on aura ſemblablement

$${}_{(m)(1)}y_x = \frac{mr}{p+q+r}\, {}_{(m)(1)}y_{x-1} - \frac{m.(m-1)}{1.2} \cdot \frac{r^2}{(p+q+r)^2} \cdot {}_{(m)(1)}y_{x-2}$$
$$+ \frac{m.(m-1)(.m-2)}{1.2.3} \frac{r^3}{(p+q+r)^3} \cdot {}_{(m)(1)}y_{x-3} - \text{\&c. } (q').$$

Au moyen de ces équations & de l'équation (o), on déterminera, par le Problème IX, l'expreſſion générale de ${}_{(m)(n)}y_x$; ainſi, le Problème propoſé n'a d'autre difficulté que la longueur du calcul.

La méthode générale du Problème IX conduit à une équation finale très-élevée; mais au moyen de conſidérations particulières, je ſuis arrivé à la ſolution du Problème précédent d'une manière beaucoup plus ſimple, que je vais développer: je fais pour abréger $p + q + r = 1$, & l'équation (o) donne

$${}_{(2)(n)}y_x = p \cdot {}_{(1)(n)}y_{x-1} + q \cdot {}_{(2)(n-1)}y_{x-1} + r \cdot {}_{(2)(n)}y_{x-1}\ (o')$$

& ſi l'on fait $m = 2$, l'équation *(q')* donne

$${}_{(2)(1)}y_x = 2r \cdot {}_{(2)(1)}y_{x-1} - r^2 \cdot {}_{(2)(1)}y_{x-2}$$

Soit

$${}_{(2)(n)}y_x = a_n \cdot {}_{(2)(n)}y_{x-1} + {}'a_n \cdot {}_{(2)(n)}y_{x-2} + \text{\&c.} + {}_nX_n\ (s);$$

donc,

$$q\cdot{}_{(2)(n-2)}y_{x-1} = a_{n-1}\cdot q\cdot{}_{(2)(n-1)}y_{x-2} + {}'a_{n-1}\cdot q\cdot{}_{(2)(n-1)}y_{x-3} + \&c. + q\cdot{}_{n-1}X_{x-1}$$

Substituant dans cette équation au lieu de ${}_{(2)(n-1)}y_{x-2}$, ${}_{(2)(n-1)}y_{x-2}$, &c. leurs valeurs tirées de l'équation (o'), on aura

$$_{(2)(n)}y_x = (1 + a_{n-1})\cdot{}_{(2)(n)}y_{x-1} + ({}'a_{n-1} - a_{n-1}\cdot r)\cdot{}_{(2)(n)}y_{x-2} + \&c. + p\cdot{}_{(1)(n)}y_{x-1} - a_{n-1}p\cdot{}_{(1)(n)}y_{x-2} - \&c. + q\cdot{}_{n-1}X_{x-1}$$

d'où, en comparant avec l'équation *(s)*, on aura

1.° $a_n = a_{n-1} + r$. partant, $a_n = (n+1)\cdot r + C$.
or, posant $n = 1$, $a_n = 2r$; donc, $C = 0$.

2.° ${}'a_n = {}'a_{n-1} - a_{n-1}\cdot r$; partant, ${}'a_n = -\frac{n\cdot(n+1)}{1\cdot 2}\cdot r^2 + C$.
or, posant $n = 1$, ${}'a_n = -r^2$; donc, $C = 0$.

3.° ${}^2a_n = {}^2a_{n-1} + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}r^3$; donc, ${}^2a_n = \frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}r^3 + C$;
or, posant $n = 1$, ${}^2a_n = 0$; donc, $C = 0$, & ainsi du reste. Partant,

$$p[{}_{(1)(n)}y_{x-1} - a_{n-1}\cdot{}_{(1)(n)}y_{x-2} - \&c.] = p\cdot[{}_{(1)(n)}y_{x-1} - nr\cdot{}_{(1)(n)}y_{x-2} + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot r^2\cdot{}_{(1)(n)}y_{x-3} - \&c.]$$

$= 0$, en vertu de l'équation *(q)*.

4.° ${}_nX_x = q\cdot{}_{n-1}X_{x-1}$. or, on a ${}_1X_x = 0$; donc, ${}_2X_x = 0$, & généralement ${}_nX_x = 0$. On a donc

$$_{(2)(n)}y_x = (n+1)\cdot r\cdot{}_{(2)(n)}y_{x-1} - \frac{n\cdot(n+1)}{1\cdot 2}\cdot r^2\cdot{}_{(2)(n)}y_{x-2} + \frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot{}_{(2)(n)}y_{x-3} - \&c.$$

on aura, par un procédé entièrement semblable,

$$_{(3)(n)}y_x = (n+2)\cdot r\cdot{}_{(3)(n)}y_{x-1} - \frac{(n+2)\cdot(n+1)}{1\cdot 2}\cdot r^2\cdot{}_{(3)(n)}y_{x-2} + \&c.$$

& généralement

$${}_{(m)(n)}y_x = (m+n-1).r.{}_{(m)(n)}y_{x-1} - \frac{(m+n-1).(m+n-2)}{1.2}.r^2.{}_{(m)(n)}y_{x-2} + \&c.$$

équation dont l'intégrale eſt

$${}_{(m)(n)}y_x = r^{x-2}.\left\{\begin{array}{l} {}_mN_n.\frac{(x-2).(x-3)\ldots(x-m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots(m+n-2)} + {}_mM_n.\frac{(x-2)\ldots\ldots(x-m-n+2)}{1.2.3\ldots\ldots(m+n-3)} \\ + {}_mL_n.\frac{(x-2)\ldots\ldots(x-m-n+3)}{1.2.3\ldots\ldots(m+n-4)} + {}_mK_n.\frac{(x-2)\ldots\ldots(x-m-n+4)}{1.2.3\ldots\ldots(m+n-5)} \\ + {}_mI_n.\frac{(x-2)\ldots\ldots(x-m-n+5)}{1.2.3\ldots\ldots(m+n-6)}\ldots\ldots + {}_mC_n. \end{array}\right.$$

La difficulté conſiſte préſentement à déterminer les conſtantes arbitraires ${}_mN_n$, ${}_mM_n$, &c. leſquelles peuvent être des fonctions de m & de n.

Pour cela je ſuppoſe d'abord $m = 1$, & l'on aura

$${}_{(1)(n)}y_x = r^{x-2}[{}_1C_n + {}_1D_n.(x-2) + {}_1E_n.\frac{(x-2).(x-3)}{1.2}\ldots$$
$$+ {}_1N_n.\frac{(x-2)\ldots(x-n)}{1.2.3\ldots(n-1)}]\ (\sigma).$$

Or on a ${}_{(1)(n)}y_{n+1} = 1$, comme il eſt viſible, puiſqu'il ne manque alors aucun coup au joueur C; je reprends enſuite l'équation

$${}_{(1)(n)}y_x = r.{}_{(1)(n)}y_{x-1} + q.{}_{(1)(n-1)}y_{x-1}.$$

Si l'on fait $x = n+1$, on a ${}_{(1)(n)}y_{n+1} = 1$ $= r.{}_{(1)(n)}y_n + q$; donc ${}_{(1)(n)}y_n = \frac{1-q}{r}$; enſuite ${}_{(1)(n)}y_n = \frac{1-q}{r} = r.{}_{(1)(n)}y_{n-1} + q.(\frac{1-q}{r})$. Donc, ${}_{(1)(n)}y_{n-1} = (\frac{1-q}{r})^2$. On trouvera pareillement, ${}_{(1)(n)}y_{n-2} = (\frac{1-q}{r})^3$, & ainſi de ſuite. Cela poſé, ſi l'on fait $x = 2$, l'équation (σ) donnera $(\frac{1-q}{r})^{n-1} = {}_1C_n$; ſi l'on fait $x = 3$, on aura $(\frac{1-q}{r})^{n-2} = r[(\frac{1-q}{r})^{n-1} + {}_1D_n]$.

Donc, ${}_{1}D_{n}=(\frac{1-q}{r})^{n-2}\cdot\frac{q}{r}$. En faisant $x=4$, on aura ${}_{1}E_{n}=(\frac{1-q}{r})^{n-3}\cdot\frac{q^{2}}{r^{2}}$, & ainsi de suite; partant

$$ {}_{(1)\,(n)}y_{x}=r^{x-2}\left\{\begin{array}{l}\frac{q^{n-1}}{r^{n-1}}\cdot\frac{(x-2)\ldots(x-n)}{1.2.3\ldots(n-1)}+\frac{q^{n-2}}{r^{n-2}}\cdot(\frac{1-q}{r})\cdot\frac{(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots(n-2)}\\+\frac{q^{n-3}}{r^{n-3}}\cdot(\frac{1-q}{r})^{2}\cdot\frac{(x-2)\ldots(x-n+2)}{1.2.3\ldots(n-3)}\ldots+(\frac{1-q}{r})^{n-1}\end{array}\right. $$

on aura de même,

$$ {}_{(m)\,(1)}y_{x}=r^{x-2}\left\{\begin{array}{l}\frac{p^{m-1}}{r^{m-1}}\cdot\frac{(x-2)\ldots(x-m)}{1.2.3\ldots(m-1)}+\frac{p^{m-2}}{r^{m-2}}\cdot(\frac{1-p}{r})\frac{(x-2)\ldots(x-m+1)}{1.2.3\ldots(m-2)}\\+\ \&c.\end{array}\right. $$

Si l'on substitue maintenant dans l'équation (o), au lieu de ${}_{(m)\,(n)}y_{x}$, sa valeur trouvée ci-dessus, on aura l'équation suivante,

$$ {}_{m}N_{n}\cdot[\frac{(x-3).(x-4)\ldots(x-m-n)}{1.2.3\ldots(m+n-2)}]+[{}_{m}M_{n}+{}_{m}N_{n}]\cdot[\frac{(x-3)\ldots(x-m-n+1)}{1.2.3\ldots(m+n-3)}] $$
$$ +[{}_{m}L_{n}+{}_{m}M_{n}]\cdot[\frac{(x-3)\ldots(x-m-n+2)}{1.2.3\ldots(m+n-4)}]+\&c. $$
$$ =\frac{p}{r}\cdot{}_{m-1}N_{n}\cdot[\frac{(x-3)\ldots(x-m-n+1)}{1.2.3\ldots(m+n-3)}] $$
$$ +\frac{p}{r}\cdot{}_{m-1}M_{n}\cdot[\frac{(x-3)\ldots(x-m-n+2)}{1.2.3\ldots(m+n-4)}]+\&c. $$
$$ +\frac{q}{r}\cdot{}_{m}N_{n-1}\cdot[\frac{(x-3)\ldots(x-m-n+1)}{1.2.3\ldots(m+n-3)}] $$
$$ +\frac{q}{r}\cdot{}_{m}M_{n-1}\cdot[\frac{(x-3)\ldots(x-m-n+2)}{1.2.3\ldots(m+n-4)}]+\&c. $$
$$ +{}_{m}N_{n}\cdot[\frac{(x-3)\ldots\ldots\ldots(x-m-n)}{1.2.3\ldots(m+n-2)}] $$
$$ +{}_{m}M_{n}\cdot[\frac{(x-3)\ldots(x-m-n+1)}{1.2.3\ldots(m+n-3)}]+\&c. $$

D'où l'on formera les équations suivantes,

$$ {}_{m}N_{n}=\frac{p}{r}\cdot{}_{m-1}N_{n}+\frac{q}{r}\cdot{}_{m}N_{n-1} $$
$$ {}_{m}M_{n}=\frac{p}{r}\cdot{}_{m-1}M_{n}+\frac{q}{r}\cdot{}_{m}M_{n-1}. $$

$${}_mL_n = \frac{p}{r} \cdot {}_{m-1}L_n + \frac{q}{r} \cdot {}_mL_{n-1},$$

&c.

Or on a ${}_1N_n = \frac{q^{n-1}}{r^{n-1}}$; donc ${}_2N_n = \frac{p}{r} \cdot \frac{q^{n-1}}{r^{n-1}} + \frac{q}{r} \cdot {}_2N_{n-1}$. Partant ${}_2N_n = \frac{q^{n-2}}{r^{n-1}} \cdot \frac{q}{r} \cdot (n + C)$; or, posant $n = 1$, ${}_2N_1 = \frac{p}{r}$; donc, $C = 0$; ensuite, ${}_3N_n = \frac{p^2}{r^2} \cdot \frac{q^{n-1}}{r^{n-1}} \cdot n + \frac{p}{r} \cdot {}_3N_{n-1}$; donc,

$${}_3N_n = \frac{q^{n-1}}{r^{n-1}} \cdot \left(\frac{p^2}{r^2} \cdot \frac{n.(n+1)}{1.2} + C\right);$$

or, posant $n = 1$, ${}_3N_1 = \frac{p^2}{r^2}$; donc, $C = 0$, & généralement

$${}_mN_n = \frac{p^{m-1}.q^{n-1}}{r^{m+n-2}} \cdot \frac{n.(n+1)\ldots(n+m-2)}{1.2.3\ldots(m-1)};$$

on a ensuite ${}_1M_n = \frac{1-q}{r} \cdot \frac{q^{n-2}}{r^{n-2}}$; donc,

$${}_2M_n = \frac{q}{r} \cdot {}_2M_{n-1} + \frac{p}{r} \cdot \left(\frac{1-q}{r}\right) \cdot \frac{q^{n-2}}{r^{n-2}};$$

partant ${}_2M_n = \frac{q^{n-1}}{r^{n-2}} \cdot \frac{q}{r} \cdot \left(\frac{1-q}{r}\right) \cdot (n-1) + C . \frac{q^{n-1}}{r^{n-1}}$; or, posant $n = 1$, ${}_2M_1 = \frac{1-p}{r}$; donc, $C = \frac{1-p}{r}$, & ${}_2M_n = \frac{q^{n-2}}{r^{n-2}} \cdot \frac{p}{r} \left(\frac{1-q}{r}\right) \cdot (n-1) + \frac{q^{n-1}}{r^{n-1}} \cdot \left(\frac{1-p}{r}\right)$; on aura pareillement ${}_3M_n = \frac{q^{n-2}}{r^{n-2}} \cdot \frac{p^2}{r^2} \cdot \left(\frac{1-q}{r}\right) \cdot \frac{(n-1).n}{1.2} + \frac{q^{n-1}}{r^{n-1}} \cdot \frac{p}{r} \cdot \left(\frac{1-p}{r} n + C\right)$; or, posant $n = 1$, ${}_3M_1 = \frac{p}{r} \cdot \left(\frac{1-p}{r}\right)$; donc, $C = 0$. En continuant d'opérer ainsi, on trouvera généralement,

$${}_mM_n = \frac{p^{m-1}.q^{n-2}}{r^{m+n-3}} \cdot \left(\frac{1-q}{r}\right) \cdot \frac{(n-1).n\ldots(n+m-3)}{1.2.3\ldots(m-1)}$$
$$+ \frac{q^{n-1}.p^{m-2}}{r^{m+n-3}} \cdot \left(\frac{1-p}{r}\right) \cdot \frac{n.(n+1)\ldots(n+m-3)}{1.2.3\ldots(m-2)}.$$

J'observerai

J'obſerverai ici, relativement à ces expreſſions de ${}_mN_n$, & de ${}_mM_n$, que

$$\frac{n.(n+1)\ldots(n+m-2)}{1.2.3\ldots(m-1)} = \frac{m.(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.2.3\ldots(n-1)},$$

& que

$$\frac{n.(n+1)\ldots(n+m-2)}{1.2.3\ldots(m-1)} = \frac{m.(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.2.3\ldots(n-1)};$$

d'où il réſulte que les quantités ${}_mN_n$ & ${}_mM_n$, reſtent les mêmes lorſqu'on y change p en q, m en n, & réciproquement; ce qui doit être d'ailleurs par la nature du Problème. On en doit dire autant des autres quantités ${}_mL_n$, ${}_mK_n$, &c.

Préſentement, ${}_mL_n = \frac{p}{r} \cdot {}_{m-1}L_n + \frac{q}{r} \cdot {}_mL_{n-1}$; or, ${}_1L_n = \frac{q^{n-3}}{r^{n-3}} \cdot (\frac{1-q}{r})^2$; donc on aura, en intégrant,

$${}_2L_n = \frac{q^{n-3}}{r^{n-3}} \cdot \frac{p}{r} \cdot (\frac{1-q}{r})^2 \cdot (n-2) + C \cdot \frac{q^{n-2}}{r^{n-2}};$$

or, poſant $n = 2$, $m = 2$, & $x = 4$, dans l'expreſſion trouvée ci-deſſus de ${}_{(m)(n)}y_x$, on a ${}_{(2)(2)}y_4 = r^2 \cdot ({}_2L_2 + 2 \cdot {}_2M_2 + {}_2N_2)$; donc, puiſque ${}_{(2)(2)}y_4 = 1$,

$${}_2L_2 = \frac{1}{r^2} - \frac{2p}{r^2}(1-q) - \frac{2q}{r^2}(1-p) - \frac{2pq}{r^2};$$

de plus, $C = {}_2L_2$, dans l'expreſſion de ${}_2L_n$.

on trouvera pareillement,

$${}_3L_n = \frac{q^{n-3}}{r^{n-3}} \cdot \frac{p^2}{r^2} \cdot (\frac{1-q}{r})^2 \cdot \frac{(n-2).(n-1)}{1.2}$$
$$+ \frac{q^{n-2}}{r^{n-2}} \cdot \frac{p}{r} \cdot {}_2L_2 \cdot (n-1)$$
$$+ C \cdot \frac{q^{n-1}}{r^{n-1}},$$

C étant une conſtante arbitraire; or, poſant $n = 1$, ${}_3L_n = (\frac{1-p}{r})^2$; donc $C = (\frac{1-p}{r})^2$; partant,

$${}_3L_n = \frac{q^{n-3}}{r^{n-3}} \cdot \frac{p^2}{r^2} \cdot (\frac{1-q}{r})^2 \cdot \frac{(n-2).(n-1)}{1.2}$$

$$+ \frac{q^{n-2}}{r^{n-2}} \cdot \frac{p}{r} \cdot {}_2L_1 \cdot (n-1)$$

$$+ \left(\frac{1-p}{r}\right)^2 \cdot \frac{q^{n-1}}{r^{n-1}}$$

& généralement on aura

$${}_mL_n = \frac{q^{n-3} \cdot p^{m-1}}{r^{m+n-4}} \cdot \left(\frac{1-q}{r}\right)^2 \cdot \frac{(n-2) \cdot n \ldots (n+m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)}$$

$$+ \frac{q^{n-2} \cdot p^{m-2}}{r^{m+n-4}} \cdot {}_2L_1 \cdot \frac{(n-1) \ldots (n+m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-2)}$$

$$+ \frac{q^{n-1} \cdot p^{m-3}}{r^{m+n-4}} \cdot \left(\frac{1-p}{r}\right)^2 \cdot \frac{n \ldots (n+m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-3)}$$

on a ensuite

$${}_1K_n = \frac{q^{n-4}}{r^{n-4}} \cdot \frac{p}{r} \cdot \left(\frac{1-q}{r}\right)^3 + \frac{q}{r} \cdot {}_1K_{n-1}$$

partant,

$${}_1K_n = \frac{q^{n-4}}{r^{n-4}} \cdot \frac{p}{r} \cdot \left(\frac{1-q}{r}\right)^3 \cdot (n-3) + C \cdot \frac{q^{n-3}}{r^{n-3}}$$

or, posant $n = 3$, on a $C = {}_1K_3$; de même

$${}_2K_n = \frac{q^{n-4}}{r^{n-4}} \cdot \frac{p^2}{r^2} \cdot \left(\frac{1-q}{r}\right)^3 \cdot \frac{(n-3) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2} + \frac{q^{n-3}}{r^{n-3}} \cdot$$

$$\frac{p}{r} \cdot {}_1K_3 \cdot (n-2) + \frac{q^{n-2}}{r^{n-2}} \cdot {}_2K_2,$$

& généralement on aura,

$${}_mK_n = \frac{q^{n-4} \cdot p^{m-1}}{r^{m+n-5}} \cdot \left(\frac{1-q}{r}\right)^3 \cdot \frac{(n-3) \ldots (n+m-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)}$$

$$+ \frac{q^{n-3} \cdot p^{m-2}}{r^{m+n-5}} \cdot {}_2K_3 \cdot \frac{(n-2) \ldots (n+m-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-2)}$$

$$+ \frac{q^{n-2} \cdot p^{m-3}}{r^{m+n-5}} \cdot {}_3K_2 \cdot \frac{(n-1) \ldots (n+m-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-3)}$$

$$+ \frac{q^{n-1} \cdot p^{m-4}}{r^{m+n-5}} \cdot \left(\frac{1-p}{r}\right)^3 \cdot \frac{n \ldots (n+m-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-4)}$$

on déterminera ${}_2K_3$ & ${}_3K_2$ au moyen des équations suivantes.

$$r^3[{}_2K_3 + 3 \cdot {}_2L_3 + 3 \cdot {}_2M_3 + {}_2N_3] = 1$$

$$r^3[{}_3K_2 + 3 \cdot {}_3L_2 + 3 \cdot {}_3M_2 + {}_3N_2] = 1$$

La loi des autres coëfficiens ${}_mI_n$, ${}_mH_n$, &c. eſt viſible, & il eſt aiſé par conſéquent de les déterminer. Quant au coëfficient ${}_mC_n$, on le déterminera par cette équation

$$1 = r^{m+n-2}\left[{}_mC_n + (m+n-2) \cdot {}_mD_n + \frac{(m+n-2) \cdot (m+n-3)}{1 \cdot 2}\, {}_mE_n + \&c.\right]$$

on a donc ainſi une expreſſion générale de ${}_{(m)(n)}y_x$, & conſéquemment, la probabilité du Joueur C pour gagner; par la même méthode, & au moyen de formules analogues, on auroit celle des deux autres Joueurs A & B; en ſorte que l'on a une ſolution du Problème des partis dans le cas de trois Joueurs; Problème qui n'avoit point encore été réſolu, que je ſache, bien que les Géomètres qui ſe ſont occupés de l'analyſe des haſards, paruſſent en déſirer la ſolution. *(Voyez M. Montmort, dans ſon Ouvrage ſur l'analyſe des jeux de haſard, ſeconde édition, page 247).*

Je ſuppoſe dans l'expreſſion ${}_{(m)(n)}y_x$, $m = 2$, $n = 3$ & $x = 9$, c'eſt-à-dire, que le nombre des coups qui manquent au Joueur C, ſoit 4; je ſuppoſe de plus $p = q = r = \frac{1}{3}$. Cela poſé, on aura

$${}_{(2)(3)}y_x = \frac{x-3}{3^{x-2}} \cdot \left[\frac{xx+2}{2}\right]$$

& en ſuppoſant $x = 9$, on aura la probabilité de C pour gagner $= {}_{(2)(3)}y_9 = \frac{83}{729}$; pour avoir la probabilité de B, j'obſerve qu'elle eſt égale à ${}_{(2)(4)}y_9$; or on a

$${}_{(2)(4)}y_x = \frac{1}{3^{x-1}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot \frac{(x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4) \cdot (x-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + 8 \cdot \frac{(x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ + 7 \cdot \frac{(x-2) \cdot (x-3)}{1 \cdot 2} + 5 \cdot (x-2) - 17. \end{array} \right.$$

Si l'on ſuppoſe $x = 9$, on aura ${}_{(2)(4)}y_9 = \frac{195}{729}$;

la probabilité de $A = 1 - \frac{83}{729} - \frac{195}{729} = \frac{451}{729}$.

La méthode précédente auroit encore lieu, ſi, au lieu de trois joueurs, on en ſuppoſoit un plus grand nombre.

XXXII.

PROBLEME XVI.

Je ſuppoſe les numéros $A1$, $A2$, $B1$ & $B2$, renfermés dans une urne, & que deux joueurs A & B jouent à cette condition que A choiſiſſant les numéros $A1$ & $A2$, & B les deux autres, ſi l'on tire chaque fois un ſeul de ces numéros au haſard, celui des deux joueurs gagnera, qui le premier aura atteint le nombre i, les numéros $A1$ & $B1$ comptant pour 1, & les numéros $A2$ & $B2$ comptant pour 2. Cela poſé, s'il manque n unités, au joueur A, & $x - n$, unités, au joueur B, on demande les probabilités reſpectives des deux joueurs A & B pour gagner.

Soit ${}_n y_x$ la probabilité de B pour gagner; ſi l'on tire de l'urne le numéro $A1$, elle deviendra ${}_{n-1}y_{x-1}$; ſi l'on tire le numéro $A2$ elle deviendra ${}_{n-2}y_{x-2}$; ſi le numéro $B1$ ſort, elle ſera ${}_n y_{x-1}$; ſi c'eſt le numéro $B2$, elle ſera ${}_n y_{x-2}$; on aura donc

$$
\begin{aligned}
{}_n y_x = \tfrac{1}{4}\cdot{}_n y_{x-1} &+ \tfrac{1}{4}\cdot{}_n y_{x-2} \\
+ \tfrac{1}{4}\cdot{}_{n-1}y_{x-1} &+ \tfrac{1}{4}\cdot{}_{n-2}y_{x-2}
\end{aligned} \qquad (1).
$$

Cette équation s'intègre par le Problème VII; mais pour cela il faut avoir deux équations particulières dans deux ſuppoſitions particulières pour n; or ſi l'on ſuppoſe $n = 0$, on a ${}_0 y_x = 0$, & ſi l'on ſuppoſe $n = 1$, ${}_1 y_x = \frac{1}{2}\cdot{}_1 y_{x-1}$. Parce que je ſuppoſe qu'alors les deux joueurs excluent les numéros $A2$ & $B2$; on a donc par le Problème VII,

$$ {}_n y_x = a_n\cdot{}_n y_{x-1} + {}^1a_n\cdot{}_n y_{x-2} + {}^2a_n\cdot{}_n y_{x-3} + \&c. $$

& l'équation

$$ 1 = \frac{a_n}{f} + \frac{{}^1a_n}{f^2} + \frac{{}^2a_n}{f^3} + \&c. $$

eſt la même que celle-ci

$$ 0 = \left(1 - \frac{1}{2f}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{4f} - \frac{1}{4ff}\right)^{n-1} $$

on aura ainsi

$$ {}_n y_x = \frac{A_n}{2^x} + p^x . \left\{ \begin{array}{l} N_n . \frac{x.(x-1)\ldots(x-n+3)}{1.2.3\ldots(n-2)} + M_n . \frac{x.(x-1)\ldots(x-n+4)}{1.2.3\ldots(n-3)} \\ + L_n . \frac{x.(x-1)\ldots(x-n+5)}{1.2.3\ldots(n-4)} + K_n . \frac{x.(x-1)\ldots(x-n+6)}{1.2.3\ldots(n-5)} \\ + \&c. + C_n \end{array} \right. $$

$$ + {}'p_x . \left\{ \quad N_n . \frac{x.(x-1)\ldots(x-n+3)}{1.2.3\ldots(n-2)} + \&c. \right. $$

p & $'p$ étant les deux racines de l'équation, $f^2 - \frac{1}{4} f = \frac{1}{4}$; c'est-à-dire p étant $= \frac{1+\sqrt{(17)}}{8}$, & $'p$ étant $= \frac{1-\sqrt{(17)}}{8}$.

Il faut présentement déterminer les constantes arbitraires A_n, N_n, &c. or si l'on substitue dans l'équation (1), au lieu de ${}_n y_x$. ${}_n y_{x-1}$, ${}_{n-1} y_{x-1}$, &c. leurs valeurs tirées de l'expression de ${}_n y_x$, on aura

$$ \frac{A_n}{2^x} + p^x . \left\{ \begin{array}{l} N_n . \frac{(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots(n-2)} + (2 N_n + M_n) . \frac{(x-2)\ldots(x-n+2)}{1.2.3\ldots(n-3)} \\ + (N_n + 2 . M_n + L_n) . \frac{(x-2)\ldots(x-n+3)}{1.2.3\ldots(n-4)} \\ + (M_n + 2 . L_n + K_n) . \frac{(x-2)\ldots(x-n+4)}{1.2.3.n\ldots(n-5)} \\ + \&c. \ldots\ldots\ldots + C_n . \end{array} \right. $$

$$ + {}'p^x . \left\{ {}'N_n . \frac{(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots(n-2)} + \&c. \right. $$

$$ = \frac{1}{4} . p^x . \left\{ \begin{array}{l} N_n (\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}) . \frac{(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots(n-2)} \\ + [\frac{N_n}{p} + M_n . (\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}) + \frac{N_{n-1}}{p}] . \frac{(x-2)\ldots(x-n+2)}{1.2.3\ldots(n-3)} \\ + [\frac{M_n}{p} + L_n (\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}) + \frac{M_{n-1}}{p} \\ \qquad + \frac{N_{n-1}}{p} + \frac{N_{n-1}}{p^2}] . \frac{(x-2)\ldots(x-n+3)}{1.2.3\ldots(n-4)} \\ + [\frac{L_n}{p} + K_n . (\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}) + \frac{L_{n-1}}{p} \\ \qquad + \frac{M_{n-1}}{p} + \frac{M_{n-1}}{p^2}] . \frac{(x-2)\ldots(x-n+4)}{1.2.3\ldots(n-5)} + \&c. \end{array} \right. $$

$$+ \frac{1}{4} \cdot {}'p^x \cdot \begin{cases} {}'N_n \left(\frac{1}{{}'p} + \frac{1}{{}'p^2}\right) \cdot \frac{(x-2)\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots(n-2)} \\ + \text{\&c.} \end{cases}$$

$$+ \frac{1}{4} \cdot \frac{A_n}{2^{x-1}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{A_n}{2^{x-1}}$$

$$+ \frac{1}{4} \cdot \frac{A_{n-1}}{2^{x-1}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{A_{n-1}}{2^{x-2}}$$

D'où l'on formera les équations suivantes, en considérant que $1 = \frac{1}{4p} + \frac{1}{4pp}$;

$$0 = \frac{1}{2} \cdot A_n + \frac{1}{2} \cdot A_{n-1} + A_{n-2}$$

$$2 N_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{N_n}{p} + \frac{1}{4} \cdot \frac{N_{n-1}}{p}$$

$$2 M_n + N_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{M_n}{p} + \frac{1}{4} \cdot \frac{M_{n-1}}{p} + \frac{1}{4} \cdot \frac{N_{n-1}}{p^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{N_{n-1}}{p}$$

$$2 \cdot L_n + M_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{L_n}{p}$$

$$+ \frac{1}{4} \cdot \frac{L_{n-1}}{p} + \frac{1}{4} \cdot \frac{M_{n-1}}{p^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{M_{n-1}}{p},$$

&c.

On aura des équations semblables pour $'N_n$, $'M_n$, &c. l'on déterminera les quantités C_n, & $'C_n$, en considérant que lorsque $n = x$, ${}_ny_x = 1$, & lorsque $x = 2n$, ${}_ny_x = \frac{1}{2}$; d'où l'on tire les équations

$$1 = \frac{A_n}{2^n} + p^n \left[C_n + n \cdot D_n \ldots + \frac{n.(n-1)\ldots3}{1.2.3\ldots(n-2)} \cdot N_n\right]$$
$$+ {}'p^n \left[{}'C_n + n \cdot {}'D_n + \text{\&c.}\right]$$

&

$$\frac{1}{2} = \frac{A_n}{2^{2n}} + p^{2n}\left[C_n + 2n \cdot D_n + \text{\&c.} \ldots + N_n \cdot \frac{2n\ldots(n+3)}{1.2\ldots(n-2)}\right]$$
$$+ {}'p^{2n}\left[{}'C_n + 2n \cdot {}'D_n + \text{\&c.} \ldots + {}'N_n \cdot \frac{2n\ldots(n+3)}{1.2.3\ldots(n-2)}\right]$$

il faut présentement intégrer les équations précédentes; or, si l'on fait $-\frac{1}{2\sqrt{2}} = \text{cos. } q$; & $\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \text{sin. } q$, ce qui donne à peu-près $q = 110^\circ\, 42'$, on trouvera *art. IX*,

$$A_n = 2^{\frac{n}{2}} . [\alpha \text{ cos. } nq + \beta . \text{ sin. } nq]$$

α & β étant deux constantes arbitraires; or, si l'on fait $n = 0$, on a $A_0 = 0 = \alpha$; & si l'on fait $n = 1$, on a $A_1 = \frac{1}{2}$, parce que ${}_1y_x = \frac{1}{2^{x-1}}$; donc, $\beta . \sqrt{2} . \text{sin. } q = \frac{1}{2}$, & $\beta = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ sin. } q$; partant, $A_n = 2^{\frac{n-3}{2}} \frac{\text{sin. } nq}{\text{sin. } q}$.

l'équation $2 N_n = \frac{1}{4} . \frac{N_n}{p} + \frac{1}{4} . \frac{N_{n-1}}{p}$. donne $N_n = \frac{Q}{(8p-1)^{n-2}}$. cette valeur de N_n ne commence à avoir lieu que lorsque $n = 2$; donc, $Q = N_2$, & $N_n = \frac{N_2}{(8p-1)^{n-2}}$; pareillement, $'N_n = \frac{'N_2}{(8.'p-1)^{n-2}}$; on déterminera N_2 & $'N_2$ par ces équations

$$1 = \frac{A_2}{2^2} + p^2 . N_2 + 'p^2 . 'N_2$$

$$\frac{1}{2} = \frac{A_2}{2^4} + p^4 . N_2 + 'p^4 . 'N_2$$

on déterminera de la même manière, les autres coëfficiens M_n, L_n, K_n, &c.

XXXIII.

PROBLEME XVII.

Deux Joueurs A & B jouent à cette condition, qu'à chaque coup, celui qui perdra donnera un écu à l'autre; je suppose que l'adresse de A soit à celle de B, comme p est à q, & que l'un & l'autre ait un nombre m d'écus; on demande quelle est la probabilité que le jeu finira avant, ou au nombre x de coups.

Je suppose d'abord $p = q$. soit ${}_0y_x$, le nombre des cas suivans lesquels au coup x, le gain des deux Joueurs est nul; ${}_1y_x$ le nombre des cas suivans lesquels le gain de l'un ou de l'autre est 1; ${}_2y_x$ le nombre des cas suivans lesquels il est 2, & ainsi de suite; cela posé, on formera les équations suivantes.

$$\left\{\begin{array}{l} {}_0y_x = {}_1y_{x-1} \\ {}_1y_x = 2 \cdot {}_0y_{x-1} + {}_2y_{x-1} \\ {}_2y_x = {}_1y_{x-1} + {}_3y_{x-1} \\ {}_3y_x = {}_2y_{x-1} + {}_4y_{x-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ {}_ny_x = {}_{n-1}y_{x-1} + {}_{n+1}y_{x-1} \quad (\sigma) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ {}_{m-1}y_x = {}_{m-2}y_{x-1} \end{array}\right\} (\psi)$$

Pour montrer par quel procédé on obtient ces équations, j'obſerve qu'en un coup il peut arriver deux cas différens; ſavoir que A gagne, ou que ce ſoit B; or, il eſt clair que le gain ne peut être zéro au coup x, ſans avoir été 1 au coup $x - 1$, & chaque cas dans lequel il eſt 1 au coup $x - 1$, donne un cas dans lequel il eſt nul au coup x; d'où je tire l'équation

$${}_0y_x = {}_1y_{x-1}$$

Enſuite tous les cas dans leſquels le gain eſt nul au coup $x - 1$, donnent chacun deux cas dans leſquels il eſt 1 au coup x; d'où l'on aura

$${}_1y_x = 2 \cdot {}_0y_{x-1} + {}_2y_{x-1}.$$

Il en eſt de même des autres équations; enfin on obtiendra la dernière, en conſidérant que l'on doit exclure le terme ${}_my_{x-1}$, parce que ce terme ne peut avoir lieu, tant que le jeu eſt ſuppoſé ne pas finir.

Le nombre de tous les cas poſſibles eſt 2^x; car en nommant h_x ce nombre, comme il peut arriver au coup ſuivant deux cas différens; ſavoir que A gagne B, ou que B gagne A; le nombre h_x pouvant ſe combiner avec ces deux cas, donne conſéquemment $2h_x$ pour le nombre de tous les cas poſſibles au coup $x + 1$; on a donc $h_{x+1} = 2\,h_x$; d'où en intégrant, $h_x = A \cdot 2^x$; A étant une conſtante arbitraire; or, poſant $x = 1$, $h_x = 2$; donc $A = 1$, & $h_x = 2^x$.

Soit

Soit présentement u_x la probabilité que le jeu finira précisément au nombre x de coups; on aura $u_x = \frac{{}_n y_x}{2^x}$; mais on a visiblement ${}_n y_x = {}_{n-1}y_{x-1}$; donc $u_x = \frac{{}_{n-1}y_{x-1}}{2^x}$. Soit z_x la probabilité que le jeu finira avant ou au nombre x de coups, on aura $z_x = z_{x-1} + u_x$; donc $\Delta . z_{x-1} = \frac{{}_{n-1}y_{x-1}}{2^x}$, ou $2^{x+1} . \Delta . z_x = {}_{n-1}y_x$. Il ne s'agit donc plus que de déterminer la valeur de ${}_{n-1}y_x$, ce qui peut se faire au moyen des équations précédentes (ψ). Pour cela j'observe que ces équations peuvent se rapporter au Problème VIII, au moyen d'une légère préparation; or cette préparation consiste à former, au moyen des deux premières, une équation entre *trois variables*, ce que l'on fera en substituant dans la seconde, au lieu de ${}_0 y_{x-1}$, sa valeur ${}_1 y_{x-2}$, tirée de la première, & l'on aura

$$ {}_1 y_x = 2 . {}_1 y_{x-2} + {}_2 y_{x-1}. $$

Soit maintenant

$$ {}_n y_x = a_n . {}_n y_{x-2} + {}'a_n . {}_n y_{x-4} + \&c. \ldots + u_n \quad (\Omega) $$
$$ + b_n . {}_{n+1} y_{x-1} + {}'b_n . {}_{n+1} y_{x-3} + \&c. $$

Il ne faut point tenir compte dans cette équation, des termes ${}_n y_{x-1}$, ${}_n y_{x-3}$, &c. ${}_{n+1} y_{x-2}$, ${}_{n+1} y_{x-4}$, &c. parce que ces termes sont nuls dès que ${}_n y_x$ a une valeur quelconque, vu que si le gain est pair ou impair au coup x, il est nécessairement impair ou pair aux coups $x-1$, $x-3$, &c. cela posé, l'équation (Ω), donne

$$ {}_{n-1} y_{x-1} = a_{n-1} . {}_{n-1} y_{x-3} + {}'a_{n-1} . {}_{n-1} y_{x-5} + \&c. \ldots + u_{n-1} $$
$$ + b_{n-1} . {}_n y_{x-2} + {}'b_n . {}_n y_{x-4} + \&c. $$

Si l'on substitue dans cette équation au lieu de ${}_{n-1} y_{x-1}$, ${}_{n-1} y_{x-3}$, &c. leurs valeurs que donne l'équation (σ), on aura après avoir ordonné,

$$ {}_{n}y_{x} = [a_{n-1} + b_{n-1}] \cdot {}_{n}y_{x-2} + [{}'a_{n-1} + {}'b_{n-1}] \cdot {}_{n}y_{x-4} $$
$$ + [{}^{2}a_{n-1} + {}^{2}b_{n-1}] \cdot {}_{n}y_{x-6} + \&c. $$
$$ + {}_{n+1}y_{x-1} - a_{n-1} \cdot {}_{n+1}y_{x-3} - {}'a_{n-1} \cdot {}_{n+1}y_{x-5} - \&c. \ldots + u_{n-1}; $$

en comparant cette équation avec l'équation (Ω), on aura

$$ b_n = 1 $$
$$ a_n = a_{n-1} + b_{n-1} $$
$$ {}'b_n = - a_{n-1} $$
$$ {}'a_n = {}'a_{n-1} + {}'b_{n-1} $$
$$ {}^{2}b_n = - {}'a_{n-1} $$
$$ {}^{2}a_{n-1} = {}^{2}a_{n-1} + {}^{2}b_{n-1} $$
$$ \&c. $$
$$ u_n = u_{n-1} $$

Pour intégrer ces équations, il est nécessaire de faire les considérations suivantes:

La première équation commence à avoir lieu lorsque $n = 1$.

La seconde ne commence à exister que lorsque $n = 2$; ainsi, la constante arbitraire qui vient en l'intégrant, doit se déterminer au moyen de la valeur de a_n lorsque $n = 1$.

La troisième équation commence à exister lorsque $n = 2$.

La quatrième ne commence à exister que lorsque $n = 3$; & la constante arbitraire qui vient en l'intégrant, doit se déterminer au moyen de la valeur de ${}'a_n$, lorsque $n = 2$; & ainsi du reste: cela posé,

Si l'on intègre la seconde équation, on aura $a_n = n + C$, C étant une constante arbitraire; or, posant $n = 1$, $a_n = 2$, donc, $C = 1$; partant, ${}'b_n = - a_{n-1} = - n$. On doit observer que cette équation ne commence à exister que lorsque $n = 2$; or, n étant 1, on a ${}'b_1 = 0$, ${}^{2}b_1 = 0$, &c. de plus, en faisant $n = 2$, on a ${}^{2}b_2 = - {}'a_1 = 0$; semblablement, ${}^{3}b_2 = 0$, ${}^{4}b_2 = 0$, &c. ${}'a_2 = {}'a_1 + {}'b_1 = 0$; pareillement, ${}^{2}a_2 = 0$, ${}^{3}a_2 = 0$, &c.

Si l'on intègre la quatrième équation, on aura

${}'a_n = - \frac{(n+1).(n-2)}{1.2} + C$; pour déterminer la constante C,

on se servira de la valeur de ${}^1a_1$; or, on a ${}^1a_1 = 0$; donc $C = 0$; partant, ${}^2b_n = \frac{n.(n-3)}{1.2}$; cette expression de ${}^2b_n$ ne peut commencer à avoir lieu par les remarques précédentes, que lorsque $n = 3$; de plus, en faisant $n = 3$, on a ${}^3b_1 = -{}^2a_1 = 0$; pareillement, ${}^4b_1 = 0$, ${}^5b_1 = 0$, &c. ${}^2a_1 = {}^1a_1 + {}^2b_1 = 0$; pareillement, ${}^3a_1 = 0$, ${}^4a_1 = 0$, &c.

La sixième équation donne en intégrant

${}^2a_n = \frac{(n+1).(n-3).(n-4)}{1.2.3} + C$. Pour déterminer C, j'observe que ${}^2a_1 = 0$; donc, $C = 0$. Partant

${}^3b_n = -\frac{n.(n-4).(n-5)}{1.2.3}$, expression qui ne peut commencer à exister que lorsque $n = 4$, & ainsi de suite.

Enfin, $u_n = u_{n-1}$; donc, $u_n = C$; or, posant $n = 1$, $u_1 = 0$; donc, $C = 0$. Ainsi l'on aura

$$ {}_ny_x = (n+1).{}_ny_{x-2} - \frac{(n+1).(n-2)}{1.2}.{}_ny_{x-4} $$
$$ + \frac{(n+1).(n-3).(n-4)}{1.2.3}.{}_ny_{x-6} - \&c. $$
$$ + {}_{n+1}y_{x-1} - n.{}_{n+1}y_{x-3} + \frac{n.(n-3)}{1.2}.{}_{n+1}y_{x-5} - \&c. $$

Si l'on suppose présentement $n = m - 1$, alors il ne faut point tenir compte des termes ${}_{n+1}y_{x-1}$, ${}_{n+1}y_{x-3}$, &c. parce que ces termes sont exclus des équations (ψ); on aura donc, ${}_{m-1}y_x = m.{}_{m-1}y_{x-2} - \frac{m.(m-3)}{1.2}.{}_{m-1}y_{x-4}$

$$ + \frac{m.(m-4).(m-5)}{1.2.3}\,{}_{m-1}y_{x-6} - \&c. $$

Si l'on substitue présentement dans cette équation, au lieu de ${}_{m-1}y_x$, sa valeur $2^{x+1}.\Delta.z_x$, on aura, après avoir intégré,

$$ z_x = m.\frac{1}{2^2}.z_{x-2} - \frac{m.(m-3)}{1.2}.\frac{1}{2^4}\,z_{x-4} $$
$$ + \frac{m.(m-4).(m-5)}{1.2.3}.\frac{1}{2^6}.z_{x-6}\ldots + C. $$

Je suppose maintenant les adresses de deux joueurs inégales dans la raison de p à q; soit $p + q = 1$. Cela posé, si l'on demande la probabilité de la combinaison suivante,

$$\overset{1}{p} \cdot \overset{2}{q} \cdot \overset{3}{q} \cdot \overset{4}{p} \cdot \overset{5}{p} \cdot \overset{6}{p} \cdot \overset{7}{q} \cdots\cdots \overset{x}{q},$$

ce qui signifie A gagne au premier coup, B au second & au troisième, A aux quatrième, cinquième & sixième, &c. Il est clair que pour avoir cette probabilité on doit multiplier toutes ces quantités les unes par les autres; nommant donc r le nombre de fois que p se trouve répété dans cette combinaison, $x - r$ exprimera combien de fois q s'y trouve répété; la probabilité de cette combinaison sera conséquemment $p^r \cdot q^{x-r}$.

Si l'on fait $x - r = r + s$, & que dans quelque endroit que l'on arrête la combinaison, le nombre de fois qu'une des quantités p & q s'y trouve plus souvent répétée que l'autre soit toujours moindre que m, cette combinaison sera une de celles dans lesquelles B gagneroit s écus au joueur A; or, on peut faire une combinaison correspondante dans laquelle A gagneroit s écus à B, & la probabilité de cette combinaison sera $= q^r \cdot p^{r+s}$, le rapport de cette probabilité à la précédente est celui de p^s à q^s; d'où il résulte que généralement le nombre des cas suivant lesquels A gagne s écus à B, multipliés chacun par leur probabilité particulière, est au nombre des cas suivant lesquels B gagne s écus au joueur A, multipliés par leur probabilité, comme $p^s : q^s$; cela posé,

Soit ${}_0y_x$ le nombre des cas suivant lesquels au coup x le gain des deux joueurs est nul, multipliés chacun par leur probabilité. Soient ${}_1y_x$, ${}_2y_x$, &c. le nombre des cas suivant lesquels le gain du joueur A est 1, 2, &c. écus, multipliés chacun par leur probabilité particulière, & que ${}_1\dot{y}_x$, ${}_2\dot{y}_x$, &c. expriment des quantités analogues pour le joueur B; il est aisé présentement par des considérations entièrement semblables à celles suivant lesquelles j'ai formé les équations (♃), d'obtenir les suivantes,

$$\left\{\begin{array}{l} {}_0y_x = q \cdot {}_1y_{x-1} + p \cdot {}_1y_{x-1} \\ {}_1y_x = p \cdot {}_0y_{x-1} + q \cdot {}_2y_{x-1} \\ {}_2y_x = p \cdot {}_1y_{x-1} + q \cdot {}_3y_{x-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ {}_ny_x = p \cdot {}_{n-1}y_{x-1} + q \cdot {}_{n+1}y_{x-1} (\sigma') \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ {}_{m-1}y_x = p \cdot {}_{m-2}y_{x-1} \end{array}\right\} (\psi')$$

Or on a par les remarques précédentes, $p \cdot {}_1y_{x-1} = q \cdot {}_1y_{x-1}$. La première équation devient donc ${}_0y_x = 2q \cdot {}_1y_{x-1}$, partant ${}_0y_{x-1} = 2q \cdot {}_1y_{x-2}$; substituant cette valeur de ${}_0y_{x-1}$ dans la seconde, on aura ${}_1y_x = 2qp \cdot {}_1y_{x-2} + q \cdot {}_2y_{x-1}$; il est aisé de voir que les équations (ψ') se rapportent ainsi au Problème VIII. Soit donc

$$\begin{array}{l} {}_ny_x = a_n \cdot {}_ny_{x-2} + {}'a_n \cdot {}_ny_{x-4} + \&c. \ldots + u_n \\ \quad + b_n \cdot {}_{n+1}y_{x-1} + {}'b_n \cdot {}_{n+1}y_{x-3} + \&c. \end{array}$$

& l'on trouvera en opérant exactement, comme je l'ai fait ci-dessus, lorsque p & q étoient égaux,

$$\begin{array}{l} {}_ny_x = (n+1) \cdot pq \cdot {}_ny_{x-2} - \frac{(n+1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2} \cdot p^2q^2 \cdot {}_ny_{x-4} + \&c. \\ \quad + q \cdot {}_{n+1}y_{x-1} - n \cdot pq^2 \cdot {}_{n+1}y_{x-3} + \&c. \end{array}$$

Donc, si l'on suppose $n = m - 1$, on aura

$${}_{m-1}y_x = m \cdot pq \cdot {}_{m-1}y_{x-2} - \frac{m \cdot (m-3)}{1 \cdot 2} \cdot p^2q^2 \cdot {}_{m-1}y_{x-4} + \&c. (\varpi);$$

en rejetant les termes ${}_my_{x-1}$, ${}_my_{x-3}$, &c. qui ne peuvent avoir lieu, d'après la supposition que le jeu ne finit pas avant le coup x. Soit maintenant u_x la probabilité que le jeu finira précisément au coup x, il est visible que l'on aura $u_x = {}_my_x + {}_my^1_x$; or on a ${}_my_x : {}_my^1_x :: p^m : q^m$; donc, $u_x = \left(1 + \frac{q^m}{p^m}\right) \cdot {}_my_x$; de plus, ${}_my_x = p \cdot {}_{m-1}y_{x-1}$; partant, $u_x = p\left(1 + \frac{q^m}{p^m}\right) \cdot {}_{m-1}y_{x-1}$. Soit z_x la probabilité que le jeu finira avant, ou au

coup x, on aura $\Delta \cdot z_x = u_{x+1} = p(1 + \frac{q^m}{p^m}) \cdot {}_{m-1}y_x$;
en ſubſtituant donc au lieu de ${}_{m-1}y_x$, cette valeur dans l'équation (ϖ), on aura, après avoir intégré,

$$z_x = m \cdot p\,q \cdot z_{x-2} - \frac{m.(m-3)}{1.2} \cdot p^2 q^2 \cdot z_{x-4} + \frac{m.(m-4).(m-5)}{1.2.3} \cdot p^3 q^3 \cdot z_{x-6} - \&c. + C \; (\varpi).$$

Pour déterminer la conſtante arbitraire C, j'obſerve que tant que x eſt moindre que m, $z_x = 0$, & que x étant égal à m, $z_x = p^m + q^m$; donc, $C = p^m + q^m$. Soit $1 - t_x = z_x$; t_x exprimera conſéquemment la probabilité que le jeu ne finira pas avant, ou au coup x, & l'on aura

$$t_x = m \cdot p\,q \cdot t_{x-2} - \frac{m.(m-3)}{1.2} \cdot p^2 q^2 \cdot t_{x-4} + \&c. - p^m - q^m + [1 - m\,p\,q + \frac{m.(m-3)}{1.2} p^2 q^2 - \&c.]$$

Or il eſt remarquable que l'on a, quel que ſoit m, & en ſuppoſant $p + q = 1$,

$$0 = 1 - p^m - q^m - m\,p\,q + \frac{m.(m-3)}{1.2} \cdot p^2 q^2 - \&c.$$

ou généralement, en ſuppoſant p & q quelconques,

$$(p+q)^m = m \cdot pq(p+q)^{m-2} - \frac{m.(m-3)}{1.2} \cdot p^2 q^2 \cdot (p+q)^{m-4} + \&c. + p^m + q^m,$$

c'eſt ce dont on pourroit s'aſſurer par induction, en donnant à m différentes valeurs numériques, mais en voici une démonſtration générale; on a

$$p + q = p + q$$
$$(p+q)^2 = 2\,p\,q \cdot (p+q)^0 + p^2 + q^2,$$
$$(p+q)^3 = 3\,p\,q\,(p+q) + p^3 + q^3,$$
&c.

Soit donc en général

$$(p+q)^m = A_m \cdot (p+q)^{m-2} + {}'A_m \cdot (p+q)^{m-4} + \&c. + p^m + q^m \; (\delta)$$

& l'on aura

$$(p+q)^{m+1} = A_m \cdot (p+q)^{m-1} + {}'A_m \cdot (p+q)^{m-3} + \&c... \\ + p^{m+1} + q^{m+1} \\ + pq(p^{m-1} + q^{m-1})$$

Or, on a

$$p^{m-1} + q^{m-1} = (p+q)^{m-1} - A_{m-1} \cdot (p+q)^{m-3} - \&c.$$

Donc,

$$(p+q)^{m+1} = (A_m + pq) \cdot (p+q)^{m-1} \\ + ({}'A_m - A_{m-1} \cdot pq)(p+q)^{m-3} + \&c. \\ + p^{m+1} + q^{m+1}$$

On a d'ailleurs

$$(p+q)^{m+1} = A_{m+1}(p+q)^{m-1} \\ + {}'A_{m+1} \cdot (p+q)^{m-3} + \&c. + p^{m+1} + q^{m+1},$$

d'où, en comparant, on aura

$$A_{m+1} = A_m + pq$$
$${}'A_{m+1} = {}'A_m - A_{m-1} \cdot pq$$
$${}^2A_{m+1} = {}^2A_m - {}'A_{m-1} \cdot pq$$
&c.

Toutes ces équations ne peuvent commencer à exiſter à la fois; la première ne commence à avoir lieu que lorſque $m = 1$; la ſeconde lorſque $m = 2$; la troiſième lorſque $m = 3$, &c. De plus, comme elles ſuppoſent néceſſairement connues les expreſſions de $(p+q)^1$ & $(p+q)^2$, pour déterminer enſuite à leur moyen, $(p+q)^3$, $(p+q)^4$, &c. il réſulte que la loi repréſentée par ces équations, commence à avoir lieu lorſque $m + 1 = 3$; ainſi, la première équation commence à exiſter lorſque $m = 2$; la ſeconde, lorſque $m = 3$; la troiſième, lorſque $m = 4$, &c. cela poſé,

En intégrant la première, on a $A_m = m \cdot pq + C$. Or, poſant $m = 2$, on a, $A_2 = 2pq$; donc, $C = 0$.

Enſuite, la ſeconde donne ${}'A_m = -\frac{m \cdot (m-3)}{1 \cdot 2} p^2 q^2 + C$:

or, posant $m = 3$, $'A_1 = 0$, parce que $(p+q)$ ne peut avoir d'exposant négatif dans la formule $(\&)$; donc, $C = 0$; & ainsi du reste. Donc,

$$(p+q)^m = mpq\cdot(p+q)^{m-2} - \frac{m.(m-3)}{1.2}.p^2q^2.(p+q)^{m-4} + \&c... + p^m + q^m;$$

ainsi, l'on aura

$$t_x = m.pq.t_{x-2} - \frac{m.(m-3)}{1.2}.p^2q^2.t_{x-4} + \&c. \quad (\delta)$$

Pour intégrer cette équation, je commence par observer qu'elle est différentielle de l'ordre $\frac{m}{2}$ ou $\frac{m-1}{2}$, suivant que m est pair ou impair. De plus, il est aisé de voir à l'inspection des équations (ψ'), qu'elle commence à exister lorsque $x = m$. Ainsi, les constantes arbitraires qui viennent par l'intégration, doivent être déterminées par les valeurs de t_x, lorsqu'on fait $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$, &c... $x = m - 2$, ou $x = 1$, $x = 3$, $x = 5$... $x = m - 2$, suivant que m est pair ou impair. Or, toutes ces valeurs sont égales à l'unité, puisqu'il est certain que le jeu ne peut finir avant m coups.

Présentement, si l'on suppose $x' = \frac{x}{2}$ ou $\frac{x-1}{2}$, suivant que m est pair ou impair, on aura

$$t_{x'} = m.pq.t_{x'-1} - \frac{m.(m-3)}{1.2}.t_{x'-2} + \&c.$$

L'intégrale de cette équation dépend de la résolution de cette équation algébrique,

$$f^{\frac{m}{2}} = m.pq.f^{\frac{m}{2}-1} - \frac{m.(m-3)}{1.2}.p^2q^2.f^{\frac{m}{2}-2} + \&c.$$

si m est pair; ou de celle-ci

$$f^{\frac{m-1}{2}} = m.pq.f^{\frac{m-1}{2}-1} - \frac{m.(m-3)}{1.2}.p^2q^2f^{\frac{m-1}{2}-2} + \&c.$$

si m est impair.

Or,

Or. si l'on fait cos. $\varphi = y$, on a, comme l'on sait,

$$\text{cos. } m\varphi = 2^{m-1} . y^m - m . 2^{m-3} . y^{m-2} + \frac{m.(m-3)}{1.2} . 2^{m-5} . y^{m-4} - \&c.$$

Soit cos. $m\varphi = 0$, & l'on aura

$$0 = y^m - m . \frac{1}{4} . y^{m-2} + \frac{m.(m-3)}{1.2} . \frac{1}{4^2} . y^{m-4} - \&c.$$

lorsque m est pair,

$$\text{ou, } 0 = y^{m-1} - m . \frac{1}{4} . y^{m-3} + \frac{m.(m-3)}{1.2} . \frac{1}{4^2} . y^{m-5} - \&c.$$

lorsque m est impair.

Les différentes valeurs de y dans cette équation, sont les cosinus des différens arcs qui, multipliés par m, ont leurs cosinus égaux à zéro; or, les arcs qui ont leurs cosinus nuls, sont $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, &c. π exprimant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité. Les différentes valeurs de y sont conséquemment, plus & moins, les cosinus des arcs $\frac{\pi}{2m}$, $\frac{3\pi}{2m}$, $\frac{5\pi}{2m}$, &c. jusqu'à $\frac{(m-1).\pi}{2m}$, ou $\frac{(m-2)\pi}{2m}$, inclusivement, suivant que m est pair ou impair; les cosinus des arcs suivans étant les mêmes, à la différence des signes près, celui de $\frac{\pi}{2}$ étant nul; soient donc l, $'l$, ^2l, &c. ces différens cosinus, les valeurs de y seront donc $\pm l$, $\pm 'l$, &c. or, il est aisé de voir que $f = 4 . y^2 p q$; partant, les différentes valeurs de f seront $4 l^2 . p q$, $4 . 'l^2 . p q$, &c. d'où l'on aura

$$t_x = A . [2 l \sqrt{(p q)}]^x + 'A [2 . 'l \sqrt{(p q)}]^x + \&c.$$

A, $'A$, &c. étant des constantes arbitraires qui se détermineront par la méthode de l'*article IX*.

XXXIV.

PROBLEME XVIII.

J'ai supposé dans le Problème précédent, que les deux

joueurs *A* & *B* avoient un égal nombre *m* d'écus; je ſuppoſe actuellement que le joueur *A* ait *i*, écus, & le joueur *B*, *m*, écus; le reſte ſubſiſtant comme ci-deſſus, on demande la probabilité que le jeu finira avant, ou au nombre *x* de coups.

Il eſt aiſé de voir que l'on aura d'abord les équations (ψ') du Problème précédent. De plus, on aura les ſuivantes.

$$\left.\begin{array}{l}
{}_{1}\overset{1}{y}_{x} = q\cdot\ {}_{0}\overset{1}{y}_{x-1} + p\cdot\ {}_{2}\overset{1}{y}_{x-1} \\
{}_{2}\overset{1}{y}_{x} = q\cdot\ {}_{1}\overset{1}{y}_{x-1} + p\cdot\ {}_{3}\overset{1}{y}_{x-1} \\
{}_{3}\overset{1}{y}_{x} = q\cdot\ {}_{2}\overset{1}{y}_{x-1} + p\cdot\ {}_{4}\overset{1}{y}_{x-1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
{}_{n}\overset{1}{y}_{x} = q\cdot\ {}_{n-1}\overset{1}{y}_{x-1} + p\cdot\ {}_{n+1}\overset{1}{y}_{x-1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
{}_{i-1}\overset{1}{y}_{x} = q\cdot\ {}_{i-2}\overset{1}{y}_{x-1}
\end{array}\right\}(\psi'')$$

Soit ${}_{i-1}\overset{1}{y}_{x} = {}_{1}\lambda_{x}$, ${}_{i-2}\overset{1}{y}_{x} = {}_{2}\lambda_{x}$, ${}_{i-3}\overset{1}{y}_{x} = {}_{3}\lambda_{x}$ . . . &c. ${}_{0}y_{x} = {}_{i}\lambda_{x}$, ${}_{1}y_{x} = {}_{i+1}\lambda_{x}$, ${}_{2}y_{x} = {}_{i+2}\lambda_{x}$, &c. & l'on aura, en réuniſſant les équations (ψ') & (ψ''),

$$\begin{array}{l}
{}_{1}\lambda_{x} = q\cdot\ {}_{2}\lambda_{x-1} \\
{}_{2}\lambda_{x} = q\cdot\ {}_{3}\lambda_{x-1} + p\ {}_{1}\lambda_{x-1} \\
\quad \&c.
\end{array}$$

. . . .

$${}_{i+m-1}\lambda_{x} = p\cdot{}_{i+m-2}\lambda_{x-1}$$

Soit

$$\begin{array}{l}
{}_{n}\lambda_{x} = a_{n}\cdot{}_{n}\lambda_{x-2} + {}^{1}a_{n}\cdot{}_{n}\lambda_{x-4} + {}^{2}a_{n}\cdot{}_{n}\lambda_{x-6}\cdots + u_{n} \\
\quad + b_{n}\cdot{}_{n+1}\lambda_{x-1} + {}^{1}b_{n}\cdot{}_{n+1}\lambda_{x-3} + {}^{2}b_{n}\cdot{}_{n-1}\lambda_{x-5} + \&c.\ (\Omega''),
\end{array}$$

& l'on aura

$$\begin{array}{l}
p\cdot{}_{n-1}\lambda_{x-1} = a_{n-1}\cdot p\cdot{}_{n-1}\lambda_{x-3} + {}^{1}a_{n-1}\cdot p\cdot{}_{n-1}\lambda_{x-5} \\
\quad + {}^{2}a_{n-1}\cdot p\cdot{}_{n-1}\lambda_{x-7}\cdots\cdots + u_{n-1}\cdot p \\
\quad + b_{n-1}\cdot p\cdot{}_{n}\lambda_{x-2} + {}^{1}b_{n-1}\cdot p\cdot{}_{n}\lambda_{x-4} + \&c.
\end{array}$$

or on a ${}_{n}\lambda_{x} = q \cdot {}_{n+1}\lambda_{x-1} + p \cdot {}_{n-1}\lambda_{x-1}$; donc,

$${}_{n}\lambda_{x} = (a_{n-1} + b_{n-1} \cdot p)\,{}_{n}\lambda_{x-2} + ({}^{1}a_{n-1} + {}^{1}b_{n-1} \cdot p)\,{}_{n}\lambda_{x-4}$$
$$+ ({}^{2}a_{n-1} + {}^{2}b_{n-1} \cdot p)\,{}_{n}\lambda_{x-6} + \&c. \ldots\ldots + u_{n-1} \cdot p$$
$$+ q \cdot {}_{n+1}\lambda_{x-1} - a_{n-1} \cdot q \cdot {}_{n+1}\lambda_{x-3} - {}^{1}a_{n-1} \cdot q \cdot {}_{n+1}\lambda_{x-5} - \&c.$$

d'où l'on aura en comparant avec l'équation (Ω'')

$$b_{n} = q$$
$$a_{n} = a_{n-1} + b_{n-1} \cdot p$$
$${}^{1}b_{n} = -\, a_{n-1} \cdot q$$
$${}^{1}a_{n} = {}^{1}a_{n-1} + {}^{1}b_{n-1} \cdot p$$
$${}^{2}b_{n} = -\, {}^{1}a_{n-1} \cdot q$$
$${}^{2}a_{n} = {}^{2}a_{n-1} + {}^{2}b_{n-1} \cdot p$$
&c.
$$u_{n} = u_{n-1} \cdot p$$

On doit observer que la première de ces équations commence à exister lorsque $n = 1$; la seconde & la troisième, lorsque $n = 2$; la quatrième & la cinquième lorsque $n = 3$, &c. Cela posé:

Si l'on intègre la seconde on aura $a_{n} = (n - 1) \cdot pq + C$; or, posant $n = 1$, $a_{n} = 0$; donc, $C = 0$; partant, ${}^{1}b_{n} = -\, a_{n-1} \cdot q = -\, (n - 2) p q^{2}$.

Si l'on intègre la quatrième, on aura

${}^{1}a_{n} = -\, \frac{(n-2) \cdot (n-3)}{1 \cdot 2} \cdot p^{2} q^{2} - C$; pour déterminer la constante C, j'observe que lorsque $n = 2$, on a ${}^{1}a_{2} = {}^{1}a_{1} + {}^{1}b_{1} \cdot p = 0$; donc, $C = 0$; partant,

${}^{2}b_{n} = \frac{(n-3) \cdot (n-4)}{1 \cdot 2} \cdot p^{2} q^{3}$.

Si l'on intègre la sixième équation, on aura

${}^{2}a_{n} = \frac{(n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot p^{3} q^{3} + C$; or, on a ${}^{2}a_{3} = {}^{2}a_{2} + {}^{2}b_{2}$, & ${}^{2}a_{2} = {}^{2}a_{1} + {}^{2}b_{1} = 0$; donc, ${}^{2}a_{3} = 0$; partant, $C = 0$, & ainsi du reste.

Enfin, on a $u_n = u_{n-1} . p$; donc, $u_n = C . p^n$; or, posant, $n = 1$, $u_n = 0$; donc, $C = 0$ & $u_n = 0$; donc,

$$_n\lambda_x = (n - 1) . pq . {}_n\lambda_{x-2} - \frac{(n-2).(n-3)}{1.2} p^2 q^2 . {}_n\lambda_{x-4} + \frac{(n-3).(n-4).(n-5)}{1.2.3} . p^3 q^3 . {}_n\lambda_{x-6} - \&c.$$

$$+ q . {}_{n+1}\lambda_{x-1} - (n-2) p q^2 . {}_{n+1}\lambda_{x-3} + \frac{(n-3).(n-4)}{1.2} . p^2 q^3 . {}_{n+1}\lambda_{x-5} - \&c.$$

Si l'on fait $n = i + m - 1$, on aura, $_{i+m-1}\lambda_x = {}_{m-1}y_x$, & $_{i+m}\lambda_x = 0$; donc,

$$_{m-1}y_x = (i + m - 2) p q . {}_{m-1}y_{x-2} - \frac{(i+m-3).(i+m-4)}{1.2} . p^2 q^2 . {}_{m-1}y_{x-4}; \quad (\mu)$$

$$+ \frac{(i+m-4).(i+m-5).(i+m-6)}{1.2.3} . p^3 q^3 . {}_{m-1}y_{x-6} - \&c.$$

Si donc l'on nomme z_x la probabilité que A gagnera avant ou au coup x; on aura, par un procédé semblable à celui du Problème précédent,

$$z_x = (m + i - 2) . p q . z_{x-2} - \frac{(m+i-3).(m+i-4)}{1.2} . p^2 q^2 . z_{x-4} + \&c. + C . (\pi)$$

Pareillement, si l'on nomme $\overset{1}{z}_x$ la probabilité du Joueur B, pour gagner avant, ou au coup x; on aura

$$\overset{1}{z}_x = (m + i - 2) . p q . \overset{1}{z}_{x-2} - \frac{(m+i-3).(m+i-4)}{1.2} . p^2 q^2 . \overset{1}{z}_{x-4} + \&c. + {}'C; \ (\pi')$$

Pour déterminer les constantes arbitraires qui entrent dans les expressions de z_x & $\overset{1}{z}_x$; j'observe qu'elles sont au nombre $\frac{m+i}{2}$, si $m + i$ est pair, ou $\frac{m+i+1}{2}$, s'il est impair; or, voici de quelle manière on les aura.

Je suppose m & i impairs; l'équation (μ) ne commencera

visiblement à avoir lieu que lorsque $x - i - m + 2 = 0$, ce qui donne $x = i + m - 2$. L'équation (π) ne commencera donc à exister que lorsque $x = i + m + 1$; il faut par conséquent avoir toutes les valeurs de z_x, depuis z_1 jusqu'à z_{i+m+1}, pour déterminer les constantes arbitraires de l'équation (π).

Si m & i sont des nombres pairs, l'équation $(\varkappa)$ ne commencera à avoir lieu que lorsque $x - i - m + 2 = 1$; ce qui donne $x = i + m - 1$. L'équation (π) ne commence donc à avoir lieu que lorsque $x = i + m + 2$; il faut par conséquent avoir les valeurs de z_x, depuis z_1 jusqu'à z_{i+m+2}.

Si m étant pair, i est impair; l'équation $(\varkappa)$ ne commencera à avoir lieu que lorsque $x - i - m + 1 = 1$; ce qui donne $x = i + m$. L'équation (π) n'a donc lieu que lorsque $x = i + m + 3$; ainsi il faut avoir les valeurs de z_x, depuis z_1 jusqu'à z_{i+m+3}.

Enfin, si m étant impair, i est pair; l'équation $(\varkappa)$ ne commencera à avoir lieu que lorsque $x - i - m + 1 = 0$; ce qui donne $x = i + m - 1$. L'équation (π) ne commence donc à exister que lorsque $x = i + m + 2$. Il faut conséquemment avoir les valeurs de z_x, depuis z_1, jusqu'à z_{i+m+2}.

Cela posé; le nombre de tous les cas possibles au coup m, multipliés chacun par leur probabilité particulière, sera

$$p^m + m p^{m-1} \cdot q + \frac{m.(m-1)}{1.2} \cdot p^{m-2} \cdot q^2 + \&c. \ldots + q^m$$

le nombre des cas qui font gagner A au coup m, $= p^m$. Pour avoir le nombre des cas qui le font gagner précisément au coup $m + 2$, il est visible qu'il faut retrancher p^m de la quantité précédente, & multiplier le reste par $p^2 + 2pq + q^2$; ce qui donne

$$mp^{m+1}\cdot q + \frac{m.(m-1)}{1.2}p^m\cdot q^2 + \frac{m(m-1).(m-2)}{1.2.3}\cdot p^{m-1}\cdot q^3 + \&c.$$
$$+ 2mp^m\cdot q^2 + \frac{2.m(m-1)}{1.2}\cdot p^{m-1}q^3 + \&c. \qquad (\chi)$$
$$+ mp^{m-1}q^3 + \&c.$$

Or, le nombre des cas qui le font gagner précisément au coup $m + 2$, est visiblement $m.p^{m+1}.q$; on a donc $z_{m+2} = p^m [1 + m.pq]$

Pour avoir le nombre des cas qui font gagner A au coup $m + 4$, il faut retrancher de la quantité précédente (χ), $mp^{m+1}q$; multiplier le reste par $p^2 + 2pq + q^2$, & l'on aura $\frac{m.(m+3)}{1.2}p^{m+2}.q^2$. pour le nombre de ces cas; ainsi,

$$z_{m+4} = p^m\left[1 + mpq + \frac{m.(m+3)}{1.2}.p^2q^2\right]$$

on trouvera de même

$$z_{m+6} = p^m\left[1 + mpq + \frac{m.(m+3)}{1.2}p^2q^2 + \frac{m.(m+4).(m+5)}{1.2.3}p^3q^3\right]$$

& ainsi de suite; la loi de ces valeurs de z_x a lieu jusqu'à z_{m+n-2}; si l'on avoit besoin de valeurs ultérieures de z_x, on les obtiendroit facilement par ce procédé.

Pour intégrer présentement l'équation (π) il faut avoir les racines de l'équation

$$f^{\frac{m+i-1}{2}} = (m - i - 2).pq.f^{\frac{m+i-3}{2}}$$
$$- \frac{(m+i-3).(m+i-4)}{1.2}p^2q^2.f^{\frac{m+i-5}{2}} + \&c.$$

si $m + i$ est impair, ou

$$f^{\frac{m+i}{2}-1} = (m + i - 2)pq.f^{\frac{m+i}{2}-2} - \&c.$$

si $m + i$ est pair; or on trouvera ces racines en considérant que l'on a

$$\text{sin.}\,(m + i)z = x.\left[2^{m+i-1}.u^{m+i-1}\right.$$
$$\left.- (m + i - 2).2^{m+i-3}.u^{m+i-3} + \&c.\right]$$

x étant le ſinus & u le coſinus de l'angle z; or poſant ſin. $(m + i) z = 0$, on aura,

$$u^{m+i-1} = (m + i - 2) \cdot \tfrac{1}{4} \cdot u^{m+i-3} - \&c.$$

ſoit $u = \frac{\sqrt{(f)}}{\sqrt{(pq)}}$, & l'on aura

$$f^{\frac{m+i-1}{2}} = (m + i - 2) \cdot p\,q \cdot f^{\frac{m+i-3}{2}} \ \&c.$$

ſi $m + i$ eſt impair, ou

$$f^{\frac{m+i}{2} - 1} = (m + i - 2) \cdot p\,q \cdot f^{\frac{m+i}{2} - 2} - \&c.$$

ſi $m + i$ eſt pair; les différentes valeurs de u, ſont les coſinus des angles z, tels que ſin. $(m + i) z = 0$, ce qui donne $z = \frac{\pi}{m+i}$, $z = \frac{2\pi}{m+i}$, $z = \frac{3\pi}{m+i}$, &c. ſoient l, ${}'l$, ${}^{2}l$, &c. les coſinus de ces angles juſqu'à $\frac{m+i}{2}$, ſi $m + i$, eſt pair, ou $\frac{m+i-1}{2}$, s'il eſt impair; les différentes valeurs de f feront $4\, l^2\, p\, q$, $4\, {}'l^2\, p\, q$, &c. Ces valeurs une fois déterminées, il eſt aiſé de trouver celles de z_x & ${}^{1}z_x$.

XXXV.

PROBLEME XIX.

Je ſuppoſe deux joueurs A & B, avec un égal nombre m d'écus, jouans à cette condition, que celui qui perdra donnera un écu à l'autre; que la probabilité de A pour gagner un coup ſoit p; que celle de B ſoit q; mais qu'il puiſſe arriver qu'aucun d'eux ne gagne, & que la probabilité pour cela ſoit r. Cela poſé, on demande la probabilité que le jeu finira avant ou au nombre x de coups.

Soit ${}_0y_x$ le nombre des cas ſuivant leſquels au coup x, le gain des deux joueurs eſt nul, multipliés par leur probabilités; ${}_1y_x$, ${}_2y_x$, ${}_3y_x$, &c. le nombre des cas ſuivant leſquels

le gain du joueur *A* eſt 1, 2, 3, &c. au coup x, multipliés par leur probabilité, & que ${}_1\overset{1}{y}_x$, ${}_2\overset{1}{y}_x$, ${}_3\overset{1}{y}_x$, &c. expriment les mêmes choſes pour le Joueur *B*. Cela poſé, on formera les équations ſuivantes.

$${}_0y_x = r \cdot {}_0y_{x-1} + q \cdot {}_1y_{x-1} + p \cdot {}_1\overset{1}{y}_{x-1}$$
$${}_1y_x = r \cdot {}_1y_{x-1} + q \cdot {}_2y_{x-1} + p \cdot {}_0y_{x-1}$$
$${}_2y_x = r \cdot {}_2y_{x-1} + q \cdot {}_3y_{x-1} + p \cdot {}_1y_{x-1}$$

. . . .

$${}_ny_x = r \cdot {}_ny_{x-1} + q \cdot {}_{n+1}y_{x-1} + p \cdot {}_{n-1}y_{x-1}; \; (—).$$

. . . .

$${}_{m-1}y_x = r \cdot {}_{m-1}y_{x-1} + p \cdot {}_{m-2}y_{x-1};$$

or, on a

$$p \cdot {}_1\overset{1}{y}_{x-1} = q \cdot {}_1y_{x-1}.$$

La première équation deviendra donc

$${}_0y_x = r \cdot {}_0y_{x-1} + 2q \cdot {}_1y_{x-1}.$$

& ſi on la combine avec la ſeconde, on aura

$${}_1y_x = 2r \cdot {}_1y_{x-1} + (2pq - r^2) \cdot {}_1y_{x-2} + q \cdot {}_2y_{x-1} - qr \cdot {}_2y_{x-2}$$

Soit maintenant,

$${}_ny_x = a_n \cdot {}_ny_{x-1} + {}'a_n \cdot {}_ny_{x-2} + \&c. \ldots + u_x$$
$$+ b_n \cdot {}_{n+1}y_{x-1} + {}'b_n \cdot {}_{n+1}y_{x-2} + \&c.$$

Donc,

$$p \cdot {}_{n-1}y_{x-1} = a_{n-1} \cdot p \cdot {}_{n-1}y_{x-2}$$
$$+ {}'a_{n-1} \cdot p \cdot {}_{n-1}y_{x-3} + \&c. \ldots + p \cdot u_{x-1}$$
$$+ b_{n-1} \cdot p \cdot {}_ny_{x-2} + {}'b_{n-1} \cdot p \cdot {}_ny_{x-3} + \&c.$$

Subſtituant au lieu de $p \cdot {}_{n-1}y_{x-1}$, $p \cdot {}_{n-1}y_{x-2}$, &c. leurs valeurs que donne l'équation (—), on aura

$${}_ny_x = [a_{n-1} + r] \cdot {}_ny_{x-1} + [{}'a_{n-1} - a_{n-1} \cdot r + pb_{n-1}] \cdot {}_ny_{x-2}$$
$$+ [{}^2a_{n-1} + {}'a_{n-1} \cdot r + pb_{n-1}] \cdot {}_ny_{x-3} + \&c.$$
$$+ q \cdot {}_{n+1}y_{x-1} - a_{n-1} \cdot q \cdot {}_{n+1}y_{x-2}$$
$$- {}'a_{n-1} \cdot q \cdot {}_{n+1}y_{x-3} - \&c. \ldots + p \cdot u_{x-1};$$

d'où,

d'où, en comparant, on aura

$$a_n = a_{n-1} + r$$
$$b_n = q$$
$${}^1a_n = {}^1a_{n-1} - a_{n-1} \cdot r + p \cdot b_{n-1}$$
$${}^1b_n = - a_{n-1} \cdot q$$
$${}^2a_n = {}^2a_{n-1} - {}^1a_{n-1} \cdot r + p \cdot {}^1b_{n-1},$$

&c.

La première de ces équations commence à exiſter lorſque $n = 2$; la ſeconde, lorſque $n = 1$; la troiſième, lorſque $n = 2$, &c. On aura donc, en intégrant & ajoutant les conſtantes convenables,

$$a_n = r \cdot (n + 1)$$
$$b_n = q$$
$${}^1a_n = - r^2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2} + pq \cdot (n + 1)$$
$${}^1b_n = - a_{n-1} \cdot q = - qrn.$$

Cette dernière équation étant vraie, lorſque $n = 1$; il ſuit que la cinquième équation commence à exiſter lorſque $n = 2$; ce qui donne, ${}^2a_n = r^3 \cdot \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - pqr \cdot (n + 1) \cdot (n - 1)$. Donc, ${}^2b_n = qr^2 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2}$; équation qui commence à exiſter lorſque $n = 1$, parce que ${}^2b_1 = 0$. Donc, la ſixième équation commence à exiſter lorſque $n = 2$, & l'on aura

$${}^3a_n = -r^4 \cdot \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + pqr^2 \cdot (n+1) \cdot (n-1) \cdot (n-2)$$
$$- p^2q^2 \cdot \frac{(n+1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2} + C.$$

Or, poſant $n = 2$, on a, ${}^3a_2 = {}^3a_1 - {}^2a_1 \cdot r + p \cdot {}^2b_1 = 0$; donc $C = 0$, & ainſi de ſuite; enfin, $u_n = 0$; on aura donc, en faiſant $n = m - 1$, & rejetant les termes ${}_{m}y_{x-1}$, ${}_{m}y_{x-2}$, &c.

$${}_{m-1}y_x = mr \cdot {}_{m-1}y_{x-1} - \left[r^2 \cdot \frac{m.(m-1)}{1.2} - pqm\right] \cdot {}_{m-1}y_{x-2}$$
$$+ \left[r^3 \cdot \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3} - pqr.m.(m-2)\right] \cdot {}_{m-1}y_{x-3}$$
$$- \left[r^4 \cdot \frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)}{1.2.3.4} - pqr^2 \cdot \frac{m.(m-2).(m-3)}{1.2}\right.$$
$$\left. + p^2 q^2 \cdot \frac{m.(m-3)}{1.2}\right] \cdot {}_{m-1}y_{x-4}$$
$$+ \text{\&c.}$$

si l'on suppose $r = 0$, on aura

$${}_{m-1}y_x = mpq \cdot {}_{m-1}y_{x-2} - \frac{m.(m-3)}{1.2} \cdot p^2 q^2 \cdot {}_{m-1}y_{x-4}$$

la même équation que j'ai trouvée ci-dessus pour ce cas.

Si l'on nomme z_x la probabilité de A pour gagner avant ou au coup x, on aura

$$z_x = mr \cdot z_{x-1} - \left(r^2 \cdot \frac{m.(m-1)}{1.2} - pqm\right) \cdot z_{x-2} + \text{\&c.} + C,$$

C étant une constante arbitraire.

Pareillement, si l'on nomme $\overset{1}{z}_x$ la probabilité de B pour gagner avant ou au coup x, on aura

$$\overset{1}{z}_x = mr \cdot \overset{1}{z}_{x-1} - \left(r^2 \cdot \frac{m.(m-1)}{1.2} - pqm\right) \cdot \overset{1}{z}_{x-2} + \text{\&c.} + \overset{1}{C},$$

pour intégrer ces équations, il faut avoir les racines de l'équation

$$f^m = mr \cdot f^{m-1} - \left(r^2 \frac{m.(m-1)}{1.2} - pqm\right) f^{m-2} + \text{\&c.} \quad (\Lambda),$$

or voici comme on peut les déterminer.

On a vu précédemment comment on pouvoit avoir les racines de l'équation

$$y^m = mpq \cdot y^{m-2} - \frac{m.(m-3)}{1.2} p^2 q^2 \cdot y^{m-4} + \text{\&c.}$$

Soit $y = f - r$, & l'on aura

$$f^m = mr \cdot f^{m-1} - \left[r^2 \cdot \frac{m.(m-1)}{1.2} - pqm\right] \cdot f^{m-2}$$
$$+ \left[r^3 \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3} - pqrm.(m-2)\right] \cdot f^{m-3} - \text{\&c.}$$

équation qui est la même que l'équation (Λ); les différentes valeurs de f sont par conséquent égales à celles de y, aug-

mentées de la quantité r; présentement l'intégration de l'équation différentielle en z_r, n'a rien d'embarrassant.

XXXVI.

Sur le principe de la Gravitation universelle, & sur les Inégalités séculaires des Planètes qui en dépendent.

Avant que d'entrer en matière, je crois devoir rappeler ici les équations générales du mouvement d'un corps de figure quelconque, & animé par des forces quelconques; parce qu'elles servent de base, non-seulement aux recherches suivantes, mais à d'autres encore que je me propose de publier dans la suite sur différens objets de l'Astronomie physique. M. d'Alembert a donné le premier, la solution générale de ce Problème, la méthode la plus directe pour y parvenir, & tout-à-la-fois l'application la plus utile & la plus heureuse que l'on en puisse faire, dans son excellent Traité *sur la précession des équinoxes;* Ouvrage original, qui brille par tout du génie de l'invention, & que l'on peut regarder comme renfermant le germe de tout ce qu'on a fait depuis dans la mécanique des corps solides. Cet illustre Géomètre a encore généralisé ses recherches dans plusieurs savans Mémoires qu'il a insérés dans le Recueil de l'Académie, & dans ses Opuscules. J'aurois pu renvoyer à ces ouvrages pour la démonstration des équations du Problème; mais comme celles auxquelles je parviens, ont une forme un peu différente des siennes, & qu'elles m'ont paru d'ailleurs commodes pour les appliquer à l'Astronomie; je vais exposer en peu de mots le procédé qui m'y a conduit.

XXXVII.

Du mouvement d'un Corps de figure quelconque & animé par des forces quelconques.

Par un point quelconque i du corps M (*fig. 1*), je mène trois droites iA, iB, iC perpendiculaires entre elles, & une

Fig. 1. droite iH qui traverſe ce Corps, & que je prendrai pour axe; ſoit $iH = 1$, & que la projection de iH ſur le plan AiB, ſoit iF; je nomme ϵ, l'angle AiF, & θ, l'angle HiF. Je ſuppoſe que durant le mouvement du point i, les droites iA, iB & iC, reſtent toujours parallèles à elles-mêmes; j'imagine de plus une droite $iV = iH = 1$, laquelle ſoit fixe dans le Corps & perpendiculaire à iH; par le point i, je mène dans le plan HiF la perpendiculaire iK à iH; ſoit ϖ, l'angle ViK; je ſuppoſe enfin un point S fixe ou conſidéré comme fixe dans l'eſpace, & je fais paſſer par ce point un plan bSa parallèle au plan BiA; les droites Sa & Sb étant ſuppoſées parallèles aux droites iA & iB; je mène enſuite la droite iS, dont SG eſt la projection ſur le plan bSa, & je fais $SG = r$, tang. $GSi = s$, & l'angle $GST = \phi$; cela poſé.

La poſition du Corps M dans l'eſpace, dépend 1.° de la poſition du point i; 2.° de la poſition de l'axe iH; 3.° de la poſition du Corps par rapport à cet axe; or, la poſition du point i eſt déterminée par les valeurs des quantités r, s & ϕ; la poſition de l'axe iH eſt déterminée par les valeurs des angles ϵ & θ; enfin, la poſition du Corps par rapport à l'axe iH, eſt déterminée par la valeur de l'angle ϖ; il faut donc trouver les équations qui déterminent ces quantités pour un inſtant donné quelconque.

Pour cela, je décompoſe les forces dont le Corps eſt animé, chacune en trois autres parallèles aux axes iA, iB & iC.

Soit ψ la ſomme des forces parallèles à iC; ψY & ψX la ſomme de leurs momens, par rapport aux axes iA & iB.

ψ' la ſomme des forces parallèles à iB; $\psi' Z'$, & $\psi' X'$ la ſomme de leurs momens par rapport aux axes iA & iC.

ψ'' la ſomme des forces parallèles à iA; $\psi'' Z''$, & $\psi'' Y''$ la ſomme de leurs momens, par rapport aux axes iB & iC; cela poſé.

Du point i ſur le point bSa, j'abaiſſe la perpendiculaire iG; & du point G ſur Sa, la perpendiculaire GT; ſoit $Gi = z$, $GT = y$, & $ST = x$. J'imagine enſuite une

molécule quelconque du corps M, que je nomme ∂M, & de laquelle si l'on mène sur le plan AiB les coordonnées parallèles aux trois axes iA, iB & iC, ces coordonnées soient exprimées par x', y' & z', en fixant leur origine au point i; la quantité de mouvement de cette molécule dans le sens iA, sera $(\frac{\partial x + \partial x'}{\partial t}) . \partial M$; dans le sens iB, elle sera $(\frac{\partial y + \partial y'}{\partial t}) . \partial M$; & dans le sens iC, elle sera $(\frac{\partial z + \partial z'}{\partial t}) . \partial M$; dans l'instant suivant ces quantités de mouvement deviennent

$$\frac{\partial x + \partial x' + \partial\partial x + \partial\partial x'}{\partial t} . \partial M; \quad \frac{\partial y + \partial y' + \partial\partial y + \partial\partial y'}{\partial t} . \partial M;$$

$$\frac{\partial z + \partial z' + \partial\partial z + \partial\partial z'}{\partial t} . \partial M;$$

en supposant ∂t constant; les quantités de mouvement perdues sont donc,

$$-(\frac{\partial\partial x + \partial\partial x'}{\partial t}) . \partial M; \quad -(\frac{\partial\partial y + \partial\partial y'}{\partial t}) . \partial M;$$

$$-(\frac{\partial\partial z + \partial\partial z'}{\partial t}) . \partial M.$$

Or, les forces nécessaires pour produire cette perte, sont égales à ces quantités de mouvement divisées par dt; & leur somme devant faire équilibre aux forces ψ, ψ' & ψ'', la somme des momens de toutes ces forces, par rapport à chacun des trois axes iC, iB & iA, doit être nulle, comme on le démontre en Mécanique; de-là, je tire les équations suivantes.

$$0 = \psi Y - \psi' Z' + \int \partial M . [z'(\frac{\partial\partial y + \partial\partial y'}{\partial t^2}) - y'(\frac{\partial\partial z + \partial\partial z'}{\partial t^2})]$$

$$0 = \psi X - \psi'' Z'' + \int \partial M . [z'(\frac{\partial\partial x + \partial\partial x'}{\partial t^2}) - x'(\frac{\partial\partial z + \partial\partial z'}{\partial t^2})]$$

$$0 = \psi' X' - \psi'' Y'' + \int \partial M . [y'(\frac{\partial\partial x + \partial\partial x'}{\partial t^2}) - x'(\frac{\partial\partial y + \partial\partial y'}{\partial t^2})]$$

le signe d'intégration se rapportant à la molécule ∂M, & à toutes les quantités qui varient avec elle.

De plus, la somme de toutes ces forces doit être nulle, suivant les directions de chacun de ces trois axes, puisque

le Corps eſt ſuppoſé libre; de-là, on aura,

$$\psi - \int \left(\frac{\partial\partial z' + \partial\partial z}{\partial t^2}\right) . \partial M = 0,$$

$$\psi' - \int \left(\frac{\partial\partial y' + \partial\partial y}{\partial t^2}\right) . \partial M = 0,$$

$$\psi'' - \int \left(\frac{\partial\partial x' + \partial\partial x}{\partial t^2}\right) . \partial M = 0.$$

Au moyen de ces ſix équations, on peut déterminer le mouvement du Corps pour un inſtant quelconque.

XXXVIII.

Le point i étant arbitraire, on peut ſimplifier les équations précédentes en prenant pour ce point, le centre d'inertie du Corps; car on a, par la propriété de ce centre,

$$\int x' \partial M = 0, \int y' \partial M = 0, \int z' \partial M = 0;$$

partant,

$$\int \partial M . \frac{\partial\partial x'}{\partial t^2} = 0, \int \partial M . \frac{\partial\partial y'}{\partial t^2} = 0, \int \partial M . \frac{\partial\partial z'}{\partial t^2} = 0;$$

$$\int \partial M . \frac{\partial\partial x}{\partial t^2} = M . \frac{\partial\partial x}{\partial t^2}; \int \partial M . \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} = M . \frac{\partial\partial y}{\partial t^2};$$

$$\int \partial M . \frac{\partial\partial z}{\partial t^2} = M . \frac{\partial\partial z}{\partial t^2}; \int z' \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} . \partial M = \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} .$$

$\int z' \partial M = 0$, & ainſi de ſuite; les équations précédentes deviendront conſéquemment

$$0 = \psi Y - \psi' Z' + \int \partial M . \left(z' \frac{\partial\partial y'}{\partial t^2} - y' \frac{\partial\partial z'}{\partial t^2}\right)$$

$$0 = \psi X - \psi'' Z'' + \int \partial M . \left(z' \frac{\partial\partial x'}{\partial t^2} - x' \frac{\partial\partial z'}{\partial t^2}\right)$$

$$0 = \psi' X' - \psi'' Y'' + \int \partial M . \left(y' \frac{\partial\partial x'}{\partial t^2} - x' \frac{\partial\partial y'}{\partial t^2}\right)$$

$$\psi'' - M . \frac{\partial\partial x}{\partial t^2} = 0$$

$$\psi' - M . \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} = 0$$

$$\psi - M . \frac{\partial\partial z}{\partial t^2} = 0$$

XXXIX.

Ces trois dernières équations peuvent ſe changer en d'autres plus commodes pour les uſages aſtronomiques; car on a, par l'*article XXXVII*, $x = r . \text{coſ.}\, \varphi$; $y = r . \text{ſin.}\, \varphi$, $z = rs$; d'où il eſt facile de conclure

$$\partial\partial x = \partial\partial r . \text{coſ.}\, \varphi - 2\partial r . \partial\varphi . \text{ſin.}\, \varphi - r\partial\partial\varphi . \text{ſin.}\, \varphi - r\partial\varphi^2 . \text{coſ.}\, \varphi$$
$$\partial\partial y = \partial\partial r . \text{ſin.}\, \varphi + 2\partial r . \partial\varphi . \text{coſ.}\, \varphi + r\partial\partial\varphi . \text{coſ.}\, \varphi - r\partial\varphi^2 . \text{ſin.}\, \varphi$$
$$\partial\partial z = r\partial\partial s + 2\partial s\partial r + s\partial\partial r$$

Or, ſi l'on ſuppoſe que la droite *Sa* ſoit infiniment près de *SG*, alors ψ'' ſera la force ſuivant *SG* & tendante de *S* vers *G*; ψ' ſera la force perpendiculaire à *SG*, & dirigée dans le ſens *aGb*, que je ſuppoſe être celui du mouvement de la Planète; de plus $\text{coſ.}\, \varphi = 1$, & $\text{ſin.}\, \varphi = 0$, d'où l'on aura

$$\partial\partial x = \partial\partial r - r\partial\varphi^2;$$
$$\partial\partial y = r\partial\partial\varphi + 2\partial r\partial\varphi,$$

partant,

$$\frac{\partial\partial r}{\partial t^2} - \frac{r\partial\varphi^2}{\partial t^2} - \frac{\psi''}{M} = 0, \ \& \ \frac{r\partial\partial\varphi}{\partial t^2} + \frac{2\partial r\partial\varphi}{\partial t^2} - \frac{\psi'}{M} = 0,$$

Si l'on multiplie cette dernière équation par r, & qu'enſuite on l'intègre, on aura

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{C + \int \frac{\psi' r\partial t}{M}}{r^2}; \ (1)$$

La première équation donnera

$$\frac{\partial\partial r}{\partial t^2} - \frac{(C + \int \frac{\psi' r\partial t}{M})^2}{r^3} - \frac{\psi''}{M} = 0; \ (2)$$

& puiſque l'on a,

$$\partial\partial z = r\partial\partial s + 2\partial s\partial r + s\partial\partial r = r\partial\partial s + 2\partial sr$$
$$+ \left[\frac{s\psi''}{M} + s . \frac{(C + \int \frac{\psi' r\partial t}{M})^2}{r^3}\right]\partial t^2$$

on aura

$$0 = \frac{\partial\partial s}{\partial t^2} + \frac{2\partial s \partial r}{r\partial t^2} + s \cdot \frac{\left[C + \int \frac{\psi' r \partial t}{M}\right]^2}{r^4} + \frac{S\psi'' - \psi}{Mr}, \quad (3)$$

Au moyen des équations (1), (2) & (3), on peut déterminer le mouvement du centre d'inertie du corps M; & l'on peut prendre pour ligne fixe d'où l'on commence à compter l'angle φ, toute droite fixe telle que Sa, faiſant un angle quelconque avec le rayon vecteur ; il faut ſeulement obſerver que ψ'' exprime la force qui agit dans le ſens SG, & de S vers G; ψ' exprime la force perpendiculaire à SG, & dirigée dans le même ſens que le mouvement du Corps, & que ψ repréſente la force perpendiculaire au plan bSa.

X L.

On peut ſimplifier d'une manière analogue, les équations qui ſervent à déterminer le mouvement de rotation du Corps autour du centre d'inertie. Pour cela, ſoit y'' la diſtance de la molécule dM au plan HiF; x'' la diſtance de ſa projection ſur le plan HiF, à la droite iC, & z'' la diſtance de cette molécule au plan AiB; on aura

$$z' = z''$$
$$y' = x'' \cdot \text{ſin. } \varepsilon + y'' \cdot \text{coſ. } \varepsilon$$
$$x' = x'' \cdot \text{coſ. } \varepsilon - y'' \cdot \text{ſin. } \varepsilon$$

Nommons enſuite y''' la diſtance de la molécule dM au plan HiF; x''' la diſtance de ſa projection ſur ce plan, à la droite iK; & z''' la diſtance de cette projection à l'axe iH; on aura

$$y'' = y'''$$
$$z'' = x''' \cdot \text{ſin. } \theta + z''' \cdot \text{coſ. } \theta$$
$$x'' = x''' \cdot \text{coſ. } \theta - z''' \cdot \text{ſin. } \theta$$

Nommons enfin y^{IV} la diſtance de la molécule dM au plan HiV; x^{IV} la diſtance de ſa projection ſur ce plan à la droite iV,

iV, & z^{iv}, la distance de cette projection à la droite iH; cela posé, on aura

$$x''' = x^{iv}$$
$$y''' = y^{iv} . \text{cos.}\ \varpi + z^{iv} . \text{sin.}\ \varpi$$
$$z''' = z^{iv} . \text{cos.}\ \varpi - y^{iv} . \text{sin.}\ \varpi$$

De-là, je conclus

$$x' = x^{iv} . \text{cos.}\ \varepsilon . \text{cos.}\ \theta + y^{iv} . [\text{sin.}\ \varpi . \text{sin.}\ \theta\ \text{cos.}\ \varepsilon - \text{sin.}\ \varepsilon\ \text{cos.}\ \varpi] - z^{iv} . [\text{sin.}\ \theta . \text{cos.}\ \varepsilon . \text{cos.}\ \varpi + \text{sin.}\ \varepsilon . \text{sin.}\ \varpi]$$

$$y' = x^{iv} . \text{cos.}\ \theta\ \text{sin.}\ \varepsilon + y^{iv} . [\text{sin.}\ \varpi . \text{sin.}\ \theta . \text{sin.}\ \varepsilon + \text{cos.}\ \varpi\ \text{cos.}\ \varepsilon] + z^{iv} . [\text{sin.}\ \varpi\ \text{cos.}\ \varepsilon - \text{cos.}\ \varpi . \text{sin.}\ \theta\ \text{sin.}\ \varepsilon]$$

$$z' = x^{iv} . \text{sin.}\ \theta + z^{iv} . \text{cos.}\ \theta . \text{cos.}\ \varpi - y^{iv} . \text{sin.}\ \varpi\ \text{cos.}\ \theta$$

Les valeurs de x^{iv}, y^{iv} & z^{iv} restent constantes pour la même molécule ∂M; ainsi, en différentiant pour avoir les valeurs de $\partial\partial x'$, $\partial\partial y'$ & $\partial\partial z'$; il ne faut faire varier que les quantités θ, ε & ϖ; d'où il sera facile de conclure les valeurs de

$$\int \partial M . z' \frac{\partial\partial y'}{\partial t^2},\ \int \partial M . y' \frac{\partial\partial z'}{\partial t^2},\ \&c.$$

mais la considération suivante simplifie considérablement le calcul.

On sait que dans tout Corps il existe trois axes perpendiculaires entre eux, & par rapport auxquels on a

$$\int x^{iv} . y^{iv} \partial M = 0,\ \int x^{iv} . z^{iv} \partial M = 0;\ \int y^{iv} . z^{iv} \partial M = 0.$$

Ces axes ont été nommés les trois axes principaux de rotation, parce qu'ils ont cette propriété, que si le Corps a un mouvement de rotation autour de l'un d'eux, ce mouvement sera invariable, abstraction faite de toutes forces étrangères. Je suppose donc que iH, iV & une droite menée par le centre i d'inertie, & perpendiculaire au plan HiV, soient ces trois axes; soit de plus $\int x^{iv^2} \partial . M = Maa$, M étant la masse entière du Corps,

$$\int y^{iv^2} . \partial M = M . bb.\ \&\ \int z^{iv^2} . \partial M = M . cc$$

Cela posé, on aura,

$$o = (\psi Y - \psi' Z')\,\partial t^2$$

$$+ M a a . \left\{ \sin.\theta . \partial\partial . (\cos.\theta . \sin.\varepsilon) - \cos.\theta . \sin.\varepsilon . \partial\partial . \sin.\theta \right.$$

$$+ M b b . \left\{ \begin{array}{l} (\sin.\theta . \sin.\varpi . \sin.\varepsilon + \cos.\varpi . \cos.\varepsilon) . \partial\partial (\sin.\varpi . \cos.\theta) \\ - \sin.\varpi . \cos.\theta . \partial\partial (\sin.\varpi . \sin.\theta . \sin.\varepsilon + \cos.\varpi . \cos.\varepsilon) \end{array} \right.$$

$$+ M c c . \left\{ \begin{array}{l} \cos.\varpi . \cos.\theta . \partial\partial (\sin.\varpi . \cos.\varepsilon - \cos.\varpi . \sin.\theta . \sin.\varepsilon) \\ - (\sin.\varpi . \cos.\varepsilon - \cos.\varpi . \sin.\theta . \sin.\varepsilon) \partial\partial . (\cos.\varpi . \cos.\theta) \end{array} \right.$$

$$o = (\psi X - \psi'' Z'')\,\partial t^2$$

$$+ M a a . \left\{ \sin.\theta . \partial\partial . (\cos.\varepsilon . \cos.\theta) - \cos.\varepsilon \cos.\theta . \partial\partial \sin.\theta \right.$$

$$(L) \quad + M b b . \left\{ \begin{array}{l} (\sin.\varpi . \sin.\theta . \cos.\varepsilon - \sin.\varepsilon . \cos.\varpi) . \partial\partial \sin.\varpi . \cos.\theta \\ - \sin.\varpi . \cos.\theta . \partial\partial (\sin.\varpi . \sin.\theta . \cos.\varepsilon - \sin.\varepsilon . \cos.\varpi) \end{array} \right.$$

$$+ M c c . \left\{ \begin{array}{l} (\cos.\varpi . \sin.\theta . \cos.\varepsilon + \sin.\varepsilon . \sin.\varpi) . \partial\partial . \cos.\varpi . \cos.\theta) \\ - \cos.\varpi . \cos.\theta . \partial\partial . (\cos.\varpi . \sin.\theta . \cos.\varepsilon + \sin.\varepsilon . \sin.\varpi) \end{array} \right.$$

$$o = (\psi' X' - \psi'' Z'')\,\partial t^2$$

$$+ M a a . \left\{ \cos.\theta . \sin.\varepsilon . \partial\partial . \cos.\varepsilon . \cos.\theta - \cos.\varepsilon . \cos.\theta . \partial\partial . \cos.\theta . \sin.\varepsilon \right.$$

$$+ M b b . \left\{ \begin{array}{l} (\sin.\varpi . \sin.\theta . \sin.\varepsilon + \cos.\varpi . \cos.\varepsilon .) \partial\partial (\sin.\varpi . \sin.\theta . \cos.\varepsilon . - \sin.\varepsilon . \cos.\varpi . \\ - (\sin.\varpi . \sin.\theta . \cos.\varepsilon - \sin.\varepsilon . \cos.\varpi) . \partial\partial (\sin.\varpi . \sin.\theta . \sin.\varepsilon + \cos.\varpi . \cos.\varepsilon) \end{array} \right.$$

$$+ M c c . \left\{ \begin{array}{l} (\sin.\theta . \cos.\varepsilon . \cos.\varpi + \sin.\varepsilon . \sin.\varpi) \partial\partial . (\sin.\varpi . \cos.\varepsilon - \cos.\varpi . \sin.\theta . \sin.\varepsilon) \\ - (\sin.\varpi . \cos.\varepsilon - \cos.\varpi . \sin.\theta . \sin.\varepsilon) . \partial\partial . (\sin.\theta . \cos.\varepsilon . \cos.\varpi + \sin.\varepsilon . \sin.\varpi) \end{array} \right.$$

On peut considérer dans ces équations, le centre d'inertie comme immobile, en sorte qu'en évaluant les momens des forces ψ, ψ' & ψ'', on peut retrancher de la force dont chaque particule est animée, celle qui lui est commune avec le centre d'inertie, parce que les momens de cette dernière force sont évidemment nuls.

On peut encore, dans les équations précédentes, supposer après les différentiations $\sin.\varepsilon = 0$; & $\cos.\varepsilon = 1$, ce qui les simplifie; mais alors il faut observer qne les forces ψ' & ψ'' doivent être parallèles, la première à la ligne iF, & la seconde à la perpendiculaire menée sur cette ligne dans le plan AiB, & dirigée de F vers B; le mouvement de rotation du corps étant supposé avoir lieu dans le sens ACB. On aura ainsi, en exécutant les différentiations indiquées dans les équations (L),

$$0 = \frac{\psi Y - \psi' Z'}{Maa} \cdot dt^2$$

$$+ \partial\partial\epsilon \cdot \sin.\theta \cdot \cos.\theta \cdot \left(1 - \frac{bb+cc}{2aa} + \frac{bb-cc}{2aa} \cdot \cos.2\varpi\right)$$

$$- 2\partial\epsilon\partial\theta \cdot \left[1 - \cos.\theta^2 \left(1 - \frac{bb+cc}{2aa} - \frac{bb-cc}{2aa} \cdot \cos.2\varpi\right)\right]$$

$$- 2\partial\epsilon\partial\varpi \cdot \sin.\theta \cdot \cos.\theta \cdot \left(\frac{bb-cc}{2aa} \cdot \sin.2\varpi\right)$$

$$+ \partial\epsilon^2 \cdot \cos.\theta \cdot \left(\frac{bb-cc}{2aa} \cdot \sin.2\varpi\right)$$

$$- \partial\partial\theta \cdot \sin.\theta \cdot \left(\frac{bb-cc}{2aa} \cdot \sin.2\varpi\right)$$

$$- 2\partial\varpi \cdot \partial\theta \cdot \sin.\theta \left(\frac{bb+cc}{2aa} + \frac{bb-cc}{2aa} \cdot \cos.2\varpi\right)$$

$$- \partial\theta^2 \cdot \cos.\theta \cdot \left(\frac{bb-cc}{2aa} \cdot \sin. \cdot 2\varpi\right)$$

$$+ 2\partial\partial\varpi \cdot \cos.\theta \cdot \left(\frac{bb+cc}{2aa}\right)$$

$$0 = \frac{\psi X - \psi'' Z''}{M.aa} dt^2 \qquad (L')$$

$$+ \partial\partial\epsilon \cdot \cos.\theta \cdot \left(\frac{bb-cc}{2aa} \cdot \sin.2\varpi\right)$$

$$- 2\partial\epsilon\partial\varpi \cdot \cos.\theta \cdot \left(\frac{bb+cc}{2aa} - \frac{bb-cc}{2aa} \cdot \cos.2\varpi\right)$$

$$- \partial\epsilon^2 \cdot \sin.\theta \cdot \cos.\theta \cdot \left(1 - \frac{bb+cc}{2aa} + \frac{bb-cc}{2aa} \cdot \cos.2\varpi\right)$$

$$- \partial\partial\theta \cdot \left(1 + \frac{bb+cc}{2aa} - \left(\frac{bb-cc}{2aa}\right) \cdot \cos.2\varpi\right)$$

$$- 2\partial\varpi\partial\theta \cdot \left(\frac{bb-cc}{2aa} \cdot \sin.2\varpi\right)$$

$$0 = \frac{\psi' X' - \psi'' Y''}{Maa} \cdot dt^2$$

$$- \partial\partial\epsilon \cdot \left[1 + \frac{bb+cc}{2aa} - \left(1 - \frac{bb+cc}{2aa}\right) \cdot \sin.\theta^2 + \frac{bb-cc}{2aa} \cdot \cos.\theta^2 \cdot \cos.2\varpi\right]$$

$$+ 2\partial\epsilon\partial\theta \cdot \sin.\theta \cdot \cos.\theta \cdot \left(1 - \frac{bb+cc}{2aa} + \frac{bb-cc}{2aa} \cdot \cos.2\varpi\right)$$

$$+ 2\partial\epsilon\partial\varpi \cdot \cos.\theta^2 \cdot \left(\frac{bb-cc}{2aa}\right) \cdot \sin.2\varpi$$

$$+ \partial\partial\theta \,.\, \text{cof.}\,\theta \,.\, \left(\frac{bb - cc}{2aa}\right) .\, \text{fin.}\, 2\varpi$$
$$+ 2\,\partial\varpi\partial\theta \,.\, \text{cof.}\,\theta \,.\, \left(\frac{bb + cc}{2aa} + \frac{bb - cc}{2aa} \,.\, \text{cof.}\, 2\varpi\right)$$
$$- \partial\theta^2 \,.\, \text{fin.}\,\theta \,.\, \left(\frac{bb - cc}{2aa}\right) .\, \text{fin.}\, 2\varpi$$
$$+ 2\,\partial\partial\varpi \,.\, \text{fin.}\,\theta \,.\, \left(\frac{bb + cc}{2aa}\right)$$

XLI.

Dans l'application des équations précédentes à l'Aſtronomie physique, elles deviennent fort ſimples; car les Corps céleſtes étant à très-peu-près ſphériques, on peut négliger les quantités proportionnelles au quarré de l'excentricité de ces Corps; or les termes $(\psi Y - \psi' Z')$, $(\psi X - \psi'' Z'')$ & $(\psi' X' - \psi'' Y'')$, ſont toujours de l'ordre de ces excentricités. D'ailleurs, l'état d'équilibre de toutes les parties d'une Planète, exige que le mouvement de rotation ſe faſſe au moins à très-peu-près autour d'un de ſes axes principaux, abſtraction faite de l'action de toute force étrangère: car, ſans cela, la Planète changeant à chaque inſtant d'axe & de viteſſe de rotation, changeroit continuellement de figure. $\partial\epsilon$ & $\partial\theta$ ſeroient donc nuls à très-peu-près, ſi les quantités $(\psi Y - \psi' Z')$, $(\psi X - \psi'' Z'')$ & $(\psi' X' - \psi'' Y'')$ s'évanouiſſoient; partant, ils ſont du même ordre que ces quantités; ainſi on peut négliger leurs quarrés, leurs produits deux-à-deux, & les termes qui, multipliés par $\partial\epsilon$ ou $\partial\theta$, le ſeroient encore par $(aa - bb)$, ou $(aa - cc)$, ou $(bb - cc)$.

Soit donc,

$$\frac{\psi Y - \psi' Z'}{{}^{2}M.aa} = R, \quad \frac{\psi X - \psi'' Z''}{{}^{2}M.aa} = R' \;\&\; \frac{\psi' X' - \psi'' X''}{{}^{2}M.aa} = R''$$

On aura donc,

$$o = R\,\partial t^2 - \partial\epsilon\partial\theta + \partial.(\partial\varpi \,.\, \text{cof.}\,\theta)$$
$$o = R'\,\partial t^2 - \partial\partial\theta - \partial\epsilon\,\partial\varpi \,.\, \text{cof.}\,\theta$$
$$o = R''\,\partial t^2 - \partial\partial\epsilon + \partial.(\partial\varpi \,.\, \text{fin.}\,\theta)$$

Ces équations sont sous une forme aussi simple que l'on puisse desirer, & en les joignant à celles-ci,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{C + \int \frac{\psi' r \partial t}{M}}{r^2}$$

$$0 = \frac{\partial\partial r}{\partial t^2} - \frac{(C + \int \frac{\psi' r \partial t}{M})^2}{r^3} - \frac{\psi''}{M}$$

$$0 = \frac{\partial\partial s}{\partial t^2} + \frac{2\partial s \partial r}{\partial t^2} + s\frac{(C + \int \frac{\psi' r \partial t}{M})^2}{r^4} + \frac{s\psi'' - \psi}{Mr}$$

qui regardent le mouvement du centre d'inertie, on aura toutes les équations néceſſaires pour déterminer les altérations du mouvement des Corps céleſtes, troublé par l'action des forces étrangères. Il y a cependant des recherches fort délicates, qui demandent beaucoup de préciſion, & dans leſquelles il eſt néceſſaire d'avoir égard, même aux quantités proportionnelles au quarré de l'excentricité de ces Corps. Telle eſt, par exemple, la recherche des inégalités ſéculaires du mouvement de rotation des Planètes. *(Voyez dans le Volume de l'Académie, pour l'année 1773, un Mémoire ſur cet objet).* Dans ce cas, il faut faire uſage des équations *(L')* de l'art. précédent.

XLII.

Examen du principe de la gravitation univerſelle.

Il n'exiſte point en Phyſique de vérité plus inconteſtable, & mieux démontrée par l'accord de l'obſervation & du calcul que celle-ci: *tous les Corps céleſtes gravitent les uns ſur les autres.* Newton, auteur de cette découverte la plus importante que l'on ait jamais faite dans la Philoſophie naturelle, trouva que les mouvemens obſervés des Planètes, ne peuvent ſubſiſter ſans une tendance vers le Soleil, proportionnelle à leur maſſe, & réciproque au quarré de leur diſtance à cet aſtre. Les mouvemens des Satellites lui donnèrent le même réſultat par rapport à leur Planète principale. Il ne balança

plus dès-lors à généraliſer cette idée, & il ſuppoſa que toutes les parties de la matière s'attirent en proportion de leur maſſe, & en raiſon réciproque du quarré de leurs diſtances. On ſait avec quel ſuccès ce grand Géomètre & ceux qui l'ont ſuivi, ont expliqué par ce moyen les phénomènes céleſtes; ainſi ſans entrer dans aucun détail à cet égard, je me bornerai à faire quelques réflexions ſur le principe même de la peſanteur univerſelle.

En l'appliquant au mouvement des Corps céleſtes, Newton eſt parti de ces quatre ſuppoſitions, adoptées généralement par les Géomètres.

1.° L'attraction eſt en raiſon directe de la maſſe & réciproquement comme le quarré de la diſtance.

2.° La force attractive d'un corps eſt le réſultat de l'attraction de chacune des parties qui le compoſent.

3.° Cette force ſe propage dans un inſtant, du Corps attirant à celui qu'il attire.

4.° Elle agit de la même manière ſur les corps en repos & en mouvement.

Je vais examiner ces quatre ſuppoſitions & voir juſqu'à quel point elles ſont conformes à ce que l'on obſerve.

XLIII.

De ce que les aires décrites par les rayons vecteurs des Planètes ſont proportionnelles au temps, il ſuit que ces Corps tendent vers le Soleil; l'ellipticité de leurs mouvemens démontre que cette tendance pour chacun d'eux eſt réciproque au quarré de leur diſtance à cet aſtre, & le rapport du cube des grands axes de leurs orbites au quarré des temps de leurs révolutions, prouve invinciblement que la force attractive du Soleil ne varie d'une Planète à l'autre, qu'à raiſon des diſtances. En vertu de la première de ces loix, tout corps peſe ſur le Soleil; par la ſeconde, un corps placé ſucceſſivement à différentes diſtances de cet aſtre, pèſe ſur lui en raiſon inverſe du carré de ſes différentes diſtances; & par la troiſième, les poids de pluſieurs Corps placés à des diſtances

quelconques du Soleil, ſont en raiſon de leurs maſſes, diviſées par le carré de leurs diſtances, en ſorte qu'à diſtances égales, ils ſont proportionnels aux maſſes. La même choſe s'obſerve ſur la Terre; car les expériences ont fait voir que dans le vide, tous les Corps ſe précipitent vers ſon centre, avec une égale vîteſſe, & que ſi deux Corps homogènes ou hétérogènes ſont égaux en maſſe, c'eſt-à-dire, ſi, venant à ſe rencontrer avec des vîteſſes égales & directement contraires, ils ſe font équilibre, leurs poids ſont égaux.

Préſentement, on doit regarder comme une loi de la Nature, démontrée par toutes les obſervations, que l'action eſt toujours égale à la réaction, & qu'ainſi le centre de gravité de deux Corps qui agiſſent l'un ſur l'autre, ne change point en vertu de cette action mutuelle; il ſuit de-là que le Soleil pèſe ſur chaque Planète; & comme leur gravité ſur cet aſtre eſt en raiſon de leur maſſe diviſée par le quarré de leur diſtance, leur action ſur lui eſt dans le même rapport.

Cette peſanteur réciproque du Soleil & des Planètes, a également lieu entre le Soleil, les Planètes & leurs Satellites; & les inégalités ſi multipliées du mouvement de la Lune, s'en déduiſent avec une telle préciſion, qu'il n'eſt plus permis de la révoquer en doute. Pluſieurs Philoſophes ont cru cependant que la loi de la peſanteur réciproque au quarré de la diſtance, pourroit n'être pas vraie à de petites diſtances; mais il me ſemble que leur aſſertion eſt deſtituée de fondement; car cette même loi qui a lieu pour les grandes diſtances des Planètes au *Soleil*, eſt encore vraie à la diſtance de la Lune, & même à celle du rayon de la Terre, puiſqu'il eſt prouvé que la peſanteur d'un Corps à la ſurface de la Terre, eſt à ſa peſanteur à la diſtance de la Lune, comme le quarré de cette diſtance eſt à celui du rayon de la Terre. Il nous eſt impoſſible de prononcer avec la même certitude, ſur de plus petites diſtances, mais l'analogie porte à croire que cette loi doit toujours avoir lieu; d'ailleurs ſa ſimplicité doit la faire préférer à toute autre, juſqu'à ce que les obſervations nous aient forcé de l'abandonner.

On a ſouvent demandé pourquoi la peſanteur diminue en raiſon du quarré de la diſtance. La cauſe de cette force étant inconnue, il eſt impoſſible d'en donner la raiſon Phyſique; mais s'il étoit permis de ſe livrer à la Métaphyſique dans une matière qu'il n'eſt pas poſſible de ſoumettre à l'expérience, ne ſeroit-il pas naturel de penſer que les loix de la Nature, ſont telles que le ſyſtème de l'Univers ſeroit toujours ſemblable à lui-même, en ſuppoſant que toutes ſes dimenſions viennent à augmenter ou à décroître proportionnellement? Sans chercher ici à appuyer ce principe par des raiſons que les Métaphyſiciens imagineront aiſément, mais auxquelles les Géomètres ſe rendroient difficilement, je me contenterai d'obſerver que toutes les loix connues du mouvement de la matière, y ſont très-conformes.

Maintenant, je ſuppoſe que les diſtances reſpectives du Soleil, de la Lune & de la Terre, leurs vîteſſes & leurs diamètres décroiſſent proportionnellement; il eſt viſible que la courbe décrite par la Lune, ne peut reſter ſemblable à elle-même, à moins que la force qui l'agite ne décroiſſe dans la même proportion. Soit donc T la maſſe de la Terre, h la diſtance de la Lune, & que toutes les dimenſions de l'Univers décroiſſent dans le rapport de 1 à $\frac{1}{m}$; $\frac{T}{m^3}$ exprimera la maſſe de la Terre dans cette ſuppoſition, & $\frac{h}{m}$ la diſtance de la Lune. Soit de plus $\frac{T}{\varphi(h)}$ l'action actuelle de la Terre ſur la Lune; $\frac{T}{m^3 . \varphi(\frac{h}{m})}$ exprimera ſa nouvelle action; mais la ſimilitude des courbes exige que l'on ait $\frac{T}{m^3 . \varphi(\frac{h}{m})} = \frac{T}{m . \varphi(h)}$; partant, on aura $m^2 . \varphi(\frac{h}{m}) = \varphi(h)$. Soit $\varphi(h) = h^2 . '\varphi(h)$. Donc on aura $'\varphi(\frac{h}{m}) = '\varphi(h)$. Cette équation devant avoir lieu quelle que ſoit m, il faut que

que $'\varphi(h)$ soit égal à une constante A; donc $\varphi(h) = A.h^2$; c'est-à-dire que la pesanteur diminue en raison du quarré de la distance. Je passe maintenant à l'examen de la seconde supposition.

XLIV.

Quelques illustres Géomètres, M. Daniel Bernoulli, entre autres *(Pièce sur le flux & le reflux de la mer)*, convaincus d'ailleurs de la pesanteur réciproque de tous les Corps célestes, ont regardé seulement comme une opinion probable, que cette pesanteur soit le résultat de l'attraction de chacune de leurs parties ; nous observons à la vérité sur la Terre, que les propriétés attractives des corps sont communes à leurs plus petites molécules; une forte analogie porte donc à croire que la pesanteur résulte pareillement de l'attraction de toutes les parties de la Terre ; mais le plus sûr moyen de vérifier cette hypothèse, est de la soumettre à l'analyse, & de comparer ensuite les résultats du calcul aux phénomènes. Les principaux qui en dépendent sont la figure des Astres, le flux & le reflux de la mer, la précession des Équinoxes, & la nutation de l'axe de la Terre. Un exposé très-succinct des recherches que l'on a faites sur ces différens objets, va montrer jusqu'à quel point elle est fondée.

Si la pesanteur étoit dirigée vers un centre unique, en nommant r le petit axe de Jupiter, la différence de ses axes seroit $\frac{1}{23,23} r$; suivant les observations les plus exactes, elle est environ $\frac{1}{13} r$; mais dans l'hypothèse de la gravitation réciproque de toutes les parties de la matière, & en supposant que Jupiter ait été primitivement fluide, cette différence doit être entre les deux limites $\frac{1}{9,05}.r$ & $\frac{1}{23,23}.r$; ce qui s'accorde fort bien avec l'observation. Ainsi, la figure de Jupiter donne un résultat très-satisfaisant pour l'hypothèse que nous discutons ici: il n'en est pas de même de la figure de la Terre.

Suivant Newton, & les Géomètres qui ont adopté sa théorie, la Terre est un sphéroïde elliptique, sur lequel l'accroissement de la pesanteur & des degrés de l'Équateur aux Pôles, est en raison du quarré du sinus de la latitude: le rapport du petit au grand axe de ce sphéroïde supposé homogène, & celui des pesanteurs d'un même corps placé successivement à l'Équateur & aux Pôles, est égal à . $\frac{229}{230}$; mais si la Terre est composée de couches inégalement denses, alors autant le rapport des axes surpasse cette fraction, autant celui des pesanteurs est moindre, & réciproquement.

En comparant ensemble les mesures des différens degrés, il paroît impossible de les plier à une même figure elliptique; il est également impossible d'y assujettir les longueurs observées du pendule qui bat les secondes; & il l'est encore plus de concilier les figures conclues par les mesures des degrés & par celles des longueurs du pendule.

On ne doit point, malgré cela, exclure l'hypothèse de la gravitation réciproque de toutes les parties de la matière; il est bien plus naturel de rejeter sur les données dont les Géomètres font usage, le peu d'accord de leurs calculs avec l'observation. Ils supposent en effet la Terre formée d'une infinité de couches d'une densité quelconque, & disposées régulièrement autour de son centre d'inertie; or, on voit combien cette hypothèse est précaire & peu conforme à ce que nous apercevons à la surface du globe, puisque les mers dont il est couvert en grande partie, sont d'une densité moindre que la Terre. Ils font d'ailleurs abstraction de l'action des montagnes, de l'élévation des continens au-dessus du niveau de la mer, &c. toutes choses auxquelles il paroît nécessaire d'avoir égard lorsqu'il est question de déterminer une aussi petite quantité que la différence des axes de la Terre. La réunion de ces différentes causes peut altérer sensiblement, non-seulement la figure de la Terre, mais encore le résultat des observations; & si l'on considère les erreurs inévitables qu'elles comportent, on pourra conclure que la figure

déterminée par ces observations, diffère peut-être autant de la véritable, que celle trouvée par la théorie.

La remarque suivante peut servir encore à justifier le principe de la pesanteur universelle, au moins jusqu'à ce que l'analyse nous ait entièrement éclairés sur cet objet. La plupart des Géomètres ont supposé dans leurs calculs une figure elliptique à la Terre : ils ont fait voir à la vérité, la possibilité d'une telle figure ; mais pour être en droit de rejeter la loi de l'attraction, il faudroit, ou démontrer que cette figure est unique, ou épuiser successivement toutes les figures que peut donner la Théorie, & prouver qu'aucune d'elles ne peut satisfaire à l'observation. Or, c'est ce qui n'a point été fait encore. M. d'Alembert à qui nous devons cette remarque intéressante, a fait voir, à la vérité, dans le *Tome V de ses Opuscules*, que si la Terre est homogène, & un solide de révolution, elle doit être nécessairement elliptique. Il a de plus donné dans la seconde partie de ses Recherches sur le système du Monde, une très-belle méthode pour déterminer la figure de la Terre, quelles que soient les différentes densités de ses couches, dans des suppositions beaucoup plus générales que celle d'une figure elliptique; mais, ni cet illustre Géomètre, ni personne, que je sache, n'a déterminé celle de toutes ces figures qui s'accorde le mieux avec les observations. Le point où la Théorie paroît s'en éloigner le plus, est l'aplatissement de la Terre, conclu par la mesure des Degrés, & par celle des longueurs du Pendule qui bat les secondes. Il est en effet remarquable que ces longueurs semblent donner un aplatissement moindre que $\frac{1}{230}$, tandis que la mesure des Degrés le donne plus grand. Si donc on pouvoit trouver pour la Terre une figure qui conciliât ces deux choses, & qui de plus satisfît à peu-près à la mesure des Degrés au Nord, en France, & à l'Équateur, on ne devroit point balancer à l'admettre.

Il ne paroît pas que la figure de la Terre influe sensiblement sur le mouvement de la Lune; la différence des

axes de la Terre eſt trop petite par rapport à la diſtance de cet aſtre pour que ſon effet puiſſe être aperçu ; mais l'aplatiſſement de Jupiter étant beaucoup plus grand que celui de la Terre, ſi les mouvemens de ſes Satellites & les inégalités qu'ils éprouvent en vertu de leur gravitation les uns ſur les autres & ſur le Soleil, étoient aſſez bien connus, on pourroit en conclure l'effet de la figure de Jupiter, & juger s'il eſt conforme à la théorie ; mais les obſervations ne ſont pas encore aſſez préciſes & aſſez multipliées pour établir rien de certain ſur cette matière. Pour ce qui regarde le flux & le reflux de la mer, on ſent aiſément que ce phénomène ne peut rien nous apprendre de bien précis ſur la nature de la peſanteur, à cauſe de l'impoſſibilité de le ſoumettre à une analyſe rigoureuſe, & de la multitude des circonſtances étrangères qui doivent troubler les réſultats du calcul.

On voit par l'examen des phénomènes précédens, l'incertitude qu'ils laiſſent encore ſur le principe de la gravitation réciproque de toutes les parties de la matière; mais il en eſt un qui me paroît ne devoir laiſſer aucun doute ſur la vérité de ce principe; c'eſt celui de la préceſſion des équinoxes & de la nutation de l'axe de la Terre; car il réſulte des ſavantes recherches de M. d'Alembert ſur cet objet, que ce phénomène eſt uniquement dû à la peſanteur de toutes les parties de la Terre ſur le Soleil & la Lune, en ſuppoſant que chaque particule de la Terre gravite ſur chacun de ces aſtres en raiſon réciproque du quarré de ſa diſtance ; or le centre de gravité de deux corps reſtant immobile en vertu de leur action mutuelle, la Lune pèſe à ſon tour ſur chaque partie de la Terre, & c'eſt du réſultat de toutes ces tendances partielles, que ſe forme la force centrale qui la retient dans ſon orbite : il ſuit de-là que la force attractive de la Terre & généralement des Corps céleſtes, appartient à chacune de leurs parties, & par conſéquent que non-ſeulement ces grands Corps, mais les plus petites molécules de la matière s'attirent en raiſon de leur maſſe, & réciproquement comme

le quarré de leur distance : cette attraction générale a paru se manifester dans l'expérience délicate de M. Bouguer sur l'action de la montagne de Chimboraço; mais c'est à l'illustre Géomètre, qui, le premier a résolu par une analyse aussi savante que rigoureuse, le Problème de la précession des Équinoxes, que nous devons une preuve incontestable de l'existence de cette gravitation réciproque de toutes les parties de la matière: voyons présentement si cette force se propage dans un instant du corps attirant à celui qu'il attire.

XLV.

Il n'est pas vraisemblable que la vertu attractive, ou, plus généralement qu'aucune des forces qui s'exercent *ad distans*, se communique dans un instant d'un corps à l'autre; car tout ce qui se transmet à travers l'espace, nous paroît devoir répondre successivement à ses différens points; mais l'ignorance où nous sommes sur la nature des forces, & la manière dont elles sont transmises, doit nous rendre très-retenus dans nos jugemens, jusqu'à ce que l'expérience vienne nous éclairer. J'observerai cependant que dans le cas même où elle sembleroit donner une communication instantanée, on ne devroit pas se presser de conclure qu'elle a véritablement lieu dans la Nature, car il y a infiniment loin d'une durée de propagation insensible, à une durée absolument nulle. Or il peut arriver que cette durée ne soit qu'insensible, parce que les expériences sont faites sur des Corps placés à de trop petites distances, ou pour d'autres raisons quelconques. Il eût été, par exemple, impossible de connoître la vîtesse de la lumière par des expériences faites sur la Terre; mais en prenant pour terme de comparaison les distances des Planètes au Soleil, cette vîtesse devient sensible, & c'est de cette manière qu'on est parvenu à la déterminer. Quoiqu'on puisse se servir des mêmes distances pour mesurer la durée de la propagation de la pesanteur, cette force pourroit cependant employer plusieurs minutes, & même quelques heures à se communiquer du Soleil à la Terre, sans qu'il fût possible d'observer cette

durée. Imaginons en effet deux masses, dont l'une infiniment moindre que l'autre, se meuve autour d'elle, la plus grande étant supposée en repos; il est visible que dans les premiers momens, la plus petite masse ira en ligne droite jusqu'à ce que la force attractive de l'autre masse ait commencé à l'atteindre; mais à ce moment, son mouvement sera le même que si la force attractive se propageoit dans un instant. Ceci auroit encore lieu si le système de ces deux Corps étoit emporté d'un mouvement commun & uniforme dans l'espace. Or, les Planètes & leurs Satellites étant à peu-près dans le cas de l'hypothèse précédente, on voit que la gravitation pourroit employer un temps beaucoup plus considérable que la lumière à se propager du Soleil à la Terre, sans qu'il puisse être observé. M. Daniel Bernoulli paroît soupçonner cette propagation successive dans son excellente Pièce sur le flux & le reflux de la mer. Suivant cet illustre Géomètre, l'action de la Lune peut employer un ou deux jours à parvenir à la Terre. Une propagation aussi lente n'est pas vraisemblable: elle produiroit des inégalités sensibles dans le mouvement de la Lune, & paroît d'ailleurs contraire à l'activité avec laquelle la pesanteur s'exerce sur les Corps, comme on va le voir dans les articles suivans.

XLVI.

Il nous reste enfin à discuter si la Pesanteur agit de la même manière sur les corps en repos & en mouvement; il est visible qu'un corps en repos étant abandonné à la pesanteur, éprouvera toute son action, & tombera suivant la verticale, sur la surface de la Terre; mais s'il se meut déjà vers la Terre dans la direction de cette verticale, il est naturel de penser que sa vîtesse doit le soustraire en partie à l'effort de la pesanteur. Ce sentiment très-vraisemblable en lui-même, seroit incontestable si la cause de cette force venoit de l'impulsion d'un fluide quelconque; mais comme elle est entièrement inconnue, je vais soumettre à l'analyse les mouvemens des Corps célestes d'après la supposition de la gravitation

agiſſant différemment ſur les corps ſuivant leurs différens mouvemens ; je comparerai enſuite le calcul à l'obſervation ; car s'il exiſtoit quelque phénomène inexplicable juſqu'ici dans les ſuppoſitions ordinaires & qui dérivât néceſſairement de celle-ci, on ne pourroit s'empêcher alors de la regarder comme indiquée par la Nature, & conſéquemment de l'admettre.

Je conſidererai la peſanteur d'une molécule de matière comme produite par l'impulſion d'un corpuſcule infiniment plus petit qu'elle, & mû vers le centre de la Terre avec une vîteſſe quelconque. La ſuppoſition ordinaire ſuivant laquelle la peſanteur agit de la même manière ſur les Corps en repos & en mouvement, revient à faire cette vîteſſe infinie ; je la ſuppoſerai indéfinie, & je chercherai à la déterminer par l'obſervation.

XLVII.

J'imagine un Corps infiniment petit p dans l'eſpace, *(figure 2)* décrivant autour de S, conſidéré comme immobile, une orbite quelconque ſur le plan fixe pSM; je fais $Sp = r$, & l'angle $pSM = \varphi$. Je nomme de plus ; $\frac{\psi'}{p}$, la force perpendiculaire à Sp, & agiſſant dans le même ſens que le mouvement de la Planète; & $\frac{\psi''}{p}$, la force agiſſante dans la direction du rayon vecteur Sp, & de S vers p; cela poſé: on aura par l'*article XXXIX*,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{c + \int \frac{\psi'}{p} . r\,dt}{r^2} \quad (1)$$

$$0 = \frac{\partial\partial r}{\partial t^2} - \frac{[c + \int \frac{\psi'}{p} r\,dt]^2}{r^3} - \frac{\psi''}{p} \quad (2)$$

Il s'agit préſentement de déterminer ψ' & ψ''; pour cela, ſoit N le corpuſcule que je ſuppoſe faire graviter p vers S;

si p étoit en repos, N lui communiqueroit vers S la force $\frac{S}{r^2}$. Je représente par pG l'espace que décriroit ce corpuscule durant le temps que p décriroit la droite pQ, tangente à son orbite avec la vîtesse qu'il a en p. Si l'on fait, $pq = pQ$, on peut considérer N comme animé des trois vîtesses pQ, pq & pG: il n'agit sur p qu'en vertu des deux dernières; en sorte que, par l'action de ce corpuscule, p est animé d'une force $\frac{S}{r^2}$, dirigée de p vers S, & d'une force $\frac{S}{r^2} \cdot \frac{pQ}{pG}$, dirigée de p vers q; soit maintenant $\frac{\theta}{\alpha}$ l'espace que décriroit le corpuscule N dans le temps T, avec la vîtesse qu'il a en N; T & α étant constans, α étant un coëfficient numérique extrêmement petit, & θ étant variable suivant une fonction quelconque de la distance de p à S; on a $\frac{pQ}{pG} = \alpha T \cdot \frac{\sqrt{(dr^2 + r^2 d\varphi^2)}}{\theta \cdot dt}$, dt étant l'élément du temps que je regarde comme constant; la force $\frac{S}{r^2} \cdot \frac{pQ}{pG}$ est conséquemment égale à $\frac{S}{r^2} \cdot \alpha T \frac{\sqrt{(dr^2 + r^2 d\varphi^2)}}{\theta \cdot dt}$.

Or si on la décompose en deux, l'une oq, perpendiculaire à pS, & l'autre suivant po, on aura pour la première $\frac{S}{r^2} \cdot \frac{T \cdot \alpha r \partial\varphi}{\theta \partial t}$, & pour la seconde $- \frac{\alpha STdr}{\theta r^2 \partial t}$. De-là on conclura facilement, $\frac{\psi''}{p} = - \frac{S}{r^2} - \frac{\alpha ST \partial r}{\theta r^2 \partial t}$

$$\frac{\psi'}{p} = - \frac{\alpha ST \partial\varphi}{\theta r \cdot \partial t};$$

partant on aura

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{c - \int \frac{\alpha ST \partial\varphi}{\theta}}{r^2} \cdot (3)$$

$$0 = \frac{\partial\partial r}{\partial t^2} - \frac{(c - \int \frac{\alpha ST \partial\varphi}{\theta})^2}{r^3} + \frac{S}{r^2} + \frac{\alpha ST \partial r}{\theta r^2 \partial t} \cdot (4)$$

Puisque

Puisque l'orbite des Planètes est presque circulaire, je fais $r = a(1 + \alpha y)$, & $\phi = nt + \alpha x$; ainsi en négligeant les quantités de l'ordre α^2, je puis supposer t, constant, ce qui donne $\int \frac{\alpha S T \partial \phi}{\theta} = \frac{\alpha S T . nt}{\theta}$, en faisant commencer l'intégrale avec t; ensuite l'équation (4) donne

$$0 = \frac{\partial \partial y}{\partial t^2} + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{S}{a^3} - \frac{c^2}{a^4} \right) + \left(\frac{3 c^2}{a^4} - \frac{2 S}{a^3} \right) y + \frac{2 S}{a^3} . \frac{c T}{a . \theta} . nt.$$

Il est clair que $\frac{S}{a^3} - \frac{c^2}{a^4}$ doit être de l'ordre α, & comme a est arbitraire, je supposerai $\frac{S}{a^3} = \frac{c^2}{a^4}$, ce qui donne

$$0 = \frac{\partial \partial y}{\partial t^2} + \frac{c^2}{a^4} . y + \frac{2 c^3}{a^6} . \frac{a}{\theta} . T . nt,$$

d'où je tire en intégrant,

$$y = K . \text{cof.} \left(\frac{c}{a^2} . t + \epsilon \right) - \frac{2 c}{a^2} . \frac{a}{\theta} . T . nt,$$

K, & ϵ étant arbitraires. Pour les déterminer, je supposerai que la droite SM, sur laquelle je place le corps p au premier instant du mouvement, soit le lieu de l'aphélie de l'orbite elliptique que p auroit décrite, si l'on eut eu $\frac{a}{\theta} = 0$; donc, si l'on nomme αe, le rapport de l'excentricité primitive à la distance moyenne, on aura $K = e$ & $\epsilon = 0$; partant,

$$r = a \left[1 + \alpha e . \text{cof.} \frac{c}{a^2} . t - \frac{2 c}{a^2} . \frac{\alpha a}{\theta} T . nt \right]$$

Présentement, l'équation (3) donne en négligeant les quantités de l'ordre α^2,

$$n + \alpha \frac{dx}{dt} = \frac{c}{a^2} - \frac{2 c}{a^2} . \alpha y - \frac{\alpha S a . T . nt}{a^3 \theta}$$

Soit $n = \frac{c}{a^2}$, partant, $nn = \frac{c^2}{a^4} = \frac{S}{a^3}$.

donc, $\frac{dx}{dt} = - 2 ny - \frac{a n^2 T}{\theta} . nt$.

En substituant au lieu de y, sa valeur, & intégrant, on aura

$$x = - 2 e \text{ fin. } nt + \tfrac{3}{2} . nT . \frac{a}{\theta} . nntt.$$

donc

$$r = a\left[1 + \alpha e \,.\, \text{cof.}\, nt - \frac{2a}{\theta} \,.\, \alpha n T \,.\, nt\right]$$

$$\varphi = nt - 2\alpha e \,.\, \text{fin.}\, nt + \tfrac{3}{2}\alpha \,.\, \frac{a}{\theta} \,.\, nT \,.\, nntt;$$

d'où il réfulte que le mouvement moyen de p, eft affujetti à une équation féculaire proportionnelle au quarré du temps.

Les calculs précédens auroient encore lieu, fi les deux Corps p & S, étoient emportés d'un mouvement commun dans l'efpace.

Dans la fuppofition ordinaire, $\frac{\alpha a}{\theta}$ eft infiniment petit, & l'équation féculaire difparoît ; partant, fi cette quantité $\alpha \,.\, \frac{a}{\theta}$, n'eft pas nulle, c'eft fur-tout dans l'altération du mouvement moyen des Planètes & des Satellites que fon effet doit être fenfible. Voyons donc ce que les Obfervations nous apprennent fur cet objet.

XLVIII.

En comparant les Éclipfes des fiècles paffés avec celles de ce fiècle, les Aftronomes ont remarqué que les Tables de la Lune ne peuvent y fatisfaire en fuppofant à cet Aftre un mouvement moyen conftant; ils ont conféquemment admis une accélération dans ce mouvement. M. Mayer, qui paroît être un de ceux qui fe font le plus occupés de cet objet, a déterminé la quantité de cette accélération; il l'a trouvée d'un degré en deux mille ans, & fenfiblement proportionnelle au quarré des temps comptés depuis une époque donnée qu'il fixe en 1700; à la vérité les preuves fur lefquelles l'accélération du moyen mouvement de la Lune eft fondée, viennent d'être favamment difcutées par M. de la Grange, dans l'excellente Pièce qui a remporté le Prix de l'Académie pour l'année 1773; & il paroît réfulter de fon travail qu'elle eft encore incertaine; mais fans entrer ici dans l'examen de ces preuves, j'obferverai cependant qu'elle

eſt aſſez vraiſemblable. Or ſi l'on conſidère les différens termes qui peuvent entrer dans l'équation de l'orbite lunaire, il eſt très-difficile d'expliquer cette équation ſéculaire dans la ſuppoſition ordinaire de $\frac{\alpha T}{\theta}$, infiniment petit; car il réſulte des ſavantes recherches que M. d'Alembert a données dans ſes Opuſcules, que cela eſt impoſſible, en n'ayant égard qu'à l'action du Soleil, de la Terre & de la Lune ſuppoſées ſphériques, & M. de la Grange a fait voir dans la pièce que je viens de citer, que la figure non-ſphérique de la Lune & de la Terre, & l'action des Planètes ne peuvent le produire; on peut donc conjecturer, avec quelque vraiſemblance, que $\frac{\alpha T}{\theta}$ n'eſt pas exactement nul, & dans ce cas en déterminer la valeur de cette manière.

Soit S la Terre, p la Lune, i le nombre des révolutions de la Lune dans le temps t; l le nombre de ſes révolutions dans le temps T; l'équation ſéculaire de la Lune ſera $\frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha a}{\theta} \cdot l \cdot \left(\frac{360^d}{57^d\ 17'\ 44''}\right)^2 \cdot i\,i \cdot 360^d$. Or le rapport du mouvement moyen de la Terre à celui de la Lune égale environ $\frac{27^j\ 7^h\ 43'}{365^j\ 6^h\ 9'} = \frac{39343}{525969}$. Donc, pour l'intervalle de 2000 ans, on a $i = 2000 \cdot \frac{525969}{39343}$. Ainſi en ſuppoſant $l = 1$, l'accélération du mouvement de la Lune ſera pour cet eſpace de temps

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha a}{\theta} \cdot \left(\frac{360^d}{57^d\ 17'\ 44''}\right)^2 \cdot (2000)^2 \cdot \left(\frac{525969}{39343}\right)^2 \cdot 360^d;$$

$\frac{\theta}{\alpha}$ étant l'eſpace que parcourroit durant une révolution de la Lune, le corpuſcule que je ſuppoſe la faire graviter ſur la Terre.

Préſentement, ſi l'on admet avec M. Mayer, qu'en partant de l'année 1700, l'accélération du mouvement moyen de

la Lune ſoit d'un degré en deux mille ans, on aura pour déterminer $\frac{\theta}{\alpha}$ l'équation ſuivante,

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha\alpha}{\theta} \cdot \left(\frac{360^d}{57^d\ 17'\ 44''}\right)^2 \cdot (2000)^2 \cdot \left(\frac{525969}{39343}\right)^2 \cdot 360 = 1,$$

mais pour comparer la vîteſſe $\frac{\theta}{\alpha T}$ avec la plus grande qui nous ſoit connue, ſavoir celle de la lumière; je nomme a' la diſtance moyenne de la Terre au Soleil, & je ſuppoſe conformément aux dernières Obſervations, la parallaxe moyenne de cet aſtre de $8''\frac{1}{2}$, celle de la Lune étant de $57'\ 3''$; on aura $a = a'\ \frac{8''\frac{1}{2}}{57'\ 3''} = a'\ \frac{17}{6846}$.

Soit de plus h, l'eſpace que parcourroit dans une minute le corpuſcule que je ſuppoſe faire graviter la Lune, on aura

$$h = \frac{a' \cdot \left[51 \cdot \left(\frac{360^\circ}{57^\circ\ 17'\ 44''}\right)^2 \cdot (2000)^2 \cdot \left(\frac{525969}{39343}\right)^2 \cdot 180\right]}{39343 \cdot 6846}$$

Partant, h égale environ 960 mille fois la diſtance du Soleil à la Terre, & comme la lumière emploie huit minutes à peu-près à venir du Soleil à nous; il ſuit que la vîteſſe du corpuſcule N eſt 7 millions 680 mille fois plus grande que celle de la lumière, en ſorte qu'il faudroit que la Lune ſe précipitât ſur la Terre avec cette vîteſſe, pour ne point éprouver, au premier inſtant de ſa chute, l'action de la peſanteur.

XLIX.

Si l'équation ſéculaire de la Lune dépend de la valeur de $\frac{\alpha T}{\theta}$, cette quantité doit pareillement produire une équation ſéculaire dans le moyen mouvement des Planètes. Pour la déterminer, j'obſerve que $\frac{\alpha T}{\theta}$ peut varier ſuivant la grandeur de la maſſe attirante S, & ſuivant la diſtance du corps attiré p; il n'eſt cependant pas à préſumer que la

maſſe plus ou moins conſidérable de S change cette quantité, parce que chaque molécule agiſſante comme ſi elle étoit iſolée, en augmentant la maſſe, on ne fait qu'augmenter la ſomme des actions des molécules de matière, ce qui ne peut altérer la vîteſſe $\frac{\theta}{\alpha T}$.

Quant à la manière dont $\frac{\theta}{\alpha T}$ dépend de la diſtance Sp, la ſuppoſition la plus naturelle eſt de faire θ conſtant, ou, ce qui revient au même, la vîteſſe $\frac{\theta}{\alpha T}$, conſtante aux différentes diſtances de S; je m'arrêterai conſéquemment à cette ſuppoſition, faute d'obſervations pour déterminer la véritable. Cela poſé.

Si l'on déſigne par i', l', a', pour le Soleil & la Terre, des quantités analogues à celles que j'ai repréſentées ci-deſſus par i, l, a, pour la Terre & la Lune, on trouvera l'équation ſéculaire de la Terre, égale à

$$\frac{3}{2}\ \alpha . \frac{a'}{\theta}\ . l' . \left[\frac{360}{57^d\, 17'\, 44''}\right]^2 i' i' . 360^d;$$

d'où il ſuit que dans le même intervalle de temps, les équations ſéculaires de la Terre & de la Lune, ſont entr'elles comme $a' l' i'^2 : a l i^2$, ou (parce que $l' : l :: i' : i$) comme $a' i'^3 : a i^3$. or, $a' : a :: 57'\ 3'' : 8''\frac{1}{2}$, & $i' : i :: 39343 : 525969$; donc, l'équation ſéculaire de la Terre eſt à celle de la Lune comme 1 : 5,934, ou comme 1 : 6 environ, & par conſéquent de 10′ à peu-près en deux mille ans.

J'obſerverai ici que cette accélération du mouvement moyen de la Terre, donne pour la Lune une équation ſéculaire un peu différente de celle que M. Mayer a conclue des obſervations, & dont j'ai fait uſage. Cet illuſtre Aſtronome l'a déterminée par la comparaiſon des Éclipſes anciennes & modernes, en ſuppoſant le mouvement moyen du Soleil conſtant; mais puiſqu'il eſt actuellement plus rapide qu'autrefois, il eſt clair qu'en portant du mouvement moyen actuel; M. Mayer a ſuppoſé le Soleil, & par conſéquent la Lune, trop peu avancés au moment des Éclipſes anciennes: il faut

donc ajouter à l'équation séculaire de la Lune, trouvée par cet Aſtronome, celle du Soleil, pour avoir la véritable quantité de cette équation. Soit x cette quantité; l'équation séculaire de la Terre eſt $\frac{1}{6}x$; mais l'équation conclue par M. Mayer $= x - \frac{1}{6}x = 1^d$; donc, $x = 1^d\ 12'$; la véritable équation séculaire de la Lune eſt donc de $1^d\ 12'$, & celle du Soleil, de 12 minutes en deux mille ans. Cette conſidération diminue un peu la vîteſſe du corpuſcule N, & la rend 6 millions 400 mille fois plus grande que celle de la lumière.

Pour avoir les équations ſéculaires des autres Planètes, je conſidère deux de ces Planètes, p & p', dont les diſtances moyennes au Soleil ſoient a & a', & pour leſquelles i & i', expriment le nombre des révolutions faites dans le même temps, t; leurs équations ſéculaires ſeront entr'elles comme $a i^3 : a' i'^3$; mais on a, $i^2 : i'^2 :: a'^3 : a^3$; d'où il réſulte que

ces équations ſéculaires ſont entr'elles comme $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} : \frac{1}{a'^{\frac{1}{2}}}$;

c'eſt-à-dire, réciproquement, comme les racines quarrées des ſeptièmes puiſſances des grands axes de leurs orbites.

D'après ce Théorème, je trouve pour Vénus une équation ſéculaire d'environ 38 minutes en 2000 ans, & pour Mercure, une équation d'environ 5 degrés $\frac{1}{2}$ pour le même intervalle de temps.

Si l'on compare maintenant ces réſultats à l'obſervation, on verra que nous manquons d'obſervations aſſez anciennes & aſſez exactes pour ſavoir ſi Vénus & Mercure ont une équation ſéculaire ſenſible.

Il eſt fort incertain ſi le moyen mouvement de la Terre s'accélère, ou reſte ſenſiblement le même; ce dernier ſentiment paroît le plus vraiſemblable, mais l'incertitude où l'on eſt à cet égard prouve au moins que l'équation ſéculaire de la Terre eſt très-petite, ce qui s'accorde fort bien avec la théorie précédente, ſuivant laquelle cette équation n'eſt qu'un ſixième de celle de la Lune.

Quant aux Planètes ſupérieures, il eſt probable que les mouvemens moyens de Jupiter & de Saturne ont ſouffert

une variation sensible; mais elle dépend d'une autre cause que de la valeur de $\frac{\alpha T}{\theta}$, qui ne peut en produire qu'une absolument insensible.

L.

Je n'ai eu égard dans les calculs précédens qu'à l'équation séculaire des moyens mouvemens, comme la plus considérable de toutes les inégalités dépendantes de $\frac{\alpha T}{\theta}$; j'ai de plus supposé les orbites presque circulaires, ce qui n'est pas vrai pour les Comètes. Voici présentement une méthode pour déterminer ces variations, quelle que soit l'excentricité des orbites.

Je reprends les équations

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{c - \int \frac{\alpha ST\partial\varphi}{\theta}}{r^2} \quad (3),$$

$$0 = \frac{\partial\partial r}{\partial t^2} - \frac{r\partial\varphi^2}{\partial t^2} + \frac{S}{r^2} + \frac{\alpha ST\partial r}{\theta r^2 \partial t} \quad (4);$$

puique θ est supposé constant, on aura $\int \frac{\alpha ST\partial\varphi}{\theta} = \frac{\alpha ST\varphi}{\theta}$. Soit $\frac{\alpha ST}{\theta} = \mathcal{C}$, l'équation (3) devient ainsi, $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{c - \mathcal{C}\varphi}{r^2}$; l'équation (4) donne celle-ci,

$$0 = \partial\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right) - r\frac{\partial\varphi^2}{\partial t} + \frac{S\partial t}{r^2} + \mathcal{C}\frac{\partial r}{r^2};$$

équation dans laquelle je puis faire varier dt; or, si l'on y substitue au lieu de dt sa valeur $\frac{r^2\partial\varphi}{c - \mathcal{C}\varphi}$, & que l'on fasse $\frac{1}{r} = z$, on aura en supposant $\partial\varphi$ constant,

$$\frac{\partial\partial z}{\partial\varphi} + z\partial\varphi = \frac{S\partial\varphi}{(c - \mathcal{C}\varphi)^2},$$

ce qui donne en intégrant

$$z = \text{fin.}\,\varphi \cdot \int \frac{S\partial\varphi \cdot \text{cof.}\,\varphi}{(c - \mathcal{C}\varphi)^2} - \text{cof.}\,\varphi \cdot \int \frac{S\partial\varphi \cdot \text{fin.}\,\varphi}{(c - \mathcal{C}\varphi)^2}.$$

Comme il paroît très-difficile d'intégrer rigoureuſement ces quantités, je les réduis en ſéries; or on a

$$\int \varphi^n . \partial\varphi . \text{cof.}\, \varphi = \varphi^n . \text{fin.}\, \varphi + n . \varphi^{n-1} . \text{cof.}\, \varphi - n . (n-1) . \varphi^{n-2} . \text{fin.}\, \varphi - n . (n-1) . (n-3) . \varphi^{n-3} \text{cof.}\, \varphi + \&c.$$

$$\& \int . \varphi^n \partial \varphi \text{fin.}\, \varphi = - \varphi^n . \text{cof.}\, \varphi + n \varphi^{n-1} \text{fin.}\, \varphi + n . (n-1) . \varphi^{n-2} \text{cof.}\, \varphi - \&c.$$

partant,

$$\text{fin.}\, \varphi . \int \varphi^n \partial\varphi \text{cof.}\, \varphi - \text{cof.}\, \varphi \int \varphi^n \partial \varphi . \text{fin.}\, \varphi = \varphi^n - n . (n-1) . \varphi^{n-2} + n . (n-1) . (n-2) . (n-3) . \varphi^{n-4} - \&c.$$

d'où il eſt facile de conclure

$$z = K . \text{cof.}\, \varphi + \epsilon + \frac{S}{c^2} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{2\mathcal{C}}{c} . \varphi + \frac{3\mathcal{C}^2}{c^2} (\varphi^2 - 1 . 2) \\ + \frac{4\mathcal{C}^3}{c^3} (\varphi^3 - 1 . 2 . 3 . \varphi) + \&c. \end{array} \right\}$$

Maintenant puiſque l'on a,

$$\partial t = \frac{r^2 \partial \varphi}{c - \mathcal{C}\varphi}, \;\&\; r = \frac{1}{z} = \frac{1}{K \text{cof.}\, (\varphi + \epsilon) + \frac{S}{c^2} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{2\mathcal{C}}{c} \varphi \\ + \&c. \end{array} \right\}}$$

on aura t en φ; partant φ en t, par le retour des ſuites; d'où il ſera aiſé de conclure r en t.

Si l'on nomme a le demi-grand axe d'une ellipſe, ae ſon excentricité, ϵ la diſtance de la Planète qui circule dans cette ellipſe, au périhélie, lorſque $\varphi = 0$, on aura $r = \frac{a(1 - ee)}{1 + e \text{cof.}\, (\varphi + \epsilon)}$; partant ſi l'on conſidère l'orbite de la Planète p, comme une ellipſe dont le demi-grand axe & l'excentricité varient, on aura $\frac{1}{a(1 - ee)} = \frac{S}{c^2} (1 + \frac{2\mathcal{C}}{c} \varphi + \&c.)$, & $\frac{e}{a(1 - ee)} = K$. Je n'aurai égard ici qu'aux quantités de l'ordre $\mathcal{C}$; & je déſignerai par δa & δe les variations extrêmement petites de a & de e; cela poſé, lorſque $\varphi = 0$, on a, $\frac{S}{c^2} = \frac{1}{a(1 - ee)}$, & lorſque φ a une valeur quelconque, on a, $\frac{S}{c^2} (1 + \frac{2\mathcal{C}}{c} \varphi) = \frac{1}{(a + \delta a)[1 - (e + \delta e)^2]}$; donc,

donc, $-\frac{\delta a}{a^2(1-ee)}+\frac{2e\delta e}{a(1-ee)^2}=\frac{S}{c^2}\cdot\frac{2\zeta}{c}\cdot\varphi$, partant $-\frac{\delta a}{a}+\frac{2e\delta e}{1-ee}=\frac{2\zeta}{c}\cdot\varphi$; de plus l'équation $K=\frac{eS}{c^2}\cdot(1+\frac{2\zeta}{c}\cdot\varphi)$, donne $\frac{\delta e}{e}=-\frac{2\zeta}{c}\cdot\varphi$; donc $\frac{\delta a}{a}=\frac{\delta e(1+ee)}{e(1-ee)}$. De ces équations, on tirera les valeurs de δa & δe; j'obſerverai ici que les lieux de l'aphélie & du périhélie ſont immobiles; je ſuppoſe maintenant que l'on veuille déterminer de quelle quantité la valeur de $\frac{\alpha T}{\theta}$, accélère le paſſage d'une Comète par le périhélie, je reprends pour cela les équations $dt=\frac{r^2\partial\varphi}{c-\zeta\varphi}$, & $r=\frac{1}{\frac{S}{c^2}(1+\frac{2\zeta}{c}\varphi)+K\,\text{cof.}(\varphi+\epsilon)}$; elles donnent

$$c\partial t=\frac{\partial\varphi}{(1-\frac{\zeta}{c}\varphi)\,[\frac{S}{c^2}\cdot(1+\frac{2\zeta}{c}\varphi)+K.\,\text{cof.}(\varphi+\epsilon)]^2}$$

partant

$$c\partial t=\frac{\partial\varphi}{[\frac{S}{c^2}+K.\text{cof.}(\varphi+\epsilon)]^2}+\frac{\frac{\zeta}{c}\varphi\partial\varphi}{[\frac{S}{c^2}+K.\text{cof.}(\varphi+\epsilon)]^2}-\frac{4.\frac{S}{c^2}\cdot\frac{\zeta}{c}.\varphi\partial\varphi}{[\frac{S}{c^2}+K.\text{cof.}(\varphi+\epsilon)]^3}.$$

Soit

$$\frac{1}{[\frac{S}{c^2}+K.\text{cof.}(\varphi+\epsilon)]^2}=A+B.\text{cof.}(\varphi+\epsilon)+C.\text{cof.}\,2(\varphi+\epsilon)+\&c.$$

&

$$\frac{1}{[\frac{S}{c^2}+K.\text{cof.}(\varphi+\epsilon)]^3}=A'+B'.\text{cof.}(\varphi+\epsilon)+C'.\text{cof.}\,2(\varphi+\epsilon)+\&c.$$

$$\begin{aligned}\text{Donc, } ct = {} & A.\varphi+B.\text{fin.}(\varphi+\epsilon)+\&c.\\ & +\frac{\zeta}{2c}.A.\varphi^2+\frac{\zeta}{c}.B.\varphi.\text{fin.}(\varphi+\epsilon)+\&c.\\ & -\frac{2\zeta}{c}.A'.\frac{S}{c^2}.\varphi^2-\&c.\end{aligned}$$

Soit $\epsilon = 0$, le paſſage au périhélie aura lieu lorſque $\varphi = 0$, $\varphi = 360^d$, $\varphi = 2 \cdot 360^d$, &c. nommant donc $'T$ le temps d'une révolution, & $'T'$ le temps de la révolution ſuivante, l'une & l'autre à compter du paſſage par le périhélie, on aura

$$\frac{'T - 'T'}{'T} = 3 \cdot \frac{6}{\epsilon} \cdot \left[\frac{360^d}{57^d\, 17'\, 44''}\right] \cdot \left[\frac{2A'}{A} \cdot \frac{S}{c^2} - \frac{1}{2}\right].$$

Il ne s'agit plus maintenant que de connoître A, A', & $\frac{6}{c}$; or, puiſque l'on a, $\frac{S}{c^2} = \frac{1}{a(1-ee)}$, & $K = \frac{e}{a(1-ee)}$, on aura *(voyez le Calcul intégral de M. Euler)*, $A = a^2 \sqrt{(1-ee)}$, & $A' = a^3 \sqrt{(1-ee)} \cdot (1 + \frac{1}{2} ee)$. Soit $'T = m$ minutes, & $'T' = m'$ minutes; on a, $\frac{6}{c} = \frac{aST}{c \cdot \theta}$, je fais $T = T$; donc, $c \cdot 'T = 2\pi a a \sqrt{(1-ee)}$, π exprimant le rapport de la demi-circonférence au rayon; partant,

$$\frac{6}{c} = \frac{2\pi a}{\frac{\theta}{a} \cdot \sqrt{(1-ee)}},$$ $\frac{\theta}{a}$ étant l'eſpace que décriroit le corpuſcule N durant le temps T; or dans une minute, cet eſpace eſt par l'*article 48*, & en ayant égard à la remarque de l'*article 49*, $= 800000\, a'$; a' exprimant le demi-grand axe de l'orbite terreſtre; donc $\frac{6}{c} = \frac{2\pi a}{\sqrt{(1-ee)} \cdot 800000\, m a'}$;

partant, $m - m' = \frac{1}{44444} \cdot \frac{a}{a'} \cdot \left(\frac{355}{113}\right)^2 \cdot \left[\frac{1+ee}{(1-ee)^{\frac{1}{2}}}\right]$.

d'où l'on voit que $m - m'$ eſt abſolument inſenſible.

L I.

Il réſulte des articles précédens, que l'hypothèſe de la Peſanteur agiſſant différemment ſur les corps en repos & en mouvement, donne un moyen fort ſimple d'expliquer l'équation ſéculaire de la Lune; cependant, quelque naturelle qu'elle puiſſe être, je ſuis bien éloigné de la regarder comme certaine, & je ne la propoſe que comme une conjecture

qui m'a paru mériter l'attention des Philosophes: elle ne seroit pas douteuse s'il étoit bien démontré, 1.° que l'équation séculaire de la Lune existe; 2.° qu'elle ne peut s'expliquer dans les suppositions ordinaires, ou par des causes étrangères à la Pesanteur; or l'une & l'autre de ces assertions & particulièrement la seconde, est sujette encore à bien des difficultés. Il est à la vérité vraisemblable, par la comparaison des observations anciennes & modernes, que le moyen mouvement de la Lune est maintenant plus rapide qu'autrefois; c'est ce qui m'a paru même résulter des calculs de M. de la Grange, dans la Pièce citée précédemment, en les examinant avec attention. *(Voy. l'addit. qui est à la fin ce Mém.)* Cette accélération d'ailleurs, si elle existe, ne paroît pas explicable par le seul principe de la gravitation universelle, dans les suppositions reçues, comme je l'ai déjà remarqué.

Si donc on admet cette équation séculaire, il faut pour l'expliquer, ou faire varier un peu, comme je l'ai fait précédemment, les suppositions d'après lesquelles on a calculé jusqu'ici le mouvement des corps célestes, ou recourir à des causes étrangères au principe de la gravitation universelle. Pour voir jusqu'à quel point le premier de ces deux moyens est préférable au second, j'imagine qu'au lieu de déterminer les mouvemens célestes dans certaines suppositions sur l'action de la Pesanteur, on eût cherché à déterminer ces suppositions par les mouvemens observés; il est visible qu'en admettant une accélération dans le moyen mouvement de la Lune, on auroit trouvé la Pesanteur agissant différemment sur les corps, suivant leurs différens mouvemens; or je demande si l'on ne s'en fût pas tenu à ce résultat, qui paroît d'ailleurs bien plus naturel que la supposition ordinaire? On doit convenir cependant qu'en admettant dans l'espace un fluide extrêmement rare, on explique d'une manière très-satisfaisante l'équation séculaire de la Lune *(voyez la Pièce de M. l'abbé Bossut, qui a remporté le Prix de l'Académie pour l'année 1762)*. Mais l'existence d'un pareil fluide est fort incertaine, à moins que l'on ne prenne pour ce fluide la lumière du Soleil. Or,

il ne paroît pas qu'elle résiste assez, pour retarder sensiblement le mouvement de la Lune ; car, selon toutes les apparences, cette lumière est une émanation de la substance même du Soleil ; cela se prouve par les phénomènes de la réflexion & de la réfraction de la lumière, qui s'accordent très-bien avec cette hypothèse, en admettant de plus que les atomes lumineux sont attirés par les corps, suivant une fonction de la distance. Cela paroît encore indiqué par l'aberration des fixes ; car ce phénomène prouve que la vîtesse du corpuscule de lumière qui vient frapper l'organe de la vision, est à celle de la Terre, en raison constante, quel que soit l'astre qui envoye la lumière ; or, cela ne peut arriver dans l'hypothèse d'un fluide élastique, mis en vibration par les corps lumineux ; en effet, si l'on applique à ce cas les formules que M.rs de la Grange & Euler ont données pour le son, on trouve qu'à une très-grande distance de l'astre, la vîtesse de ce fluide diminueroit en raison de cette distance, en le supposant également élastique & dense dans toute son étendue ; cette vîtesse ne seroit donc pas constante pour les différentes étoiles, ni la même que celle de la lumière qui nous est réfléchie par les Satellites de Jupiter, ce qui est contraire à l'observation. On pourroit, à la vérité, imaginer que les vîtesses communiquées au fluide par les différentes étoiles, sont telles qu'elles deviennent toutes égales, près de la Terre ; on pourroit supposer encore telles loix d'élasticité & de densité qui produiroient cette égalité ; mais ces suppositions sont trop invraisemblables pour les admettre.

Présentement, si l'on regarde la lumière comme une émanation de la substance du Soleil, elle ne peut produire par son impulsion l'équation séculaire de la Lune ; c'est ce que les Géomètres trouveront aisément par le procédé suivant qui m'a conduit à ce résultat. J'omets ici les calculs à cause de leur longueur, & parce qu'ils sont faciles par la méthode exposée dans les articles précédens.

En admettant avec M. Mayer, une équation séculaire pour la Lune, d'un degré en deux mille ans, & supposant

la parallaxe du Soleil de $8''\frac{1}{2}$, je détermine d'abord la perte de la maſſe du Soleil dans cet intervalle de temps; enſuite, pour vérifier ſi cette perte eſt réelle, j'obſerve qu'il doit en réſulter un retardement dans le moyen mouvement de la Terre, parce que la maſſe du Soleil diminuant ſans ceſſe, l'orbite de la Terre doit ſe dilater de plus en plus : or, je trouve que pour admettre dans le mouvement moyen de la Lune une accélération d'un degré en deux mille ans, il faudroit admettre une retardation de pluſieurs degrés dans celui de la Terre, ce qui eſt abſolument contraire aux obſervations; d'où je conclus que l'impulſion de la lumière ſolaire ne peut produire l'équation ſéculaire de la Lune. Mais cette lumière agit d'une manière plus ſenſible ſur la Terre, en dilatant l'atmoſphère; c'eſt ce qui produit, au moins en partie, ces vents généraux d'Eſt qu'on obſerve ſous la zone torride. Or, il paroît que la rotation de la Terre doit être ſenſiblement retardée par l'action de ces vents; ce qui expliqueroit d'une manière fort ſimple l'équation ſéculaire de la Lune. En effet, ſi l'on ſuppoſe les jours plus longs qu'autrefois, le mouvement de la Lune doit, par cette raiſon, paroître plus rapide. Il eſt vrai qu'alors les mouvemens moyens du Soleil & des Planètes ſeroient pareillement aſſujettis à une équation ſéculaire; mais le mouvement du Soleil n'étant qu'un treizième environ de celui de la Lune, ſon équation ſéculaire ſeroit en même raiſon plus petite, & par conſéquent inſenſible. Dans cette ſuppoſition, l'accélération du moyen mouvement de la Lune n'eſt qu'apparente, & ce mouvement eſt conſtant en lui-même; mais j'ai trouvé, par une méthode fort ſimple, que je me propoſe d'expoſer ailleurs, que la rotation de la Terre ne peut être ſenſiblement retardée par l'action des vents, en admettant qu'ils aient pour cauſe la dilatation de l'atmoſphère produite par la chaleur du Soleil. J'ai de plus examiné dans un *Mémoire ſur les inégalités du mouvement de rotation de la Terre*, ſi l'action du Soleil & de la Lune peut y produire une équation ſéculaire ſenſible, en ayant égard aux différentes inégalités du mouvement de ces

deux Aftres, & fuppofant pour plus de généralité, une inégalité quelconque entre les momens d'inertie de la Terre par rapport à fes trois axes principaux. Cette difcuffion m'a paru néceffaire avant que de prononcer fur l'impoffibilité d'expliquer l'équation féculaire de la Lune dans les fuppofitions ordinaires fur la gravitation univerfelle; or, puifqu'il réfulte de cette recherche, que l'action du Soleil, de la Lune & des vents ne peut retarder le moyen mouvement de rotation de la Terre, il fuit que l'accélération du moyen mouvement de la Lune eft réelle: il y a donc bien de l'apparence, fi elle exifte, qu'elle dépend de la caufe que je lui ai affignée ci-deffus.

Quoi qu'il en foit, les calculs précédens ont du moins l'avantage de nous faire connoître l'étonnante activité de la pefanteur, puifqu'il faudroit fuppofer à la Lune une vîteffe vers la Terre, plufieurs millions de fois plus grande que celle de la lumière, pour la fouftraire à fon action; & il paroît bien certain que cette activité ne peut être moindre; car elle feroit infinie, fi l'équation féculaire de la Lune étoit nulle, ou dûe à d'autres caufes. Cette activité prodigieufe me perfuade que la force attractive doit employer un temps beaucoup moindre que la lumière à fe propager d'un corps à l'autre; & que celle de la Lune, loin d'être deux jours à parvenir à la Terre, comme M. Daniel Bernoulli l'a foupçonné, y parvient en moins d'un cent millième de feconde.

Après avoir difcuté les différentes fuppofitions dont les Géomètres ont fait ufage dans l'application du principe de la Pefanteur univerfelle, je vais rentrer dans ces mêmes fuppofitions, & déterminer les inégalités féculaires des Planètes.

L I I.

Sur les inégalités féculaires des Planètes.

En confidérant les maffes des Planètes comme étant extrêmement petites par rapport à celle du Soleil, leur action feroit infenfible dans l'intervalle d'un petit nombre de révolutions,

& chacune d'elles décriroit à chaque révolution, une orbite elliptique autour du Soleil. Après un temps conſidérable, l'action réciproque des Planètes pourroit devenir ſenſible ; mais comme après ce temps, elles décriroient encore à très-peu près une ellipſe à chaque révolution, cette action ne pourroit ſe manifeſter que par les changemens qu'elle occaſionneroit à la longue dans les élémens des orbites, c'eſt-à-dire, dans la poſition des nœuds & de la ligne des apſides, dans l'excentricité, l'inclinaiſon, & ſur-tout dans les moyens mouvemens. Ces inégalités ſont par conſéquent les plus conſidérables de toutes, & celles dont il importe le plus de fixer la valeur par la Théorie.

Parmi ces inégalités, la plus eſſentielle à conſidérer, eſt celle des moyens mouvemens; elle ne paroît pas cependant avoir été déterminée avec toute la préciſion qu'exige ſon importance. M. Euler, dans ſa ſeconde Pièce ſur les Irrégularités de Jupiter & de Saturne, la trouve égale pour l'une & l'autre de ces Planètes. Suivant M. de la Grange au contraire, dans *le troiſième Volume des Mémoires de Turin*, elle eſt fort différente pour ces deux Corps. Ayant recherché la raiſon d'une diſparité auſſi frappante entre les réſultats de ces deux illuſtres Géomètres, il m'a paru qu'ils n'avoient point fait entrer en conſidération pluſieurs termes auſſi ſenſibles que ceux auxquels ils ont eu égard. M. de la Grange ſemble à la vérité avoir porté plus loin la préciſion que M. Euler : j'ai lieu de croire cependant que ſa formule n'eſt pas encore exacte. Celle à laquelle je parviens, eſt fort différente.* Ce peu d'accord m'avoit fait ſoupçonner que je pouvois m'être trompé; mais ayant recommencé pluſieurs fois mes calculs, je ſuis parvenu aux mêmes réſultats ; je m'y ſuis conformé d'ailleurs, en examinant avec attention la ſolution de M. de la Grange; car cet illuſtre Géomètre néglige dans

* Depuis que j'ai lû ces Recherches à l'Académie, j'ai trouvé qu'elle étoit identiquement nulle *(voy. l'art. 59)*. J'aurois pu le démontrer d'abord, mais j'ai préféré de donner mes idées ſuivant l'ordre dans lequel elles ſe ſont préſentées à mon eſprit.

les équations différentielles, les ſinus & les coſinus de très-petits angles, à cauſe de l'extrême petiteſſe de leurs coëfficiens; mais ces coëfficiens deviennent fort grands par l'intégration, & produiſent dans les moyens mouvemens, une équation ſéculaire comparable à celle à laquelle il parvient. J'obſerverai ici que la grandeur de ces coëfficiens dans la théorie des Planètes, peut rendre fautive la ſuppoſition que leur mouvement vrai eſt égal à leur mouvement moyen, plus à une très-petite quantité. Or, comme toutes les ſolutions connues du Problème des trois Corps, ſont fondées ſur cette ſuppoſition, il me paroît que les formules du mouvement vrai des Planètes que l'on en tire, ne doivent être employées que pour un temps limité après lequel il eſt à craindre qu'elles ne deviennent inexactes.

Indépendamment de tout calcul, on peut s'aſſurer par la conſidération ſuivante, que la formule de M. de la Grange eſt incomplette. Car, ſi le plan fixe auquel il rapporte le mouvement des deux Planètes, au lieu d'être l'écliptique, étoit tout autre plan, cette formule donneroit une équation ſéculaire totalement différente; & ſi ce plan paſſoit par l'interſection des orbites de Jupiter & de Saturne, cette même équation qui auparavant dépendoit de l'inclinaiſon reſpective des orbites ceſſeroit d'en dépendre. Il paroît cependant que le mouvement moyen d'une Planète, & l'équation ſéculaire de ce mouvement, doivent être les mêmes, quel que ſoit le plan ſur lequel on les rapporte. Au reſte, ce que je viens de dire ne touche point au mérite de la ſolution de M. de la Grange; je lui rends, avec plaiſir la juſtice de la regarder comme une des choſes les plus délicates que l'on ait tirées de l'analyſe.

L'Académie propoſa pour ſujet du Prix de l'année 1760, de déterminer l'altération du mouvement moyen de la Terre, produite par l'action des corps céleſtes. La pièce de M. Charles Euler qui fut couronnée, quelqu'eſtimable qu'elle ſoit d'ailleurs, n'a rien ajouté, ce me ſemble, à ce que l'on ſavoit déjà ſur l'effet de l'attraction des Planètes. Après avoir diſcuté l'action de la Comète de 1759, ſur la Terre, pour altérer

altérer ſon mouvement moyen, il ſe contente d'obſerver que l'action des Planètes doit y produire une inégalité proportionnelle au quarré du temps, ſans ſe mettre en peine d'en fixer la véritable valeur.

On voit par ce détail l'incertitude qui règne encore ſur l'équation ſéculaire du mouvement moyen des Planètes, & combien il eſt néceſſaire de la déterminer avec préciſion.

Voici maintenant pour y parvenir une méthode fort ſimple; mais comme cette recherche eſt néceſſairement liée avec celle des inégalités ſéculaires, tant de l'excentricité & de l'inclinaiſon, que de la poſition des nœuds & des apſides, je vais les embraſſer dans mon calcul.

Je dois obſerver ici que quoique les formules auxquelles je parviens, renferment des termes proportionnels au temps & au quarré du temps, je ne prétends pas cependant que ces termes ſe rencontrent dans l'expreſſion rigoureuſe du mouvement des Planètes; il peut arriver en effet qu'ils ſoient produits par le développement des ſinus & coſinus de très-petits angles, en ſéries; mon objet ici n'eſt point d'entrer dans cette diſcuſſion, très-intéreſſante du côté de l'analyſe, mais qui devient inutile pour tout le temps durant lequel l'Aſtronomie a été cultivée. On peut conſulter ſur cette matière, un fort beau Mémoire de M. de Condorcet, qui a pour titre, *Réflexions ſur les méthodes d'approximation.* * *Mém. de l'Ac. année 1771, page 281.*

LIII.

Je reprends les équations (1), (2) & (3) de l'article XXXIX.

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{c + \int \cdot \frac{\psi' r \partial t}{M}}{r^2} \quad (1.)$$

$$o = \frac{\partial\partial r}{\partial t^2} - \frac{\left(c + \int \cdot \frac{\psi' r \partial t}{M}\right)^2}{r^3} - \frac{\psi''}{M} \quad (2.)$$

$$o = \frac{\partial\partial s}{\partial t^2} + \frac{2 \partial s \partial r}{r \partial t^2} + s \frac{\left(c + \int \cdot \frac{\psi' r \partial t}{M}\right)^2}{r^4} + \frac{s\psi'' - \psi}{M r} \,.\, (3)$$

J'imagine enſuite une autre Planète p', & je déſigne pour cette Planète par φ', r' & s', ce que j'ai nommé φ, r & s pour p; ſoient de plus p & p' les maſſes des deux Planètes p, p', & v leur diſtance mutuelle; ſoit encore S la maſſe du Soleil. Cela poſé, on trouvera

$$-\frac{\psi''}{M} = \frac{S+p}{r^2(1+ss)^{\frac{1}{2}}} + p' \cdot \frac{\text{coſ.}\,(\varphi'-\varphi)}{r'^2(1+s's')^{\frac{1}{2}}} + \frac{p'}{v^3} \cdot [r - r' \cdot \text{coſ.}(\varphi'-\varphi)]$$

$$-\frac{\psi' r}{M} = p' r \cdot \text{ſin.}\,(\varphi'-\varphi)\left(\frac{1}{r'^2(1+s's')^{\frac{1}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right)$$

$$-\frac{\psi}{M} = \frac{(S+p)s}{r^2(1+ss)^{\frac{1}{2}}} + \frac{p's'}{r'^2(1+s's')^{\frac{1}{2}}} + \frac{p'}{v^3}(rs - r's');$$

partant, on aura

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{c - \int \cdot p' r \partial t \cdot \text{ſin.}\,(\varphi'-\varphi) \cdot \left(\frac{1}{r'^2(1+s's')^{\frac{1}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right)}{r^2} \quad (A)$$

$$0 = \frac{\partial\partial r}{\partial t^2} - \frac{\left[c - \int \cdot p' r \partial t \cdot \text{ſin.}(\varphi'-\varphi) \cdot \left(\frac{1}{r'^2(1+s's')^{\frac{1}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right)\right]^2}{r^3} + \frac{S+p}{r^2(1+ss)^{\frac{1}{2}}} \quad (B)$$

$$+ \frac{p'r}{v^3} + p' \cdot \text{coſ.}\,(\varphi'-\varphi)\left(\frac{1}{r'^2(1+s's')^{\frac{1}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right)$$

$$0 = \frac{\partial\partial s}{\partial t^2} \cdot + \frac{2\partial s \partial r}{r\partial t^2} + s\frac{\left[c - \int \cdot p' r \partial t \cdot \text{ſin.}(\varphi'-\varphi) \cdot \left(\frac{1}{r'^2(1+s's')^{\frac{1}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right)\right]^2}{r^4} \quad (C)$$

$$+ \frac{p'}{r}[s' - s \cdot \text{coſ.}\,(\varphi'-\varphi)] \cdot \left[\frac{1}{r'^2(1+s's')^{\frac{1}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right]$$

Je ſuppoſerai les maſſes des Planètes infiniment petites par rapport à celle du Soleil ; je ferai ainſi $p = \delta m$, & $p' = \delta m'$, la caractériſtique δ déſignant une différence infiniment petite. Je prendrai enſuite pour plan de projection, le plan de l'orbite primitive de p; ce qui rend s infiniment petit, & permet de négliger ſon quarré, Cela poſé,

J'obſerve d'abord que les orbites des Planètes ſont fort peu inclinées les unes aux autres, & qu'elles ont fort peu d'excentricité; ainſi, en ſuppoſant α une quantité très-petite,

je supposerai l'excentricité & l'inclinaison, de l'ordre α; je me contenterai de pousser la précision jusques aux quantités de l'ordre $\alpha^2 \delta m'$ inclusivement.

Si l'on intègre présentement les deux équations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{c}{r^2}; \quad (4)$$

$$0 = \frac{\partial\partial r}{\partial t^2} - \frac{c^2}{r^3} + \frac{S + \delta m}{r^2}; \quad (5)$$

elles donneront, comme l'on sait

$$\varphi = nt + A' - 2\alpha e.\text{sin.}(nt + \varepsilon) + \frac{5}{4}\alpha^2 e^2.\text{sin.}\,2(nt + \varepsilon) + \&c.$$

&

$$r = a[1 + \frac{\alpha^2 e^2}{2} + \alpha e.\text{cos.}(nt + \varepsilon) - \frac{\alpha^2 e^2}{2}.\text{cos.}\,2(nt + \varepsilon) + \&c.]$$

Ces équations sont à une ellipse dont a est le demi-grand axe, & $\alpha e a$, l'excentricité; A' exprime la distance moyenne de la Planète à une ligne fixe, lorsque $t = 0$, & ε, la quantité dont elle est plus avancée que son aphélie à cet instant: ces valeurs de r & de φ sont exactes lorsque $\delta m' = 0$; mais lorsqu'il n'est pas nul, il faut différentier les équations (4) & (5), par rapport à δ, & leur ajouter les termes affectés de $\delta m'$, dans les équations *(A)* & *(B)*; on aura ainsi

$$\frac{\partial\delta\varphi}{\partial t} = -\frac{2c}{r^3}.\delta r - \frac{\delta m'}{r^2}\int.r\partial t.\text{sin.}(\varphi' - \varphi).[\frac{r}{r'^2(1 + s's')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}]; \quad (6)$$

&

$$0 = \frac{\partial\partial.\delta r}{\partial t^2} + \frac{3c^2}{r^4}\delta r - \frac{2(S + \delta m)}{r^3}\delta r + \frac{2c.\delta m'}{r^3}\int.r\partial t.\text{sin.}(\varphi' - \varphi).[\frac{1}{r'^2(1 + s's')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}]$$
$$+ \frac{\delta m.r}{v^3} + \delta m'.\text{cos.}(\varphi' - \varphi).[\frac{1}{r'^2(1 + s's')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}]; \quad (7)$$

Si l'on substituoit dans ces équations, au lieu de φ, r, φ', r', s', $\delta\varphi$, δr, leurs véritables valeurs, tous les termes homologues se détruiroient réciproquement, c'est-à-dire que l'on auroit séparément égaux à zéro, 1.° les termes constans; 2.° les termes proportionnels au temps; 3.° ceux qui sont proportionnels au quarré du temps, &c. 4.° les coëfficiens

des ſinus & des coſinus des différens angles; ce qui produiroit une ſuite infinie d'équations; mais, pour l'objet que l'on ſe propoſe ici, il ſuffit d'avoir égard dans l'équation (6), aux termes conſtans, & à ceux qui croiſſent comme le temps: dans l'équation (7), il faut de plus avoir égard aux coëfficiens de $\text{cof.}\,(nt + \varepsilon)$, & de $\text{ſin.}\,(nt + \varepsilon)$. Or, en ayant égard à ces termes ſeuls, on aura

$$\frac{2c\delta m'}{r^3}.\int.rdt.\text{ſin.}(\varphi' - \varphi).\left(\frac{1}{r'^2(1+s's')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right) + \frac{\delta m's}{v^3}$$

$$+ \delta m'.\text{cof.}(\varphi' - \varphi).\left(\frac{1}{r'^2(1+s's')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right) =$$

$$= a.\frac{\delta m'}{a^3}.A + \alpha^2 a.\frac{\delta m'}{a^3}.Bnt + \alpha a.\frac{\delta m'}{a^3}.$$

$$C.\text{cof.}(nt + \varepsilon) + \alpha a.\frac{\delta m'}{a^3}.D.\text{ſin.}(nt + \varepsilon)$$

Parmi les termes conſtans, on peut négliger ceux de l'ordre $\alpha^2\delta m'$; on aura ainſi, en n'ayant égard qu'aux termes conſtans & proportionnels au temps

$$-\frac{\delta m'}{r^2}.\int.r\partial t.\text{ſin.}(\varphi' - \varphi).\left(\frac{1}{r'^2(1+s's')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right) = -\frac{\alpha^2\delta m'}{a^3}.\frac{a^2}{2c}Bnt.$$

Or, on a $\frac{S + \delta m}{a^3} = nn$, & aux quantités près de l'ordre α^2, $\frac{c}{a^2} = n$.

Soit donc $\frac{\delta m'}{a^3} = nn.\delta\mu'$; $\delta\mu'$, exprimera le rapport de la maſſe de la Planète p', à celle du Soleil, & l'on aura

$$\frac{\partial.\delta\varphi}{\partial t} = -\frac{2c}{r^3}.\delta r - \frac{\alpha^2\delta\mu'}{2}.B.nnt;\ (8).$$

$$0 = \frac{\partial\partial.\delta r}{\partial t^2} + \frac{3c^2}{r^4}.\delta r - \frac{2(S + \delta m)}{r^3}.\delta r + a.\delta\mu'.$$

$$nnA + \alpha a\delta\mu'.nnC.\text{cof.}(nt + \varepsilon)$$

$$+ \alpha a\delta\mu'.nnD.\text{ſin.}(nt + \varepsilon) + \alpha^2 aB.\delta\mu'.n^3t;\ (9).$$

Je ſuppoſe $\delta\varphi = \delta\mu'.gnt + \alpha^2\delta\mu'.hnntt$; &

$$\delta r = a\delta\mu'.[l + \alpha^2 pnt.\text{cof.}(nt + \varepsilon) + \alpha qnt.\text{ſin.}(nt + \varepsilon) + \alpha^2 Knt];$$

en substituant ces valeurs de $\delta\varphi$, & δr, dans les équations (8) & (9), on trouvera, en comparant les termes homologues $g = 2A$, $l = -A$, $p = \frac{1}{2}D$, $q = -3eA - \frac{1}{2}C$, $K = \frac{3}{2}eD - B$, $h = \frac{3}{4}(B - eD)$. De-là on tirera facilement

$$\varphi = nt + A' + 2A\delta\mu'.nt + \alpha^2\delta\mu'.\tfrac{3}{4}(B - eD).nntt;$$

$$\& \; r = a\left\{\begin{array}{l} 1 + \alpha(e + \frac{1}{2}\delta\mu'.Dnt)\,\text{cos.}\,[nt(1 + 3A\delta\mu' + \frac{1}{2e}.C\delta\mu') + \varepsilon] \\ + \;\&\text{c.}\end{array}\right.$$

On voit par-là que si l'on nomme i, le nombre des révolutions de p, depuis une époque donnée, l'accroissement de l'équation du centre sera $\alpha D.\delta\mu'.i.360^d$.

Le mouvement de l'Apogée, suivant l'ordre des signes, sera, $-\delta\mu'.i.360^d[A + \frac{C}{2e}]$. Enfin l'accélération du mouvement moyen sera, $\frac{3}{2}\alpha^2\delta\mu'.(\frac{355}{113})(B - eD)ii.360^d$. Il ne s'agit donc plus que de déterminer A, B, C & D, avec toute l'exactitude possible. Or, si l'on nomme a' le demi-grand axe de l'orbite de p'; $\alpha e' a'$, son excentricité; si de plus, on fait $\frac{a'}{a} = z$, &

$$\frac{1}{(1 - 2z\,\text{cos.}\theta + zz)^{\frac{1}{2}}} = b + b_1.\text{cos.}\theta + b_2.\text{cos.}\,2\theta + b_3.\text{cos.}\,3\theta + \&\text{c.}$$

$$\frac{1}{(1 - 2z\,\text{cos.}\theta + zz)^{\frac{3}{2}}} = b' + b'_1.\text{cos.}\theta + b'_2.\text{cos.}\,2\theta + b'_3.\text{cos.}\,3\theta + \&\text{c.}$$

$$\frac{1}{(1 - 2z\,\text{cos.}\theta + zz)^{\frac{7}{2}}} = b'' + b''_1.\text{cos.}\theta + b''_2.\text{cos.}\,2\theta + b''_3.\text{cos.}\,3\theta + \&\text{c.}$$

& que l'on nomme V la longitude de l'aphélie de p', moins celle de l'aphélie de p à l'origine du mouvement; j'ai trouvé;

L'accroissement de l'équation du centre =

$$= \alpha e'.\delta\mu'.\text{sin.}V.i.\,360^d.\left\{\begin{array}{l} b_1 + \frac{3}{2}z(b' + \frac{b_2'}{2} - 3b + \frac{b_1}{2}) \\ - \frac{3}{8}z^2(9b_1' - b_3') + \frac{3}{2}z^3(3b' - \frac{1}{2}b_2'). \end{array}\right.$$

Je nomme X cette quantité.

Le mouvement de l'Apogée suivant l'ordre des signes =

$$= -\delta\mu'.i.360^d.\left[\tfrac{3}{2}(b-b')+\tfrac{z}{2}.(3b'_1-b_1)-\tfrac{3}{4}.z^2(b'+\tfrac{1}{2}b'_2)\right]$$
$$-\frac{X}{2\alpha e \text{ tang. } V}.$$

L'accélération du mouvement moyen =

$$= -\left(\tfrac{3195}{452}\right).\alpha e.\alpha e'.\delta\mu'.z.\text{fin.}V.ii.360^d.\left\{\begin{array}{l} 3\left[b-b'+\tfrac{1}{2}(b'_2-b_2)\right] \\ +\tfrac{z}{4}\left[7(b'_1-b'_3)-5(b''_1-b''_3)\right] \\ -z^2.\left[3(b'-\tfrac{b'_2}{2})-\tfrac{5}{4}(5b''-2b''_2-\tfrac{1}{2}b''_4)\right] \\ -\tfrac{5}{4}z^3.(b''_1-b''_3). \end{array}\right.$$
$$-\frac{3}{2}.\frac{355}{113}.\alpha e.i X,$$

on aura b, b_1, & à leur moyen, b_2, b_3, &c. b', b'_1, &c. b'', b''_1, &c. par des méthodes trop connues des Géomètres pour que je m'y arrête.

En comparant ces formules avec celles de M. de la Grange, j'ai trouvé que les expressions de l'accroissement de l'équation du centre & du mouvement de l'aphélie, sont entièrement d'accord avec celles de cet illustre Géomètre, mais l'expression de l'accélération du mouvement moyen est très-différente, & j'en ai dit ci-dessus les raisons.

L I V.

Je vais maintenant déterminer la position de l'orbite de la Planète sur un plan fixe; pour cela je reprends les équations (A), (B), (C), &c. j'y suppose d'abord $\delta m' = 0$;

elles deviennent $\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{c}{r^2}$

$$0 = \frac{\partial\partial r}{\partial t^2} - \frac{c}{r^3} + \frac{S+p}{r^2(1+ss)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\& \quad 0 = \frac{\partial\partial s}{\partial t^2} + \frac{2\partial s\partial r}{\partial t^2} + \frac{c^2 s}{r^4}$$

au lieu de ſuppoſer comme précédemment $s = 0$, je le ſuppoſerai de l'ordre α, & je ferai $s = \alpha\lambda$; $s' = \alpha\lambda'$. Il eſt clair que les trois équations précédentes ſont celles d'une ellipſe projetée ſur un plan fixe, & l'on aura aux quantités près de l'ordre α^3; $s = \alpha\gamma \,.\, \text{ſin.}\,(\varphi + \varpi)$, $s' = \alpha\gamma' \,.\, \text{ſin.}\,(\varphi' + \varpi')$; $\alpha\gamma$, & $\alpha\gamma'$ étant les tangentes des inclinaiſons des orbites de p & p' ſur le plan fixe. Cela poſé, l'équation (C) donne

$$0 = \frac{\partial\partial\delta\lambda}{\partial t^2} + \frac{2\partial\lambda.\partial\delta r}{\partial t^2} + \frac{2\partial r.\partial\delta\lambda}{\partial t^2} + \frac{c^2\delta\lambda}{r^4} - \frac{4c^2\delta r.\lambda}{r^5}$$
$$- \frac{2c\lambda}{r^5}\,.\,\delta m'.\textstyle\int.r\partial t.\text{ſin.}(\varphi'+\varphi).\left(\frac{1}{r'^3(1+s's')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right)$$
$$+ \frac{\delta m'}{r}.[\lambda' - \lambda.\text{coſ.}(\varphi'-\varphi)].\left(\frac{1}{r'^3(1+s's')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right);(8)$$

Je ne ferai attention qu'aux termes de la forme $\text{coſ.}(nt+\theta)$ & $\text{ſin.}(nt+\theta)$, θ étant la quantité dont la Planète eſt plus avancée que ſon nœud lorſque $t = 0$; ſoit donc, en pouſſant la préciſion juſques aux quantités de l'ordre $\alpha\delta\mu'$ excluſivement.

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{2c\lambda}{\partial t^2}\delta m'.\int.r\partial t.\text{ſin.}(\varphi'-\varphi)\left(\frac{1}{r'^3(1+s's')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right) \\ + \frac{\delta m'}{r}.[\lambda' - \lambda(\text{coſ.}\varphi'-\varphi)].\left(\frac{1}{r'^3(1+s's')^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3}\right)\end{array}\right\} = \begin{array}{l}E.nn\delta\mu'.\text{ſin.}(nt+\theta) \\ + F.nn.\delta\mu'.\text{coſ.}(nt+\theta)\end{array}$$

on aura

$$0 = \frac{\partial\partial\delta\lambda}{\partial t^2} + \frac{2\partial\lambda.\partial\delta r}{\partial t^2} + \frac{2\partial r.\partial\delta\lambda}{r^4} + \frac{c^2\delta\lambda}{r^4} - \frac{4c^2\lambda\delta r}{r^5}$$
$$+ E.nn.\delta\mu'.\text{ſin.}(nt+\theta) + F.nn.\delta\mu.\text{coſ.}(nt+\theta)$$

Soit $\delta\lambda = \delta\mu'.gnt.\text{ſin.}(nt+\theta) + \delta\mu'.fnt.\text{coſ.}(nt+\theta)$, & l'on trouvera, en ſubſtituant dans l'équation précédente, au lieu de $\delta\lambda$, cette valeur, & au lieu de δr, ſa valeur ci-deſſus; $f = \frac{1}{2}E + 2\gamma A$, & $g = -\frac{1}{2}F$; partant,

$$\alpha\lambda = \alpha\gamma.\text{ſin.}(nt+\theta) + \alpha\delta\mu'.nt.(2A\gamma + \tfrac{1}{2}E).\text{coſ.}(nt+\theta)$$
$$- \tfrac{1}{2}F.\delta\mu'.nt.\text{ſin.}(nt+\theta)$$

d'où l'on tire,

$$s = (\alpha\gamma - \tfrac{1}{2}F.\delta\mu'.nt).\text{fin.}\left[nt(2 + 2A\delta\mu' + \frac{E\delta\mu'}{2\gamma}) + \theta\right].$$

La diminution de l'inclinaiſon de l'orbite de p ſur le plan fixe ſera donc $= \frac{1}{2}F.\delta\mu'.i.360^d$, & le mouvement rétrograde de ſes nœuds ſur le même plan $= \frac{E\delta\mu'}{2\gamma}.i.360^d$. Il ne s'agit donc plus que de déterminer E & F; or, en nommant I la longitude du nœud de p' ſur le plan fixe, moins celle du nœud de p à l'origine du mouvement, j'ai trouvé,

la diminution ſéculaire de l'orbite de p ſur le plan fixe =

$$\frac{2.b_1}{4}.\alpha\gamma'.\text{fin.}\,I.\delta\mu'\,i.360^d,$$

&

le mouvement rétrograde de ſes nœuds ſur le même plan =

$$\frac{2b_1}{4}.\delta\mu'.(1 - \frac{\gamma'}{\gamma}.\text{cof.}\,I)\,i.360^d.$$

Ces formules du mouvement du nœud & de la variation de l'inclinaiſon, s'accordent avec celles de M. de la Grange & avec celles que M. Euler a données dans ſa première pièce ſur Jupiter & Saturne; car cet illuſtre Géomètre, en prenant pour plan fixe celui de l'orbite de p', conſidéré comme invariable, trouve

la diminution de l'orbite de p ſur ce plan = o;

&

le mouvement rétrograde de ſes nœuds $= \frac{2b_1.\delta\mu'}{4}.i.360^d$.

D'où il eſt aiſé de tirer les formules précédentes, en rapportant le mouvement de cette Planète ſur un autre plan peu incliné à celui des deux orbites de p & de p'.

Il eſt aiſé de voir que l'inclinaiſon de l'orbite de p ira en augmentant, ou en diminuant, ſuivant la poſition du plan fixe, & que le mouvement des nœuds ſera direct ou rétrograde, ſuivant que $\frac{\gamma'}{\gamma}$ cof. I. ſera plus grand ou moindre que l'unité. Ces deux remarques ſont des corollaires aſſez ſimples

ſimples des formules de M. Euler, pour qu'il ait pu ſe diſpenſer de les faire; mais ce qu'il importoit véritablement de tirer de ſon calcul, étoit la diminution de l'obliquité de l'Écliptique, & c'eſt ce que cet illuſtre Géomètre a fait dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, pour l'année 1754.

L V.

J'ai ſuppoſé dans les calculs précédens, les maſſes des Planètes infiniment petites par rapport à celle du Soleil; cette ſuppoſition eſt admiſſible pour Mars, la Terre, Vénus & Mercure; mais elle n'eſt pas exacte pour Jupiter & Saturne; car Jupiter, par exemple, égale $\frac{1}{1067}$ de la maſſe du Soleil; or, ce rapport, loin d'être infiniment petit, eſt très-comparable au produit des excentricités des deux orbites, auquel j'ai eu égard dans l'expreſſion de l'accélération des moyens mouvemens. Il paroît donc alors néceſſaire de conſidérer dans ces recherches, les quantités multipliées par $\delta\mu'^2$. Or, en regardant $\delta\mu'$ comme étant de l'ordre α^2, j'ai trouvé par le calcul, & les Géomètres verront aiſément à l'inſpection des équations (6) & (7), que ces quantités n'ajoutent aucun terme aux formules précédentes; en ſorte qu'elles ſont exactes, même dans la ſuppoſition où $\delta\mu'$ ſeroit de l'ordre α^2.

De plus, ſi l'on conſidère avec attention ces mêmes équations (6) & (7), on verra que l'expreſſion de l'accélération du mouvement moyen eſt exacte aux quantités près de l'ordre $\alpha^4\,\delta\mu'$, en ſorte qu'elle ſeroit la même ſi l'on avoit égard dans le calcul aux quantités de l'ordre $\alpha^3\,\delta\mu'$; pareillement, on verra que les formules du mouvement des nœuds & de l'apogée, & de la variation de l'excentricité & de l'inclinaiſon ſont exactes, aux quantités près de l'ordre $\alpha^3\,\delta\mu$; on peut donc les regarder comme fort approchées.

L V I.

Je vais préſentement déterminer les inégalités proportion-

nelles au cube & aux puissances supérieures du temps dans le moyen mouvement des Planètes, & celles qui sont proportionnelles au quarré & aux puissances supérieures du temps, dans les autres élémens de leurs orbites.

Il est aisé de voir, à l'inspection des équations du Problème, que l'on aura,

$$\varphi = nt + K\delta\mu'.tt + L\delta\mu''^2.t^3 + \&c.$$

J'ai précédemment déterminé K, en fonction de z, αe, $\alpha e'$, & sin. V, & j'en conclus L de la manière suivante. Pour cela je fais $t = T + t_1$, & $\varphi = \Phi + \varphi_1$, T & Φ étant considérablement plus grands que t_1 & φ_1, & φ_1 étant nul lorsque $t_1 = 0$, on aura donc

$$\varphi_1 = nt_1 + 2K\delta\mu'T.t_1 + \delta\mu'.Kt_1^2$$
$$+ 3L\delta\mu''^2T^2.t_1 + 3L.\delta\mu''^2Tt_1^2 + \&c.$$

mais si l'on nomme K' ce que devient K, lorsqu'on y met au lieu de r, e, e', & V, les valeurs qui ont lieu après le temps T, & que l'on nomme n_1 ce que devient n après ce temps, on aura

$$\varphi_1 = n_1.t_1 + K'\delta\mu'.t_1^2.$$

Donc, en comparant, on aura

$$3L\delta\mu''^2T + K\delta\mu' = K'\delta\mu'.$$

Partant, $L\delta\mu' = \frac{1}{3}\,\frac{K'-K}{T}$. On voit donc que pour avoir L, il faut différentier K, en y faisant varier z, V, e, e', des quantités dont elles ont varié après le temps T, diviser cette différence par T, & en prendre le tiers.

Comme la variation de z est de l'ordre $\alpha^2\delta\mu'$, celles de e & e' étant de l'ordre $\delta\mu'$, on peut regarder dans la différenciation, z comme constant.

On obtiendroit, par une méthode semblable, les termes proportionnels à la quatrième, cinquième, &c. puissance du temps.

Pareillement, on peut supposer le mouvement de l'apogée $= H\delta\mu'.t + M\delta\mu''^2.tt + \&c.$ J'ai déterminé ci-devant H en fonction e, e', z & V. Soit donc $t = T + t_1$

& H' ce que devient H, après le temps T; le mouvement dans l'intervalle $t_{_1}$ sera, $H\delta\mu' t_{_1} + 2M\delta\mu'' T t_{_1} +$ &c. d'où l'on tirera $H' = H + 2M\delta\mu' T$. Partant....
$M\delta\mu' = \frac{H'-H}{2T}$.

On détermineroit de la même manière les inégalités proportionnelles au quarré, au cube, &c. des temps, dans les autres élémens de l'orbite; mais toutes ces inégalités sont encore trop peu sensibles pour y avoir égard.

LVII.

Application des formules précédentes à Jupiter & à Saturne.

M. de la Grange a trouvé dans le Mémoire cité précédemment (voyez *le IIIe Volume des Mémoires de Turin, page 376)*, en supposant que p soit Saturne, & p' Jupiter,

$$z = 0{,}545169. \qquad b' = 6{,}89171.$$
$$b = 2{,}17810. \qquad b'_{,} = 12{,}40329.$$
$$b_{,} = 3{,}18323. \qquad b'_{,} = 9{,}89076.$$
$$b_{,} = 2{,}08012. \qquad b'_{,} = 7{,}31577.$$

Ayant vérifié ces valeurs, je les ai trouvées exactes, & j'en ai conclu

$$b'' = 26{,}31447.$$
$$b''_{,} = 49{,}97291.$$
$$b''_{,} = 43{,}52843.$$
$$b''_{,} = 35{,}45922.$$
$$b''_{,} = 27{,}43053.$$

Mais suivant les Tables de Halley, on a pour l'année 1750,

$$\alpha e' = 0{,}048218, \; \alpha e = 0{,}057003$$
$$V = -79^{d}\; 6'\; 12''$$

& si l'on prend pour plan fixe, celui de l'écliptique pour le commencement de l'année 1750, on aura $\alpha\gamma' = 0{,}023032$, $\alpha\gamma = 0{,}043710$, &, $- I = 13^{d}\; 4'\; 16''$; de plus

$\delta\mu' = \frac{1}{1067}$; cela posé. M. de la Grange ayant déterminé d'après des formules exactes, le mouvement des nœuds & de l'aphélie, ainsi que la variation de l'excentricité & de l'inclinaison de l'orbite de Saturne sur l'écliptique, il n'y a point de doute que les valeurs qu'il trouve ne soient exactes, je me bornerai conséquemment ici à déterminer l'équation séculaire du mouvement moyen. Or en substituant les valeurs précédentes dans l'expression analytique de cette équation, je l'ai trouvée absolument nulle; d'où je conclus que l'altération du mouvement moyen de Saturne, si elle existe, n'est point dûe à l'action de Jupiter.

Si l'on suppose actuellement que p soit Jupiter & p' Saturne; si de plus on distingue par une parenthèse les quantités correspondantes à Jupiter, on aura $(z) = \frac{1}{z}$, $(b) = b\,z^3$, $(b_1) = b_1\,z^3$ &c. $(b') = b'z^5$ &c. $(b'') = b''\,z^7$ &c. d'où j'ai conclu

$(b) = 0{,}35292$, $(b') = 0{,}33188$, $(b'') = 0{,}37663$,
$(b_1) = 0{,}51578$, $(b'_1) = 0{,}59730$, $(b''_1) = 0{,}71524$,
$(b_2) = 0{,}33704$, $(b'_2) = 0{,}47630$, $(b''_2) = 0{,}62300$,
$(b'_3) = 0{,}35230$, $(b''_3) = 0{,}50751$,
$(b''_4) = 0{,}39260$,

enfin, $\delta\mu' = \frac{1}{3021}$; d'ailleurs $(V) = -V$, $(I) = -I$, $(\alpha e) = \alpha e'$, $(\alpha\gamma) = \alpha\gamma'$, & $(\alpha\gamma') = \alpha\gamma$. Cela posé, en substituant ces valeurs dans la formule de l'équation séculaire, je l'ai trouvée absolument nulle; d'où je conclus que l'altération du mouvement moyen de Jupiter, si elle existe, n'est point dûe à l'action de Saturne.

En comparant les Observations de Jupiter & de Saturne faites dans les différens siècles, les Astronomes ont cru apercevoir une accélération dans le mouvement moyen de Jupiter & une retardation dans celui de Saturne; je ne

m'arrêterai point ici à discuter ces Observations & à faire voir l'incertitude qu'elles laissent sur la quantité de ces altérations; il suffit d'observer ici que leur existence paroît assez vraisemblable, & que le retardement de Saturne est beaucoup plus considérable que l'accélération de Jupiter dans le même intervalle de temps.

Il résulte de la théorie précédente, que ces variations ne peuvent être attribuées à l'action mutuelle de ces deux Planètes; mais si l'on considère le grand nombre de Comètes qui se meuvent autour du Soleil, si l'on fait ensuite réflexion qu'il est très-possible que quelques-unes d'entr'elles aient passé assez près de Jupiter & de Saturne pour altérer leurs mouvemens, & que leur effet, toutes choses d'ailleurs égales, doit être plus sensible sur les Planètes les plus éloignées du Soleil, par la même raison que l'effet de Jupiter sur Saturne est beaucoup plus grand que sur Mars, dont il est cependant plus près que de Saturne; on regardera comme très-probable que les variations observées dans les mouvemens moyens de Jupiter & de Saturne ont été produites par l'action de ces Comètes; on ne peut douter en effet qu'elles ne soient soumises comme tous les autres Corps célestes, aux loix de la Pesanteur universelle; il semble même résulter des Observations, que leur action sur Saturne est sensible, puisque cette Planète est sujette à des inégalités qui ne paroissent pas pouvoir dépendre de sa pesanteur sur Jupiter; il seroit donc fort à desirer que le nombre des Comètes, leurs masses & leurs mouvemens fussent assez connus pour que l'on put déterminer l'effet de leur action sur les Planètes; c'est ce qu'on ne doit attendre que d'une très-longue suite d'Observations.

LVIII.

Mais voici un moyen fort simple de s'assurer d'ailleurs si les altérations des mouvemens moyens de Jupiter & de Saturne sont l'effet de leur action mutuelle; pour cela, je fais usage d'un principe que M. le Chevalier d'Arcy a donné dans les *Mémoires de l'Académie, année 1747*, & qu'il a fort heureusement appliqué à la solution de différens Problèmes

de Dynamique: voici l'énoncé de ce principe. *Si plusieurs Corps se meuvent autour d'un point quelconque, que je considère comme foyer, la somme des produits de la masse de chaque Corps, par l'aire que décrit le rayon vecteur de sa projection sur un plan fixe, qui passe par ce foyer, est proportionnelle au temps.*

Soit donc C *(figure 3)* le centre commun de gravité du Soleil S, de Jupiter p, & de Saturne p'; je regarde ce point comme foyer, & je fais passer par ce même point, un plan fixe que je suppose être celui de l'Écliptique, pour le commencement de l'année 1750. Cela posé, le produit de l'aire que décrit le rayon vecteur de la projection de Jupiter autour de C, multipliée par sa masse, plus, celui de l'aire décrite par le rayon vecteur de la projection de Saturne, multipliée par sa masse, plus celui de l'aire décrite par le rayon vecteur de la projection du Soleil, multipliée par sa masse, est constant en temps égal.

En regardant les masses de Jupiter & de Saturne comme infiniment petites par rapport à celle du Soleil, que nous prendrons pour unité de masse; il est clair que CS sera infiniment petit du premier ordre; partant, l'aire décrite par le rayon vecteur de la projection du Soleil autour de C, est infiniment petite du second ordre, & conséquemment négligible. Maintenant, si l'on suppose les orbites de Jupiter & de Saturne elliptiques dans l'intervalle d'une révolution; que l'on nomme $\delta\mu$ la masse de Jupiter, $\delta\mu'$ celle de Saturne, & que l'on conserve en général les mêmes dénominations que ci-dessus, en observant de marquer d'un trait pour Saturne, les quantités correspondantes à celles de Jupiter; j'ai trouvé, en négligeant les quatrièmes puissances des excentricités & des inclinaisons, que l'aire décrite durant un instant infiniment petit dt, par le rayon vecteur de la projection de Jupiter $= \frac{1}{2} a^2 n dt [1 - \frac{1}{2}\alpha^2 e^2 - \frac{1}{2}\alpha^2\gamma^2]$ & qu'ainsi celle décrite par le rayon vecteur de la projection de Saturne, $= \frac{1}{2} a'^2 n' dt [1 - \frac{1}{2}\alpha^2 e'^2 - \frac{1}{2}\alpha^2\gamma'^2]$; on aura donc

$$\delta\mu . n a^2 [1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 e^2 - \tfrac{1}{2}\alpha^2\gamma^2] + \delta\mu' . n' a'^2 [1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 e'^2 - \tfrac{1}{2}\alpha^2\gamma'^2] = C,$$

C étant une constante; or, on a $\frac{1}{a^3} = nn$, & $\frac{1}{a'^3} = n'^2$,

l'équation précédente deviendra par conféquent,

$$n^{-\frac{1}{3}}\delta\mu\left[1-\tfrac{1}{2}\alpha^2e^2-\tfrac{1}{2}\alpha^2\gamma^2\right]+n'^{-\frac{1}{3}}\delta\mu'\left[1-\tfrac{1}{2}\alpha^2e'^2-\tfrac{1}{2}\alpha^2\gamma'^2\right]=C.$$

Si l'on fuppofe actuellement qu'après plufieurs fiècles, les orbites des deux Planètes changent par leur action mutuelle, & que l'on exprime par la caractériftique δ, les variations de leurs élémens, on différenciera l'équation précédente par rapport à δ, en regardant C comme conftante; ce qui établit une relation entre les inégalités des deux Planètes, relation à laquelle les obfervations doivent fatisfaire, fi ces Planètes n'ont éprouvé d'autre action fenfible, que leur gravitation réciproque. On aura donc

$$\left.\begin{array}{l}\tfrac{1}{3}\delta\mu\,.\,n^{-\frac{4}{3}}\delta n\left[1-\tfrac{1}{2}\alpha^2e^2-\tfrac{1}{2}\alpha^2\gamma^2\right]\\+\tfrac{1}{3}\delta\mu'\,.\,n'^{-\frac{4}{3}}\delta n'\left[1-\tfrac{1}{2}\alpha^2e'^2-\tfrac{1}{2}\alpha^2\gamma'^2\right]\\+n^{-\frac{1}{3}}\delta\mu\left[\alpha^2e\,\delta e+\alpha^2\gamma\,\delta\gamma\right]\\+n'^{-\frac{1}{3}}\delta\mu'\left[\alpha^2e'\,\delta e'+\alpha^2\gamma'\,\delta\gamma'\right]\end{array}\right\}\begin{array}{l}(Z)\\=0.\end{array}$$

Si l'on nomme T le temps après lequel on fuppofe que les élémens n, e, γ, n', e', & γ' ont varié des quantités δn, δe, $\delta\gamma$, $\delta n'$, $\delta e'$, & $\delta\gamma'$, & que l'on fuppofe que durant ce temps Jupiter ait fait i révolutions, on aura, *(voyez le Mémoire de M. de la Grange.)*

$$2\,\delta\alpha e=\frac{7'',4254}{57^d\,17'\,44''}\,.\,i;\;2\,\delta\alpha e'=-\frac{32'',6086}{57^d\,17'\,44''}\,i\,.\,\frac{n'}{n}$$

$$\delta\alpha\gamma=-\frac{1'',0030}{57^d\,17'\,44''}\,.\,i;\;\delta\alpha\gamma'=\frac{2'',7449}{57^d\,17'\,44''}\,i\,.\,\frac{n'}{n}.$$

D'ailleurs, $\frac{n'}{n}=0{,}402528$. De-là, je conclus

$$\delta\mu\,.\,n^{-\frac{1}{3}}\left[\alpha^2e\,\delta e+\alpha^2\gamma\,\delta\gamma\right]+\delta\mu'\,.\,n'^{-\frac{1}{3}}\left[\alpha^2e'\,\delta e'+\alpha^2\gamma'\,\delta\gamma'\right]=0;$$

partant, en négligeant les quantités de l'ordre $\alpha^2\,\delta n'\,\delta\mu$, l'équation *(Z)* devient

$$\delta n'=-\delta n\,.\,\frac{\delta\mu}{\delta\mu'}\,.\,\left(\frac{n'}{n}\right)^{\frac{4}{3}},$$

ce qui donne $\delta n'=-\delta n\,.\,0{,}84149$.

De-là, il ſuit que l'équation ſéculaire de Jupiter, eſt à celle de Saturue dans le même intervalle de temps, comme 1 : 0, 84149, & que d'ailleurs elles ont des ſignes contraires. Les obſervations ſatisfont, à la vérité, à cette dernière condition, mais non pas à la première, puiſque l'équation ſéculaire de Saturne, loin d'être moindre que celle de Jupiter, eſt beaucoup plus grande.

On peut remarquer en paſſant, que l'équation ſéculaire de Jupiter étant nulle, celle de Saturne doit l'être pareillement; ce qui coincide avec les réſultats que j'ai trouvés précédemment, & ce qui confirme par conſéquent leur exactitude.

Il paroît donc certain que l'on doit chercher ailleurs que dans l'action mutuelle de Jupiter & de Saturne, l'altération que l'on obſerve dans leurs moyens mouvemens. On l'attribuera peut-être à l'action de leurs ſatellites; mais cela eſt impoſſible. Car ſi un ſyſtème de Corps très-voiſins les uns des autres, ſe meut à une fort grande diſtance du Soleil, le centre de gravité du ſyſtème décrit très-ſenſiblement une ellipſe conſtante autour du Soleil *(Voyez le ſixième Volume des Opuſcules de M. d'Alembert).* D'ailleurs, par la théorie des ſatellites, & par les obſervations, il eſt prouvé que le ſyſtème d'une Planète & de ſes ſatellites, eſt compris dans des limites déterminées, au moins durant un très-grand nombre de ſiècles. Ainſi, la Planète reſte toujours fort près du centre commun de gravité du ſyſtème; d'où il ſuit que les élémens de l'ellipſe décrite par la Planète, peuvent être conſidérés comme invariables, en ne conſidérant que l'action de ſes ſatellites.

LIX.

J'ai obſervé *(article LVII)* que la ſubſtitution des valeurs numériques de b, $b_{,}$, &c. b', $b'_{,}$, &c. b'', &c. relatives à Jupiter & à Saturne, dans l'expreſſion analytique de l'équation ſéculaire du moyen mouvement des Planètes, la rendoit nulle à très-peu près, en ſorte que les quantités extrêmement petites qui reſtent à la fin du calcul, peuvent être attribuées aux

aux erreurs inévitables dans la détermination de b, b_1, &c. l'exactitude avec laquelle les différens termes de cette expression se sont mutuellement détruits dans ce cas, m'a fait soupçonner qu'elle est identiquement nulle; en effet, il est assez peu vraisemblable qu'une égalité aussi parfaite entre ses termes positifs & négatifs, soit dûe aux circonstances particulières du mouvement de Jupiter & de Saturne: j'ai donc cherché à vérifier cette conjecture, & je l'ai trouvée juste; d'où il suit que l'action des Planètes les unes sur les autres & sur le Soleil, n'a pu sensiblement altérer leurs moyens mouvemens, depuis le temps au moins auquel on a commencé à cultiver l'Astronomie, jusqu'à ce moment. Comme cette remarque me paroît de la plus grande importance dans la théorie des Planètes, & que d'ailleurs elle est contraire à ce qu'ont cru jusqu'ici tous les Géomètres qui se sont occupés de cet objet; je vais exposer en peu de mots le procédé qui m'y a conduit.

Les Géomètres savent que b, & b_1, étant donnés, on a facilement par des expressions finies les autres quantités b_2, &c. b', b'_1, b'_2, &c. b'', b''_1, &c. comme M. d'Alembert l'a trouvé le premier *(voyez le second volume de ses Recherches sur le Système du Monde)*. Soit

$$\frac{1}{(1 - 2z \,\text{cos.}\, \theta + zz)^{\mu}} = b + b_1 \,.\, \text{cos.}\, \theta + b_2 \,.\, \text{cos.}\, 2\theta + \&c.$$

$$\frac{1}{(1 - 2z \,\text{cos.}\, \theta zz)^{\mu+1}} = b' + b'_1 \,\text{cos.}\, \theta + \&c.$$

on aura *(voyez les Recherches de M. de la Grange sur Jupiter & Saturne)*.

$$b_2 = \frac{(1+zz)b_1 - 2b\mu z}{z(1-\mu)}, \quad b_3 = \frac{2(1+zz)b_2 - b_1 . z(1+\mu)}{z(3-\mu)},$$

$$b_4 = \frac{3(1+zz)b_3 - zb_2(2+\mu)}{z(4-\mu)}, \text{ \&c.}$$

$$b' = \frac{b(1+zz) + \frac{\mu-1}{\mu} b_1 . z}{(1-zz)^2}, \quad b'_1 = \frac{4bz + \frac{\mu-1}{\mu} b_1(1+zz)}{(1-zz)^2};$$

De-là, en faisant $\mu = \frac{3}{2}$, j'ai conclu

$$b_2 = \frac{2(1+zz)}{z}\, b_1 - 6b.$$

$$b' = \frac{b(1+zz)}{(1-zz)^2} + \frac{\frac{1}{3} b_1 . z}{(1-zz)^2},$$

$$b'_1 = \frac{4bz}{(1-zz)^2} + \frac{\frac{1}{3} b_1 (1+zz)}{(1-zz)^2},$$

$$b'_2 = \frac{2b(1+zz)}{(1-zz)^2} + \frac{\frac{10}{3} b_1 . z - \frac{2}{3}\frac{b_1(1-zz)^2}{z}}{(1-zz)^2},$$

$$b'_3 = \frac{\frac{8b(1+zz)^2}{z} - 28bz}{(1-zz)^2} + \frac{11 . b_1(1+zz) - \frac{8}{3}\frac{b_1(1+zz)^2}{zz}}{(1-zz)^2},$$

$$b'' = \frac{\frac{12}{5} bzz + b(1+zz)^2}{(1-zz)^4} + \frac{\frac{8}{15} b_1 . z(1+zz)}{(1-zz)^4}$$

$$b''_1 = \frac{\frac{32}{5} bz(1+zz)}{(1-zz)^4} + \frac{\frac{4}{3} b_1 . zz + \frac{1}{5} b_1(1+zz)^2}{(1-zz)^4},$$

$$b''_2 = \frac{\frac{56}{5} bzz + \frac{2}{5} b(1+zz)^2}{(1-zz)^4} + \frac{\frac{8}{5} b_1 . z(1+zz) - \frac{2}{15}\frac{b_1(1+zz)^3}{z}}{(1-zz)^4},$$

$$b''_3 = \frac{\frac{64}{5} bz(1+zz) - \frac{8}{5}\frac{b(1+zz)^3}{z}}{(1-zz)^4} + \frac{12 b_1 zz - \frac{23}{5} b_1(1+zz)^2 + \frac{8}{15}\frac{b_1(1+zz)^4}{zz}}{(1-zz)^4}$$

$$b''_4 = \frac{\frac{362}{5} b(1+zz)^2 - \frac{616}{5} bzz - \frac{48}{5}\frac{b(1+zz)^4}{zz}}{(1-zz)^4}$$

$$+ \frac{\frac{272}{5} b_1 . z(1+zz) - \frac{392}{15}\frac{b_1(1+zz)^3}{z} + \frac{48}{15}\frac{b_1(1+zz)^5}{z^3}}{(1-zz)^4}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'expression de l'équation séculaire du moyen mouvement, on trouvera après toutes les réductions, qu'elle se réduit à zéro.

J'ai cherché ensuite si par de semblables substitutions, il

ne seroit pas possible de simplifier les expressions de l'accroissement de l'équation du centre & du mouvement de l'apogée, & j'ai trouvé qu'elles deviennent par-là extrêmement simples & commodes pour le calcul :

l'accroissement de l'équation du centre =

$$\alpha e' \delta \mu' . \text{sin.} V.i.360^d [b_{,}(1 + zz) - 3bz].$$

le mouvement de l'apogée suivant l'ordre des signes =

$$\delta \mu' . i . 360^d [\tfrac{1}{4} z b_{,} - \frac{\frac{1}{2}\alpha e'}{\alpha e} . \text{cos.} V({b_{,}(1 + zz) \atop - 3bz})].$$

Si l'on joint à ces formules celles du mouvement rétrograde des nœuds de l'orbite, & de la diminution séculaire de son inclinaison sur le plan fixe, on aura toutes les inégalités séculaires du mouvement moyen des Planètes exprimées par des formules aussi simples qu'on puisse le desirer, en sorte qu'il ne reste plus de difficulté que dans la détermination de b & $b_{,}$; mais les Géomètres ont imaginé pour cela différentes méthodes qu'il seroit inutile de rapporter ici.

Je puis me servir, pour prouver l'exactitude des calculs précédens, de la méthode dont j'ai fait usage, *art. LVIII.* Dans le cas particulier de Jupiter & de Saturne; car si les formules précédentes sont exactes, il faut que l'équation *(Z)*

$$\left. \begin{array}{l} \tfrac{1}{3} \delta \mu . n^{-\frac{4}{3}} \delta n . [1 - \tfrac{1}{2} \alpha^2 e^2 - \tfrac{1}{2} \alpha^2 \gamma^2] \\ + \tfrac{1}{3} \delta \mu . n'^{-\frac{4}{3}} \delta n' [1 - \tfrac{1}{2} \alpha^2 e'^2 - \tfrac{1}{2} \alpha^2 \gamma'^2] \\ + n^{-\frac{1}{3}} \delta \mu [\alpha e \delta e + \alpha \gamma \delta \gamma] \\ + n'^{-\frac{1}{3}} \delta \mu' [\alpha e' \delta e' + \alpha \gamma' \delta \gamma'] \end{array} \right\} = 0. (Z)$$

trouvée, *art. LVIII*, soit vraie, en y supposant $\delta n = 0$, $\delta n' = 0$. Il faut donc que les valeurs de δe, $\delta \gamma$, $\delta e'$, $\delta \gamma'$ satisfassent à l'équation

$$\left. \begin{array}{l} n^{-\frac{1}{3}} \delta \mu [\alpha e \delta e + \alpha \gamma \delta \gamma] \\ + n'^{-\frac{1}{3}} \delta \mu' [\alpha e' \delta e' + \alpha \gamma' \delta \gamma'] \end{array} \right\} = 0 \; (\sigma).$$

or, on a

$$\delta e = \alpha e' \delta \mu' \text{ fin. } V . i . 360^d \, [b_1 (1 + zz) - 3 b z]$$

$$\delta e' = - \alpha e \delta \mu . \text{fin.} V . i . \frac{n'}{n} . 360^d z \, [b_1 (1 + zz) - 3 b z]$$

$$\delta \gamma = \tfrac{1}{4} \alpha \gamma' z b_1 \text{ fin. } I . \delta \mu' . i . 360^d, \text{ \&}$$

$$\delta \gamma' = - \tfrac{1}{4} \alpha \gamma b_1 . z^2 \text{ fin. } I . \delta \mu . i . \frac{n'}{n} . 360^d.$$

De plus $\frac{n'}{n} = z^{-\frac{3}{2}}$. Cela pofé, fi l'on fubftitue ces valeurs dans l'équation (σ), on verra qu'elles y fatisfont.

Voici maintenant une petite Table qui renferme toutes les inégalités féculaires du mouvement de la Planète p, troublée par l'action de la Planète p'.

Soit $\delta \mu'$ le rapport de la maffe de p', à celle du Soleil; a, la moyenne diftance de p au Soleil; $\alpha e . a$, l'excentricité de fon orbite, & $\alpha \gamma$, fon inclinaifon fur le plan fixe; L, la Longitude de fon apogée, & Γ, celle de fon nœud, à l'époque où l'on fixe l'origine du mouvement; que a', $\alpha e' a'$, $\alpha \gamma'$, L' & Γ', défignent des quantités analogues pour la Planète p'. Soit de plus,

$$\frac{a'}{a} = z, \text{ \& } \frac{1}{(1 - 2 z \operatorname{cof.} \theta + zz)^{\frac{1}{2}}} = b + b_1 . \operatorname{cof.} \theta + \text{\&c.}$$

on déterminera b & b_1 au moyen des expreffions fuivantes. *(Voyez le Calcul intégral de M. Euler).*

$$b = \frac{1}{(1+zz)^{\frac{1}{2}}} . \left\{ \begin{array}{l} 1 + \left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(\frac{2z}{1+zz}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(1 - \frac{1}{8^2}\right)\left(\frac{2z}{1+zz}\right)^4 \\ + \left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(1 - \frac{1}{8^2}\right)\left(1 - \frac{1}{12^2}\right) . \left(\frac{2z}{1+zz}\right)^6 + \text{\&c.} \end{array} \right.$$

$$b_1 = \frac{3z}{(1+zz)^{\frac{3}{2}}} . \left\{ \begin{array}{l} 1 + \left(1 + \frac{3}{4(3^2-1)}\right)\left(\frac{2z}{1+zz}\right)^2 + \left(1 + \frac{3}{4(3^2-1)}\right)\left(1 + \frac{3}{4(5^2-1)}\right) . \left(\frac{2z}{1+zz}\right)^4 \\ + \left(1 + \frac{3}{4(3^2-1)}\right)\left(1 + \frac{3}{4(5^2-1)}\right)\left(1 + \frac{3}{4(7^2-1)}\right)\left(\frac{2z}{1+zz}\right)^6 + \text{\&c.} \end{array} \right.$$

Soit enfin i, le nombre des révolutions de p depuis l'époque donnée, il faudra faire i négatif, fi l'on veut remonter aux temps antérieurs à cette époque. Cela pofé.

TABLE des Inégalités féculaires du mouvement de p, *produites par l'action de* p'.

Mouvement moyen de l'apogée fuivant l'ordre des fignes

$$\delta\mu'.i.360^d.\left[\tfrac{1}{4}zb_1 - \frac{\frac{1}{2}\alpha e'}{\alpha e}.\text{cof.}(L'-L).\left\{\begin{matrix} b_1(1+zz) \\ -3bz \end{matrix}\right\}\right]$$

Accroiffement de l'équation du centre

$$\alpha e'.\delta\mu'.\text{fin.}(L'-L).i.360^d\,[b_1(1+zz)-3bz].$$

Diminution de l'inclinaifon de l'orbite fur le plan fixe

$$\tfrac{1}{4}zb_1.\alpha\gamma'.\text{fin.}(\Gamma'-\Gamma).\delta\mu'.i.360^d.$$

Mouvement rétrograde du nœud fur le plan fixe

$$\frac{zb_1}{4}.\delta\mu'.\left[1-\frac{\alpha\gamma'}{\alpha\gamma}.\text{cof.}(\Gamma'-\Gamma)\right].i.360^d.$$

Équation féculaire du moyen mouvement, nulle.

Il paroît donc conftant que l'action réciproque des Planètes ne peut caufer de variation remarquable dans leurs moyens mouvemens, au moins, aux quantités près de l'ordre $\alpha^2\delta\mu'$; il pourroit arriver cependant qu'en pouffant plus loin les approximations, on trouvât une équation féculaire; mais il y a tout lieu de croire qu'elle feroit infenfible; car elle ne peut être, ainfi que je l'ai obfervé *art. 55*, que de l'ordre $\alpha^4\delta\mu'$, c'eft-à-dire, du même ordre que le produit de la quatrième puiffance de l'excentricité de la Planète troublante par le rapport de fa maffe à celle du Soleil. Or, les quantités de l'ordre $\alpha^2\delta\mu'$, étant déjà exceffivement petites, il eft très-probable que celles de l'ordre $\alpha^4\delta\mu'$, font abfolument infenfibles.

Les altérations obfervées dans le moyen mouvement de quelques-unes des Planètes, dépendent conféquemment d'une autre caufe que de leur action mutuelle. J'avoue que cette conclufion feroit moins certaine, fi ces altérations fuivoient une loi proportionnelle au quarré des temps, car cela indiqueroit fûrement une caufe toujours agiffante; or, jufqu'à préfent nous n'en connoiffons point d'autre que leur gravitation mutuelle; il feroit donc alors indifpenfable de pouffer

la précision jusqu'aux quantités de l'ordre α^4; mais avant que d'entreprendre un calcul aussi pénible par son excessive longueur, & dont on a si peu lieu d'attendre quelqu'équation sensible, il faudroit être bien assuré de l'existence d'une pareille variation; or, les observations sont bien éloignées de la démontrer, puisqu'elles indiquent à peine une altération dans les moyens mouvemens, sans qu'elles puissent même nous en faire connoître la véritable quantité.

L X.

Détermination des inégalités séculaires de la Terre.

Je vais présentement déterminer les inégalités séculaires de la Terre, inégalités qui malgré leur importance, n'ont point encore, ce me semble, été discutées avec exactitude. A la vérité, le célèbre M. Euler a cherché à les déterminer dans sa pièce sur les inégalités séculaires de la Terre, qui a remporté le Prix de l'Académie en 1756; mais 1.° cet Auteur n'a point eu égard à la variation séculaire de l'équation du centre; 2.° sa formule du mouvement moyen de l'apogée me paroît incomplète & diffère de celle trouvée précédemment, ce qui vient de ce qu'il a négligé les termes multipliés par l'excentricité de la Planète troublante, en conservant néanmoins ceux qui sont multipliés par l'excentricité de la Planète troublée; j'ai donc cru qu'il n'étoit pas inutile de discuter de nouveau ces objets, d'autant plus que le mouvement moyen de l'apogée du Soleil, qui paroît connu avec assez de précision, servira à déterminer la masse de Vénus, & par conséquent la diminution de l'obliquité de l'Écliptique résultante de l'action des Planètes.

Inégalités séculaires produites par l'action de Vénus.

Les Tables de M. Halley donnent $\frac{a'}{a} = z = 0{,}723331$: de-là j'ai conclu $b = 4{,}995814$, & $b_{,} = 8{,}871351$. Les mêmes Tables donnent pour le commencement de

1750, la longitude de l'aphélie de Vénus $= 10^s 7^d 18' 31''$, & suivant les Tables du Soleil de M. l'Abbé de la Caille, la longitude de l'apogée du Soleil à cette époque $= 3^s 8^d 38' 4''$. De-là on aura $V = 6^s 28^d 40' 27''$, on a de plus suivant M. Halley,

$$l.\alpha\, \epsilon' = \bar{3},8439549.$$
$$l.\alpha\, \epsilon = \bar{2},2253610.$$

Soit présentement $\delta\mu' = \frac{m_1}{100000}$, & i le nombre des révolutions de la Terre depuis l'époque donnée; cela posé, on aura

L'augmentation de la plus grande équation du centre .... $= - 0'',11601 . m_1 . i$.

Le mouvement direct de l'apogée .... $= 27'',103 . m_1 . i$.

pour déterminer maintenant le mouvement de l'orbite du Soleil, il faut la rapporter sur un plan fixe; or la position de ce plan étant arbitraire, je choisis celui qui au commencement de 1750 étoit incliné à l'écliptique de $1^d 30'$, & dont le nœud descendant se trouvoit à cette époque dans l'équinoxe du printemps; on aura ainsi pour cet instant

Longitude du nœud ascendant de l'orbite du Soleil sur le plan fixe.......................... $= 0^s 0^d 0' 0''$.

Inclinaison de l'orbite sur son plan fixe....... $=$ 1. 30.

Suivant les Tables de M. Halley, on a pour la même époque,

Longitude du nœud ascendant de Vénus sur l'éclipt. $= 2^s 14^d 23' 42''$.

Inclinaison de l'orbite de Vénus à l'Écliptique.. $=$ 3. 23. 20.

De-là j'ai conclu la longitude du nœud ascendant de Venus sur le plan fixe................. $=$ 53. 33. 50.

Et l'inclinaison de son orbite sur le plan fixe... $=$ 4. 3. 27.

Partant .... $I =$ 53. 33. 50.

ce qui donne la diminution de l'inclinaison de l'orbite du Soleil sur le plan fixe $= 1'',1865 . m_1 . i$, & le mouvement direct du nœud $= 12'',6594 . m_1 . i$.

L X I.

Inégalités séculaires produites par l'action de Jupiter.

Les Tables de M. Halley donnent $\frac{a'}{a} = z = 5{,}20098$; d'où j'ai conclu $b = 0{,}0077351$, & $b_1 = 0{,}00440026$, on a de plus suivant les mêmes Tables, $l.\alpha e' = \bar{2}{,}6832078$ & la longitude de l'Aphélie de Jupiter au commencement de 1750 $= 6^s\ 10^d\ 33'\ 46''$;

ce qui donne, $V = 3^s\ 1^d\ 55'\ 42''$. D'ailleurs $\delta\mu' = \frac{1}{1067}$;

Cela posé, je trouve

l'augmentation de la plus grande équation du centre du Soleil $= 0'',16038.i$
le mouvement de son apogée . . . . $= 7'',10990.i$.

Les Tables de M. Halley, donnent encore

La longitude du nœud ascendant de Jupiter sur l'Écliptique, au commencement de 1750 . . . . $= 3^s\ 8^d\ 15'\ 49''$;
& l'inclinaison de son orbite à l'Écliptique . . . . $= 1^d\ 19'\ 10''$.

De-là j'ai conclu

Longitude du nœud ascendant de l'orbite de Jupiter sur le plan fixe . . . . $= 44^d\ 54'\ 56''$;
& son inclinaison au plan fixe . . . . $= 1^d\ 51'$.

Partant, $I = 44^d\ 54'\ 56''$. Ce qui donne

La diminution de l'inclinaison de l'orbite du Soleil sur le plan fixe . . . . $= 0'',15849\,i$,
& le mouvement rétrograde du nœud . . . . $= 0'',8793\,i$.

La variation de l'équation du centre est proportionnelle à l'excentricité de la Planète troublante. Or, l'excentricité de Mercure étant fort considérable, il sembleroit nécessaire d'avoir égard à son action; mais la petitesse de sa masse & sa proximité du Soleil, rendent son effet presque insensible, comme je m'en suis assuré par le calcul. On peut encore négliger l'action de Mars, quoique son excentricité soit pareillement fort grande, de sorte que je puis me borner ici à ne considérer que l'action de Vénus & de Jupiter.

L'action

L'action réunie de Jupiter & de Vénus, produit dans l'équation du centre du Soleil, un accroissement égal à

$$i.0'',16038 - i.0'',11601.m_{,}$$

& dans son apogée, un mouvement égal à

$$i.27'',103.m_{,} + i.7'',1099.$$

Il reste présentement à déterminer la quantité $m_{,}$. Le moyen le plus exact pour y parvenir, est de chercher par l'observation, le mouvement annuel de l'apogée du Soleil, & de l'égaler à celui que donne la Théorie. Ce mouvement paroît assez bien déterminé par l'observation, & les meilleurs Astronomes s'accordent à peu-près sur sa quantité. M. le Monnier la suppose dans ses Institutions, de 63 secondes par année, par rapport aux équinoxes; M. l'Abbé de la Caille, de $65''\frac{1}{2}$, & M. Mayer, dans ses nouvelles Tables, de 66 secondes. Je la supposerai avec M. l'Abbé de la Caille, de $65''\frac{1}{2}$; & en admettant avec cet Astronome, la précession moyenne des équinoxes, de $50''\frac{1}{3}$, je formerai l'équation suivante.

$$50'',3333 + 27'',103\ m_{,} + 7'',1099 = 65'',5;$$

d'où je conclus $m_{,} = 0,29727$, ce qui donne la masse de Vénus égale à $\frac{1}{336399}$, de celle du Soleil.

L'augmentation totale de l'équat. du centre du ☉ sera donc $= i.0'',12589$.

Le mouvement de son apogée . . . . $= i.15'',167$.

La diminution de l'inclinaison de l'orbite du Soleil sur le plan fixe . . . . $= i.0'',51120$,

& le mouvement direct du nœud . . . . $= 2'',8838.i$.

On voit par ces formules, que l'équation du centre du Soleil n'est pas constante, & qu'elle va en augmentant de 13 secondes environ par siècle.

LXII.

Méthode pour déterminer la variation de l'obliquité de l'Écliptique.

Que *DAS* (*fig. 4.*) représente la position de l'Écliptique

pour une époque donnée; MAB, celle du plan fixe auquel je rapporte le mouvement de l'orbite de la Terre, & AN celle de l'Équateur. Je ſuppoſe maintenant qu'en vertu de la préceſſion des équinoxes, l'Équateur parvienne à un inſtant donné dans la ſituation MOR, & que par le mouvement des nœuds, l'Écliptique parvienne dans la ſituation BO. Cela poſé, je conçois que l'Écliptique BO prend la ſituation infiniment proche CR, & je fais $BO = v$, $BA = z$, & l'angle $ABO = \phi$, ϕ étant très-petit. Soit de plus l'angle BOZ, ou l'angle formé par l'écliptique & l'équateur $= V$, on aura par les analogies différentielles de la Trigonométrie ſphérique :

1.° En ſuppoſant ϕ conſtant, & z variable,

$$\partial V = - \partial z . \text{ſin.}\, v . \text{ſin.}\, \phi.$$

2.° En ſuppoſant z conſtant, & ϕ variable,

$$\partial V = \partial \phi \text{ coſ.}\, v.$$

Partant, en ſuppoſant ϕ & z variables à la fois,

$$\partial V = \partial \phi . \text{coſ.}\, v - \partial z . \text{ſin.}\, v . \text{ſin.}\, \phi.$$

Ce ſeroit l'expreſſion de la variation de l'obliquité de l'Écliptique, ſi l'équateur étoit fixe dans la poſition MR; mais ſi je conçois qu'il prend la ſituation LH, & que durant ce mouvement l'inclinaiſon de l'Écliptique croiſſe de la quantité $\partial \alpha$, en ſorte que $BKH = BOR + \partial \alpha$, il eſt facile de voir que l'on aura $CHX = CRZ + \partial \alpha$.

Partant,

$$\partial V = \partial \alpha + \partial \phi . \text{coſ.}\, v - \partial z \text{ſin.}\, v . \text{ſin.}\, \phi,$$

& c'eſt l'expreſſion totale de la variation de l'obliquité de l'Écliptique.

On aura pareillement, 1.° en faiſant varier z ſeul,

$\partial v = \frac{\partial z . \text{coſ.}\, RM . \text{ſin.}\, M}{\text{ſin.}\, V}$; or on a, ſin. M : ſin. v : : ſin. ϕ : ſin. RM. Partant, ſin. $M = \frac{\text{ſin.}\, v \text{ ſin.}\, \phi}{\text{ſin.}\, RM}$, & $\partial v = \frac{\partial z . \phi . \text{ſin.}\, v . \text{cot.}\, RM}{\text{ſin.}\, V}$.

Si du point R on abaiſſe ſur CM l'arc perpendiculaire RF, on aura dans le triangle ſphérique rectangle CRF, $1 : \text{coſ.}\, v :: \text{tang.}\, \varphi : \text{cot.}\, CRF$. Partant, $\frac{\text{coſ.}\, CRF}{\text{ſin.}\, CRF} = \varphi \,.\, \text{coſ.}\, v$, φ étant toujours ſuppoſé très-petit; on a donc

$$1 - (\text{ſin.}\, CRF)^2 = \varphi^2 \,.\, \text{coſ.}\, v^2 \,.\, (\text{ſin.}\, CRF)^2,$$

ce qui donne $\text{ſin.}\, CRF = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 \,.\, \text{coſ.}\, v^2$. Soit $CRF = 90^d - \gamma$, on aura $\text{ſin.}\, CRF = 1 - \frac{\gamma\gamma}{2}$. Donc, $\gamma = \varphi \,.\, \text{coſ.}\, v$. Partant, $MRF = 90^d + \gamma - V$; or on a, $\text{coſ.}\, CRF : \text{coſ.}\, MRF :: \text{cot.}\, v : \text{cot.}\, RM$, ou, $\varphi \,.\, \text{coſ.}\, v : \text{ſin.}\, (V - \varphi\, \text{coſ.}\, v) :: \text{cot.}\, v : \text{cot.}\, RM$. Partant,

$$\text{cot.}\, RM = \frac{\text{cot.}\, v \,.\, \text{ſin.}\, (V - \varphi\, \text{coſ.}\, v)}{\varphi\, \text{coſ.}\, v},$$

Donc,

$$\partial v = \frac{\partial z \,.\, \text{ſin.}\, (V - \varphi\, \text{coſ.}\, v)}{\text{ſin.}\, V} = \partial z - \varphi \partial z \,.\, \text{coſ.}\, v \,.\, \text{cot.}\, V.$$

2.° Si l'on fait varier l'angle B, on a $\partial v = - \frac{\partial \varphi \,.\, \text{ſin.}\, v}{\text{tang.}\, V}$.

Donc,

$$\partial v = \partial z - \frac{(\varphi \partial z \,.\, \text{coſ.}\, v + \partial \varphi \,.\, \text{ſin.}\, v)}{\text{tang.}\, V}.$$

LXIII.

Je ſuppoſe que l'on veuille déterminer la poſition de l'équinoxe pour un inſtant donné; pour cela je le rapporte au plan fixe, en abaiſſant des points O & H les arcs OK' & HV perpendiculaires ſur AM. On aura très ſenſiblement $BK' = BO$, & $CH = CV$; mais ſi l'on fait $HR = \partial \chi$, $\partial \chi$ repréſentant le mouvement inſtantané des équinoxes produit par l'action du Soleil & de la Lune, on aura

$$VK' = VF - FK' = \partial \chi - \frac{(\varphi \partial z \,.\, \text{coſ.}\, v + \partial \varphi\, \text{ſin.}\, v)}{\text{tang.}\, V};$$

ce ſera le mouvement inſtantané en longitude du point de l'équinoxe rapporté au plan fixe.

La latitude du point de l'équinoxe sera, φ sin. v; on aura donc ainsi sa position dans l'espace; l'augmentation différentielle de l'obliquité de l'Écliptique sera

$$\partial V = \partial\alpha + \partial\varphi \cdot \text{cos.}\, v - \partial z \cdot \text{sin.}\, v \cdot \text{sin.}\, \varphi.$$

Pour avoir cette augmentation pour un temps quelconque, il faudroit intégrer les équations

$$\partial v = \partial\chi + \partial z - \frac{(\partial\varphi \,.\, \text{sin.}\, v + \varphi \partial z \,\text{cos.}\, v)}{\text{tang.}\, V},$$

$\partial V = \partial\alpha + \partial\varphi \cdot \text{cos.}\, v - \partial z \cdot \text{sin.}\, v \cdot \text{sin.}\, \varphi$; & si l'on vouloit remonter à des temps éloignés, comme le siècle d'Hipparque, il paroîtroit nécessaire de faire attention dans les expressions de φ & de z, aux inégalités proportionnelles au quarré du temps; ce calcul est très-facile, d'après ce que j'ai dit précédemment; mais comme les observations anciennes sont trop peu exactes pour y comparer les résultats du calcul, je me contenterai de déterminer la variation de l'obliquité de l'Écliptique qui a lieu pour ce siècle-ci.

Je puis m'en tenir alors à l'expression différentielle, sans recourir à l'intégration. Je suppose donc que ∂V représente la variation de l'obliquité de l'Écliptique depuis 1750 jusqu'en 1850; au commencement de 1750, on a cos. $v = 1$, sin. $v = 0$, de plus, $\partial\varphi = -0'',51120 . i$; & puisqu'il s'agit d'avoir $\partial\varphi$ durant l'espace d'un siècle, il faut faire $i = 100$, ce qui donne $\partial\varphi = -51'',120$. D'ailleurs, je ne ferai ici aucune attention à $\partial\alpha$, qui, comme l'on sait, ne renferme que des quantités périodiques; on aura donc ....
$\partial V = -51'',120$; c'est la diminution séculaire actuelle de l'obliquité de l'Écliptique.

Cette diminution est une suite nécessaire des attractions des Planètes, en admettant le mouvement annuel de l'apogée du Soleil, de $65''\frac{1}{2}$, par rapport aux équinoxes, ce qui paroît assez bien constaté par les observations. Si donc les observations célestes donnoient l'obliquité de l'Écliptique constante ou à peu-près constante, cela indiqueroit sûrement

Z 2

l'action de quelques causes étrangères; & pour expliquer cette constance, il faudroit recourir aux attractions des Comètes dont l'effet a pu détruire au moins en grande partie, celui des Planètes. En effet, les orbites des Comètes étant fort inclinées à l'Écliptique, il peut arriver que leur action, quoique passagère, fasse équilibre avec l'action permanente des Planètes. Mais une pareille supposition est trop peu vraisemblable pour l'admettre. On doit donc regarder la diminution de l'obliquité de l'Écliptique comme aussi certaine que tous les autres phénomènes célestes, puisqu'elle dépend de la même cause. Les observations anciennes & modernes paroissent même l'indiquer, quoiqu'elles soient encore insuffisantes pour fixer sa valeur. Cette découverte est ainsi réservée aux siècles à venir; mais comme il semble, par le peu de différence qui règne entre les résultats des Astronomes, que le véritable mouvement de l'apogée du Soleil sera plutôt connu par les observations, que la diminution de l'obliquité de l'Écliptique, les calculs précédens qui donnent l'un de ces phénomènes au moyen de l'autre, serviront à accélérer cette découverte.

LXIV.

*Addition à l'*article XLVIII.

J'ai dit, *article XLVIII,* que malgré l'incertitude qui paroît résulter des Recherches de M. de la Grange, sur l'Équation séculaire de la Lune, elle étoit cependant vraisemblable; ayant examiné depuis, avec plus d'attention, les calculs de cet illustre Géomètre, il m'a paru que loin d'être contraires à l'accélération du moyen mouvement de cet astre, ils lui sont favorables; c'est ce que je me propose de faire voir ici. Pour cela, je suppose que l'on ait sous les yeux l'excellente pièce de M. de la Grange, qui a remporté le Prix de l'Académie pour l'année 1774, & qui est imprimée dans ce Volume. J'en extrais la Table suivante. *(Page 56 de cette Pièce.)*

DATE des ÉCLIPSES observées.	ERREURS des Tables DE MAYER avec l'équat. féculaire.	ERREURS des Tables DE MAYER fans l'équat. féculaire.
720 avant J. C.	− 24′ 55″	− 23′ 30″
382.	− 26.	− 11. 30.
200.	− 17.	− 1. 15.
364 après J. C.	− 12. 40.	+ 12. 12.
977.	− 1. 22.	+ 20. 42.
978.	+ 0. 18.	+ 16. 35.

J'obſerverai relativement à cette Table, 1.° que les Calculs où l'on a rejeté l'équation féculaire de M. Mayer, ont été faits en rétabliſſant le mouvement moyen féculaire de M. Caſſini, lequel eſt de 3′ 42″ moindre que celui de M. Mayer; 2.° que M. de la Grange, conformément à une remarque que M. de la Lande a faite dans ſon Mémoire ſur les équations ſeculaires (*Mémoires de l'Académie, année 1757*), fixe l'inſtant de l'Éclipſe de 720 avant J. C. 47 minutes plus tôt que M.^rs^ Caſſini & Mayer. Or, ces deux Aſtronomes s'étant appuyés ſur cette obſervation pour déterminer le moyen mouvement de la Lune, il paroît naturel de ſe ſervir 1.° du moyen mouvement féculaire que M. Caſſini auroit trouvé en faiſant uſage de la remarque de M. de la Lande; 2.° du mouvement & de l'équation féculaire que M. Mayer en auroit tirée. Or, M. de la Grange trouve que le moyen mouvement féculaire de la Lune de M. Mayer, en eſt augmenté de 25″, & l'équation féculaire de 3″ ½. D'ailleurs, le moyen mouvement féculaire de M. Caſſini, en doit être diminué de 58″. Il faudroit donc corriger d'après ces nouveaux

élémens, la Table de M. de la Grange; mais j'observe que rien n'oblige de supposer exactement nulle l'erreur de l'observation de l'année 720 avant J. C. J'ai donc préféré de n'augmenter le moyen mouvement de Mayer que de 15", en augmentant son équation séculaire de 3" ½, parce que bien qu'il en résulte une erreur pour l'observation de 720 avant J.C. cependant, celles de toutes les autres observations sont par-là beaucoup diminuées. Je dois observer encore que j'ai négligé les petites variations qui doivent résulter de ces changemens dans les équations de la Lune; sur cela *(voyez la Pièce de M. de la Grange, page 59).* Voici présentement la Table de cet illustre Géomètre corrigée.

DATE des ÉCLIPSES observées.	ERREURS des Tables DE MAYER avec l'équat. séculaire.	ERREURS des Tables DE MAYER sans l'équat. séculaire.
720 avant J. C.	+ 3′ 12″	0′ 0″
382.	− 5. 55.	+ 8. 38.
200.	− 0. 41.	+ 17. 7.
364 après J. C.	− 5. 36.	+ 25. 7.
997.	− 0. 7.	+ 27. 42.
978.	+ 1. 32.	+ 23. 35.

On voit ainsi, que les Tables de Mayer, en y faisant les corrections que nous venons d'indiquer, représentent avec l'équation séculaire, les anciennes observations aussi bien qu'il est possible, vu le peu d'exactitude de ces observations; tandis que sans l'équation séculaire, elles donnent des erreurs beaucoup au-dessus de celles que l'on peut supposer à ces mêmes observations. On pourroit, à la vérité, diminuer un

peu ces erreurs, en changeant le moyen mouvement de M. Caſſini ; mais quelque combinaiſon que l'on faſſe, on aura toujours une erreur de plus de 20′ ſur quelques-unes de ces Éclipſes.

D'ailleurs, ſuivant M. de la Grange *(page 56)*, ſi l'on veut calculer les éclipſes précédentes ſans l'équation ſéculaire, on doit rétabir le moyen mouvement de M. Caſſini ; ſi cela eſt, il faut pareillement l'adopter pour les Éclipſes modernes. Cependant, ce ſavant Auteur trouve *(page 60)* en comparant aux Tables de Mayer quelques Éclipſes obſervées dans les quatorzième & quinzième ſiècles, que le moyen mouvement paroît bien établi par Mayer ; & il propoſe en conſéquence de le conſerver en ſupprimant l'équation ſéculaire ; or ſi l'on calcule dans cette ſuppoſition, les Éclipſes anciennes de la Table précédente, on trouvera des erreurs énormes. Il paroît donc impoſſible de faire quadrer avec un moyen mouvement conſtant, les obſervations anciennes & modernes ; & partant il ſemble néceſſaire d'admettre une équation ſéculaire à très-peu-près proportionnelle au quarré du temps.



DEUXIÈME

Fig. 1.

B C H K F V L A M b G S T a

Fig. 2.

N O p q S M G

Fig. 4.

L M S V K' F A B C D K O H R Z X N

Fig. 3.

S C p' p

Elth Haussard Sculp.

DEUXIÈME MÉMOIRE, POUR SERVIR À L'HISTOIRE ANATOMIQUE DES POISSONS.

Par M. VICQ-D'AZIR.

NOUS avons divisé les Poissons en cartilagineux, en Poissons ronds & longs, ou anguilliformes & en épineux. Déjà nous avons parcouru le premier ordre dans un premier Mémoire: il nous reste maintenant à faire quelques Observations sur le second & sur le troisième: pour suivre la méthode la plus naturelle, nous devons commencer par les individus, dont l'organisation approche le plus de celle de l'homme, des quadrupèdes & des oiseaux. Les Poissons anguilliformes seront, par cette raison, ceux dont nous developperons en premier lieu, la structure *(a)*.

(a) Lorsque des circonstances particulières me mirent à portée de commencer ce travail, je fus embarrassé sur le choix des moyens. Je savois que la méthode est ce dont les Sciences ont le plus de besoin, & que c'est à son défaut que l'on doit attribuer tant de veilles inutiles. Ces réflexions augmentèrent singulièrement mon incertitude, & je restai long-temps indécis sans savoir par où je devois commencer. Quelque parti que je prisse, il étoit indispensable de lire avec attention, tout ce que l'on a écrit sur l'anatomie des poissons. Je commençai donc par faire l'extrait de ces différens ouvrages; & si on en excepte les observations de M.[rs] Duverney & de la Hire, qui ne sont point encore imprimées, & le Mémoire de M. Camper, sur l'ouïe des Poissons, qui devoit alors faire partie du VI.[e] volume des Savans étrangers, il n'y en a peut-être aucun que je n'aie consulté dans ce temps. Je crus même apercevoir un défaut de méthode en les parcourant. Aucun, en effet, n'a fixé ses idées avant de prendre le scalpel; il semble qu'ils ne se soient proposé aucun but, & qu'ils n'aient formé aucun plan. Presque toutes leurs descriptions sont telles, qu'elles ne sont point susceptibles d'une mesure commune, & qu'on ne peut les comparer ensemble. Cette faute une fois aperçue, je devois l'éviter. Avant donc de me livrer aux détails minutieux que la structure délicate de

ORDRE SECOND.

Poissons longs & ronds, ou anguilliformes.

Nous considérerons dans cet ordre comme dans le précédent, les os, les muscles & les viscères.

Squelette des poissons anguilliformes.

Le squelette des poissons longs & ronds, est composé de la tête, de l'épine & des côtes.

---

quelques organes exige, il falloit prendre une idée générale & précise de l'Anatomie des poissons. J'ai, pour cet effet, cherché dans leur économie, des rapports & des différences suffisantes pour établir des divisions, afin que chaque description que je ferai dans la suite, trouve facilement sa place, & que chaque fait devienne utile. Tel est le plan que j'ai formé & d'après lequel, dans ces deux premiers Mémoires, j'ai dû plutôt ébaucher l'histoire générale & anatomique des poissons, que faire une description suivie des genres, des espèces & des organes qui leur sont propres. Il étoit donc inutile que j'insistasse sur les descriptions très-détaillées que plusieurs Anatomistes ont faites de quelques-uns de leurs viscères. Les travaux *de Willis, de Stenon, de Ray, de Klein, de Willulgby, de Swammerdam, de Duverney, de Collins, de Petit, de M. Geoffroy, de M. de Haller*, & tout nouvellement, *de M. Duhamel*, sont donc autant de connoissances acquises, sur lesquelles on ne doit revenir que lorsque l'on y découvrira quelques fautes, ou lorsque nous serons assez avancés pour entreprendre une histoire complète des poissons. Cet Ouvrage qui sera celui de nos Neveux, est sans doute d'une assez grande importance, pour mériter, dès-à-présent, tout le zèle des Physiciens; & je me propose de faire, pour y contribuer, tous les efforts dont je suis capable. Mais on doit sur-tout beaucoup attendre de M. Camper, dont je connois depuis peu l'excellent Mémoire. Cet Anatomiste célèbre a développé la structure de l'organe de l'ouïe & du cerveau des cartilagineux plats, & de quelques poissons épineux arrondis. Les cartilagineux longs & ronds sont, dit-il, trop précieux en Hollande, pour qu'on les emploie à la dissection. Il ne dit rien non plus des anguilliformes, ni des épineux plats que je décris assez au long. Depuis que M.rs les Secrétaires ont bien voulu me communiquer sa dissertation, & M. Tenon, ses dessins, j'ai été curieux d'admirer dans le brochet & dans la raye, la structure du cerveau & de l'organe de l'ouïe, telle que l'auteur l'expose; je ferai, à ce sujet, quelques remarques dans la suite de ce Mémoire. Je dois encore observer que, me trouvant dans une ville de province, où il n'y avoit aucun Artiste capable de me seconder dans mon travail, j'ai été obligé de faire moi-même la plupart de mes dessins; ce qui fait que je les regarde moins comme ayant le mérite de l'exactitude, que comme propres à faciliter l'intelligence des descriptions.

1.° La tête peut être divisée en crâne & en mâchoire. Le crâne n'est formé que d'une seule pièce: en dessus il est surmonté par une crête légèrement exprimée; le dessous est convexe & devient plus étroit, en arrière, auprès de la première vertèbre; antérieurement il s'élargit & s'articule avec un os aplati, creusé en gouttière, & qui tient la place du vomer. L'intérieur du crâne est triangulaire, plus étroit en devant, & ressemble d'ailleurs assez à celui des cartilagineux; il faut seulement observer que la fosse pituitaire est plus petite, & les fosses cérébrales plus excavées. De plus, on trouve dans ces fosses les deux osselets dont M. Camper a déterminé la véritable situation dans les épineux, & que Klein regardoit comme appartenant à l'organe de l'ouïe. Sur les côtés du crâne, on remarque deux os plats, situés obliquement en forme d'ailes, qui se terminent par un prolongement uniforme entre les branches de la mâchoire supérieure, & semblent lui tenir lieu de pommette. *Voyez pl. I, fig. 1.*

La mâchoire supérieure est formée de trois pièces; l'une est moyenne, creusée longitudinalement pour le passage des nerfs de la première paire, & remarquable par deux cavités de chaque côté, dont la première est antérieure & nasale, & la seconde est postérieure & orbitaire: les deux autres pièces sont situées sur le côté, elles se portent obliquement vers les branches de la mâchoire inférieure, & sont unies avec elle par le moyen d'un ligament dans la commissure.

La mâchoire inférieure est, comme la supérieure, terminée en pointe, creusée intérieurement par un conduit, armée de petites dents pyramidales très-acérées, & articulée par le moyen d'un petit condile court & aplati avec les côtés de la base du crâne. Il faut observer de plus, que dans l'angle que font entr'elles les deux mâchoires, il se trouve un petit os long & arrondi qui est placé obliquement, qui remonte en arrière sur les côtés du crâne, où il soutient les mâchoires dans leur action. *Voyez pl. I, fig. 1.*

L'os hyoïde est semi-circulaire & assez large; il soutient dans son milieu la base de la langue, & s'articule postérieurement

rement au-dessous de cet os qui est placé en forme d'aîles sur les côtés de la base du crâne. Les opercules sont dans ces Poissons, formés par de petits os arrondis, figurés comme une petite côte, élargis à leur extrémité, & articulés avec l'os hyoïde dont ils paroissent être un épanouissement. *Voyez pl. I, fig. 2.*

Les os de l'épine ressemblent à ceux des reptiles ; les côtes sont légèrement recourbées, pointues en devant, rangées des deux côtés de l'abdomen, & articulées avec le corps de chaque vertèbre : cette conformation est la même dans la vipère.

Ces observations nous font voir combien est grande l'analogie de la tête des Poissons anguilliformes, avec celle des oiseaux dont les mâchoires sont disposées presque de la même façon ; les petites côtes des opercules ressemblent assez bien aux extrémités postérieures & recourbées de l'os hyoïde des oiseaux, qui, à la vérité, est beaucoup plus simple. D'un autre côté, si on lit la description de la vipère, faite par Charas, & qu'on la compare avec la description que nous venons de faire du squelette des anguilliformes, on y trouvera des rapports encore plus marqués ; ce que l'on n'observe point dans les épineux.

Muscles des Poissons anguilliformes.

Les muscles des poissons anguilliformes sont moins nombreux que ceux des cartilagineux, & ils le sont plus que ceux des poissons épineux : ils n'ont été décrits par aucun Anatomiste ; les plus remarquables sont 1.° deux muscles placés entre les branches de la mâchoire inférieure, & qui répondent au milo-hyoïdien ; ils vont à la base de la langue qu'ils relèvent en la portant en devant. 2.° Deux très-gros crotaphites qui font une bosse sur les côtés du crâne, ils s'insèrent à l'arcade zygomatique, & sont composés d'un nombre prodigieux de faisceaux bien distincts ; l'angle de la mâchoire qu'ils relèvent fortement, en est recouvert : dans

les oiſeaux, la ſtructure eſt la même, avec cette ſeule différence que leur crotaphite n'eſt pas auſſi exprimé. 3.° Un gros muſcle placé ſur chaque branche de l'os hyoïde, ce muſcle s'insère au crâne; il relève la langue & la tend avec beaucoup de force. 4.° Pluſieurs petits muſcles qui vont d'un cercle des ouïes à l'autre, & qui peuvent les rapprocher. 5.° Les muſcles abdominaux qui s'étendent depuis l'anus juſques à la partie moyenne de l'os hyoïde, & qui, en ſe contractant, ouvrent les angles des ouïes, tirent la langue en arrière, & compriment les viſcères: ces muſcles ſont ſéparés par un raphé. 6.° Trois autres couches muſculeuſes placées auprès de l'épine, dont une qui eſt la plus voiſine, peut s'appeler *ſpinale*, la ſeconde portera le nom de *moyenne*, & celui de *latérale* ſera réſervé pour la troiſième. Cette dernière touche dans une grande étendue les muſcles abdominaux, au-deſſous deſquels celle du côté gauche ſe réunit à celle du côté droit, & n'en eſt ſéparée que par une ligne blanche juſqu'à l'extrémité de la queue. La coupe perpendiculaire des muſcles latéraux préſente des ovales concentriques, entre leſquels ſupérieurement ſont placées les couches ſpinales & moyennes. Cette conformation eſt à peu-près la même dans les reptiles, & les muſcles de la tête reſſemblent à ceux des oiſeaux. *Voyez les fig. 4 & 7, pl. I.*

Viſcères des Poiſſons anguilliformes.

1.° Le cerveau eſt étroit & alongé; on y diſtingue deux faces, l'une ſupérieure & l'autre inférieure: la face ſupérieure eſt remarquable par ſix lobes, dont deux ſont impairs & les deux autres pairs; le lobe antérieur eſt ovale, fort mince & ſéparé en deux par un raphé longitudinal, il donne naiſſance aux nerfs de la première paire, qui ſe portent l'un à côté de l'autre dans le canal de la mâchoire ſupérieure, juſques aux trous des narines: ces nerfs ſont pulpeux, plus alongés & moins gros que dans les cartilagineux; les quatre lobes moyens ſont pairs, & irrégulièrement quadrangulaires; le lobe poſtérieur eſt arrondi, détaché de la moelle épinière,

& tient lieu de cervelet ; la face inférieure, outre les lobes que j'ai déjà décrits, en présente un impair, situé dans le milieu qui est le plus profond de tous, & placé au-dessus des osselets de l'ouïe ; tout-à-fait en arrière, & au-dessous du cervelet, se trouve la moelle alongée & une espèce de pont de varole ; les nerfs optiques naissent de la partie antérieure des lobes pairs & postérieurs qui sont de vraies couches optiques : ces nerfs se rapprochent & se distribuent ensuite à l'œil après avoir passé sous la première paire, deux rameaux nerveux prennent aussi naissance de ces mêmes lobes, & se distribuent aux accessoires de l'œil ; quatre autres nerfs naissent de chaque côté de la moelle alongée, au-dessous du cervelet ; deux sont antérieurs & vont au palais, à l'œsophage, aux ouïes & au cœur : deux sont postérieurs & moins gros que les premiers, ils se réunissent & passent par un trou à côté de la première vertèbre, pour se distribuer aux couches musculeuses & à la peau.

En écartant les deux lobes pairs & postérieurs, on aperçoit un ventricule étroit & très-alongé ; qui s'étend au-dessous du cervelet ; les éminences qui dans l'homme soutiennent la glande pinéale, sont à peine sensibles, & cette dernière m'a paru manquer absolument ; l'entonnoir y est au contraire très-exprimé. M. Camper qui n'a point décrit le cerveau des anguilliformes, a aussi rencontré *l'infundibulum* dans celui des épineux, & l'on ne sauroit douter que les usages de cette partie ne soient très-importans, puisqu'on la retrouve dans presque toute l'étendue du règne animal.

Des deux côtés de la moelle alongée, & au-dessus des osselets du crâne, on observe trois canaux demi-circulaires aqueux, renfermés dans une membrane qui se termine à une petite éminence figurée comme une tête : cet appareil est à peu-près semblable à celui des cartilagineux, avec cette différence que ces derniers ont l'organe de l'ouïe renfermée dans une cellule osseuse derrière l'orbite. Je ne doute pas qu'en suivant cette dissection avec plus de soin, l'on n'y retrouve la bourse élastique que M. Camper a observée

dans les épineux : c'eſt ce que je me propoſe d'examiner dans la ſuite de mes travaux.

2.° La poitrine de ces poiſſons eſt beaucoup plus étroite que celle des cartilagineux, elle eſt également triangulaire, & placée entre les branches des ouïes ; après l'avoir ouverte on remarque une veſſie qui paroît flaſque & oblongue, c'eſt le péricarde. Il faut ſe rappeler que les cartilagineux n'en ont point; ce qui met entr'eux & les anguilliformes une très-grande différence : l'inciſion de cette veſſie permet au fluide qui la remplit de s'échapper, & laiſſe apercevoir le cœur. Sa forme & ſes appartenances ſont encore bien différentes de ce qu'elles ſont dans les cartilagineux ; 1.° le cœur eſt triangulaire, mais de telle ſorte que ſon grand bord eſt à gauche, & qu'en haut & en bas la pointe eſt fort mouſſe. Dans quelques eſpèces d'anguilles, il reſſemble à un loſange alongé & recourbé ſur les côtés avec une ligne ſaillante au milieu, & une baſe taillée obliquement de haut en bas, & de devant en arrière ; 2.° l'artère qui ſort de la pointe ſupérieure de cet organe eſt remarquable par un renflement en larmes de Job, dont la baſe touche la pointe du cœur : ce renflement charnu ſemble être un cœur ſecondaire, deſtiné à augmenter la force du fluide qui circule. Il faut ſe ſouvenir que dans les cartilagineux, cette appendice n'eſt qu'un renflement cylindrique qui imite la figure de l'artère ; 3.° vers la gauche & plus bas, on trouve un ſinus ou golfe veineux très-conſidérable, irrégulièrement cubique, & dont la figure varie d'ailleurs relativement à ſon degré de plénitude : le ſang qui le remplit eſt toujours noir & caillé; ce qui eſt bien différent dans les cartilagineux dont le ſang eſt toujours très-rouge & très-fluide, & chez leſquels la figure de l'oreillette eſt bulleuſe & cordiforme. *Voyez les fig. 5 & 6, planche I.*

3.° Le bas-ventre renferme le foie, la véſicule du fiel, l'eſtomac, les inteſtins, la rate, la veſſie aërienne & les rubans ou cordons ſexuels; le foie n'eſt guère diviſible en pluſieurs lobes, il eſt moins étendu ſur les côtés que dans les cartilagineux; les vaiſſeaux adhèrent peu à ſon parenchime,

& font très-faciles à fuivre dans leurs ramifications; le conduit hépatique fe porte vers l'inteftin, & le perce obliquement au-deffous du pilore; la véficule du fiel eft arrondie & détachée du foie, ce qui établit une nouvelle analogie entre ces Poiffons & les reptiles; elle renferme une liqueur femblable à l'huile d'olive, & le conduit ciftique fe porte jufque dans l'épaiffeur des membranes, avant de fe confondre avec l'hépatique *(b)*. Dans les cartilagineux, ils s'uniffent plus tôt enfemble; le foie eft divifé en plufieurs lobes, & la véficule du fiel eft logée dans la fubftance même de ce vifcère. La rate, dans les anguilliformes, eft petite, arrondie & placée à l'oppofite de la véficule du fiel, dans la courbure que fait l'inteftin en s'abouchant avec l'eftomac. Ce dernier eft fitué perpendiculairement; fon ouverture fupérieure eft très-large: inférieurement il s'arrondit, & occupe en longueur le tiers fupérieur de l'abdomen; l'inteftin naît près de l'orifice fupérieur, & laiffe une portion confidérable de l'eftomac au-deffous de fon embouchure, qui forme une efpèce de *cæcum*. Le congre nous fournit un exemple de cette conformation; dans les anguilles on obferve quelques différences, leur eftomac eft également perpendiculaire, mais il eft arrondi en haut comme en bas; & l'œfophage, en s'ouvrant dans la cavité, en laiffe une portion au-deffus, comme l'inteftin en laiffe une au-deffous; ce dernier eft ouvert plus haut que l'œfophage: le pilore eft dur & étroit, mais fans appendice; l'inteftin s'élargit au-deffous, & paroît comme ondé le long de la veffie aërienne; enfin, il fe porte perpendiculairement vers l'anus. Nous avons à peu-près rencontré la même ftructure dans les cartilagineux plats, avec cette différence que leur eftomac a une grande & une petite courbure comme celui des quadrupèdes. *Voyez la planche I, figures 8 & 10.*

Les poiffons anguilliformes ont une veffie aërienne double,

(b) Je ne fuis pas encore pleinement convaincu qu'il s'y confonde; même il me refte là-deffus des doutes que je me propofe de lever le plus tôt qu'il me fera poffible.

avec

avec des glandes dans l'endroit où les deux vessies se joignent, & un conduit qui s'ouvre d'un côté vers le haut de l'estomac, & qui de l'autre se glisse entre les membranes de la vessie aërienne antérieure, qui lui servent comme de valvules: cet organe qui se rencontre simple dans un grand nombre de Poissons épineux, a été décrit très-soigneusement par plusieurs Naturalistes, entr'autres par Needham; il n'y a rien à ajouter à ce qu'il a dit de sa forme, de sa situation & de sa structure; mais nous ne croyons pas que l'idée qu'il donne de son mécanisme soit également heureuse. Cet Auteur, après avoir discuté les différentes opinions des Physiciens, établit que l'air se sépare du sang, & passe sous la forme de vapeurs dans la vessie natatoire, il ajoute que cet air passe ensuite de la vessie dans l'estomac, pour y réveiller la fermentation & accélérer la digestion des alimens. Ce sentiment adopté par un grand nombre de Physiciens, peut être combattu par les raisons suivantes; 1.° les membranes ligamenteuses qui forment la vessie aërienne, ne sont nullement disposées de manière à faire une secrétion de quelque nature qu'elle puisse être, si ce n'est peut-être celle de quelques vapeurs aqueuses; 2.° quand on supposeroit la secrétion possible, l'air ne pourroit refluer dans l'estomac, puisque les membranes entre lesquelles le conduit est logé, s'y opposent absolument, de la même manière que la bile ne peut refluer par son conduit, lorsqu'elle a été versée dans l'intestin; on peut même appeler l'expérience à l'appui de nos réflexions. En effet, il est impossible de faire refluer le fluide contenu dans la vessie aërienne par aucun conduit, quelque pression que l'on exerce. Il est donc probable qu'il ne se fait aucune secrétion dans cet organe, & il est bien démontré qu'il ne passe aucun fluide de la vessie aërienne dans les voies alimentaires. Comment donc se remplit-elle? il faut se rappeler que son conduit s'ouvre à la partie supérieure de l'estomac dans presque tous les Poissons, excepté l'*alose* dans laquelle Needham l'a vu s'ouvrir au fond du ventricule. On observera de plus que les Poissons sont très-voraces, que la plupart vivent de crustacées, ou d'autres Poissons; que

les corps marins contiennent beaucoup d'air; que cet air ſe dégage dans la digeſtion, qu'il dilate l'eſtomac, qu'il doit s'étendre ſur-tout en haut & en devant où il trouve moins de réſiſtance; & qu'en ſuppoſant le poiſſon plongé dans l'eau, cet air rencontre de nouveaux obſtacles dans ce fluide, qui s'oppoſe à ſa ſortie, & qui, lorſqu'il cède à la preſſion, le laiſſe échapper ſous la forme de bulles. Ne ſeroit-il pas poſſible que cet air chargé des vapeurs alimentaires les plus ſubtiles, entrât dans la veſſie natatoire par le conduit qui s'ouvre au haut de l'eſtomac? & ne pourroit-on pas croire que cet air combiné avec des parties aqueuſes, eſt abſorbé & paſſe dans le ſyſtème vaſculaire du Poiſſon, de la même manière que l'air dégagé des alimens & combiné de nouveau dans l'inteſtin, eſt abſorbé par les pores lactés, & circule dans les vaiſſeaux chyleux? Suivant ces vues, la veſſie natatoire ne ſeroit qu'un eſtomac ſecondaire deſtiné à recevoir les vapeurs les plus ſubtiles des alimens, à les tranſmettre dans l'organe cellulaire par le moyen des pores abſorbans, & à ſoutenir en même temps le Poiſſon dans le milieu qu'il habite. Geſner n'étoit donc pas ſi loin de la vérité, lorſqu'il comparoit les Poiſſons qui ont une veſſie natatoire aux animaux ruminans. Il ſuit de-là que l'air renfermé dans cette veſſie n'eſt point inné comme l'a cru Severinus: il eſt d'ailleurs facile de prouver que cet air n'eſt point pur & dégagé de parties groſſières; en briſant une de ces veſſies dans le vide pneumatique; on s'aperçoit alors qu'un certain volume d'air eſt reſtitué, & les coups de piſton que l'on donne enſuite, font précipiter quelques parties nébuleuſes; d'ailleurs, il eſt clair qu'il n'eſt pas beſoin de glandes pour faire la ſecrétion de cet air, comme Needham ſemble le deſirer, puiſque ſon dégagement peut être l'ouvrage de la digeſtion *(c)*.

(c) Le Lecteur doit être prévenu que cette expoſition eſt contraire au ſentiment adopté par M. Petit dans les Mémoires de l'Académie. Cet Anatomiſte dit avoir vu des valvules capables d'empêcher un fluide de paſſer de l'eſtomac dans la veſſie natatoire. Je crois avoir aperçu dans un grand nombre de diſſections que M. Petit a pris pour des valvules, des

Des deux côtés du boyau & de la vessie aërienne sont deux organes figurés comme un ruban plissé, qui s'étendent depuis le foie jusqu'à l'anus, & qui, lorsqu'on les coupe, offrent une cavité ; en devant ils se terminent par une tête arrondie; en arrière ils s'ouvrent dans le cloaque : j'ajouterai seulement que j'ai trouvé quelques œufs nichés dans l'extrémité supérieure de l'ovaire d'un *congre* où ils étoient enchaînés les uns avec les autres par une espèce de fil rougeâtre, dont les divisions observées à la loupe ressembloient au chevelu d'une racine, & s'épanouissoient dans l'intérieur de chaque œuf; ces observations sont les seules que l'on puisse faire hors le temps de la fécondation. C'est ce défaut de développement qui a fait croire à Aristote qu'il n'y avoit point de sexe différent dans les anguilliformes: cette opinion a été long-temps celle de tous les Naturalistes, & ce n'est que depuis peu que Rédi & Vallisnieri nous ont désabusés en décrivant les parties sexuelles de l'anguille. *Voyez pl. I, fig. 11 & 12.*

L'anus est placé de sorte que la cavité abdominale est prolongée plus loin, & forme un espace conique assez considérable: cette arrière-cavité est remplie par une glande noirâtre qu'une membrane épaisse recouvre; cette glande, si on la déchire, laisse suinter un fluide qui a la saveur de l'urine, & l'on ne sauroit douter qu'elle ne fasse la fonction de reins; antérieurement cet organe a deux prolongemens qui sont placés des deux côtés de l'épine, & l'on y trouve des conduits qui s'ouvrent dans le cloaque. *Voyez pl. I, fig. 11.*

Tous ces viscères sont recouverts par un péritoine dont la couleur est dans les uns noirâtre, dans les autres argentée: la portion des reins qui est voisine des prolongemens antérieurs, y adhère très-fortement. De plus, on trouve dans l'abdomen de ces Poissons un tissu cellulaire lâche, qui, presque

membranes flasques, qui cessent de l'être pendant la digestion ; au reste, je me propose de faire sur cet objet, de nouvelles recherches. J'exhorte les Naturalistes à en faire de leur côté, afin de confirmer ou de détruire l'explication que je fais aujourd'hui des usages & de la circulation de l'air dans l'estomac & dans la vessie natatoire des poissons.

toujours, eſt gorgé de graiſſe & tient lieu d'épiploon; cette remarque convient auſſi à la plupart des épineux.

Il eſt eſſentiel d'obſerver que ces deſcriptions ne doivent être entendues que des Poiſſons longs, & dont la forme approche le plus de la ronde; on ſait quelle différence il y a entre les anguilliformes & les cartilagineux longs qui ſont plus ou moins aplatis; les autres Poiſſons longs & à pans n'offrent pas non plus la même ſtructure: les aiguilles de mer, par exemple, qui ſont recouvertes d'une peau analogue à celle des ſerpens, n'ont pas l'eſtomac diſtinct du boyau; elles ont le cœur pyramidal, leurs œufs & leurs parties ſexuelles ſont faciles à démontrer; mais, outre ces obſervations qui ont été déjà faites par Olaüs Borrichius, nous avons trouvé dans l'eſpèce d'aiguille que Rondelet appelle *acus ariſtotelis ſive ſecunda ſpecies*, un petit boyau alongé plein de fluide & placé entre ſes cordons ſexuels; quand on comprimoit cette veſſie, le fluide ſortoit par l'anus, & l'on ne peut douter que ce ne fût de l'urine, d'autant plus que cet organe étoit placé dans le voiſinage des reins. Nous ajouterons que ce poiſſon eſt vivipare, & que ſes petits ſe rangent & ſe placent les uns ſur les autres derrière l'anus, entre deux feuillets qui bordent la partie poſtérieure du corps juſqu'à l'extrémité de la queue. Ces réflexions font voir les différences qu'apporte le changement de figure dans les Poiſſons alongés, & prouvent en même temps l'exactitude de notre diviſion.

Les Poiſſons anguilliformes que j'ai diſſéqués, ſont le congre, l'anguille, l'eſpèce appelée *pinpernau* ou anguille de mer, & un ſerpent marin dont la forme approche du *myrus* de Rondelet. L'anguille eſt la ſeule que l'on ait diſſéquée; & ceux qui en ont donné la deſcription ſe ſont arrêtés à diſcourir ſur la forme des ouïes, ſur les phénomènes très-obſcurs de la génération, & n'ont parlé que de quelques viſcères. Il ſuffira pour s'en convaincre de jeter les yeux ſur ce qu'en ont dit Valliſnieri, Sancaſſanus, Paullini, Rédi & quelques autres Naturaliſtes; ce que j'obſerve afin de juſtifier les motifs de mon travail.

ORDRE TROISIEME.

Poiſſons épineux.

Les Poiſſons épineux portent ce nom à raiſon de la dureté de leurs os, & des piquans dont ils ſont ſurmontés en pluſieurs endroits. Parmi les Poiſſons auxquels ces caractères ſont communs, on en trouve qui ſont arrondis & d'autres qui ſont aplatis, connus par les Latins ſous le nom de *plani;* ces différences nous fourniſſent une diviſion naturelle & très-anatomique, dont nous parcourrons ſucceſſivement les deux branches.

Poiſſons épineux arrondis.

Les Poiſſons épineux arrondis ſont ceux de tous ſur leſquels il nous reſte le moins d'obſervations à faire; M. Gouan les ayant diſſéqués & décrits avec beaucoup de ſoin dans ſon Ičtyologie. Nous nous permettrons cependant quelques additions, ſoit pour ſuppléer à ce que cet Auteur célèbre peut avoir oublié, ſoit pour relever quelques fautes légères s'il s'en eſt gliſſé dans ſon Ouvrage.

M. Gouan a très-bien décrit le ſquelette; il a ſeulement oublié le vomer qui, dans pluſieurs individus, dans le brochet, par exemple, eſt très-remarquable; c'eſt un os placé au milieu du palais, creuſé par une gouttière ſupérieurement, aplati inférieurement, & qui s'articule avec la baſe du crâne & avec la mâchoire ſupérieure. On pourroit encore faire quelques obſervations relatives à la nomenclature; il donne le nom d'os du palais à des tubercules oſſeux qui font la fonction de dents, & qui ſont placés auprès de l'inſertion des ouïes; ce nom ne leur convient point, puiſqu'ils n'ont aucune analogie avec ceux qui s'appellent ainſi dans l'homme & dans les quadrupèdes; les noms de clavicules & d'omoplatte ne conviennent pas mieux à des os qui terminent poſtérieurement l'ouverture bronchiale, & qui n'en ont abſolument aucun uſage: celui de baſſin doit être également banni, puiſque l'anus de ces Poiſſons & leurs parties naturelles en ſont, dans

la plupart, très-éloignés. En un mot, ne doit-on pas regarder comme une règle constante & inviolable, qu'en Anatomie comparée, il ne faut se servir des noms reçus, que pour exprimer des ressemblances, des analogies ou des usages communs ?

Nous n'avons rien à ajouter à ce que M. Gouan a dit des muscles; nous ferons seulement quelques observations sur les viscères.

Le cerveau est composé de sept ou au moins de cinq lobes, parmi lesquels trois ou deux sont pairs, & un impair; les deux lobes antérieurs sont peu profonds, & recouvrent les nerfs optiques: les lobes moyens, quand ils existent, sont très-petits, & cependant très-distincts; les lobes postérieurs sont les plus volumineux de tous, & donnent naissance aux nerfs optiques, aux petits oculaires & à ceux qui se distribuent aux ouïes & au cœur. Les nerfs de la première paire naissent des lobes antérieurs *(d)*; mais une remarque curieuse, qu'il convient de faire, & qui n'a point échappé à quelques Physiciens, c'est que dans plusieurs épineux, les nerfs optiques se croisent sans mélange de substance, *voy. pl. V, fig. 9*. Dans quelques-uns cependant, comme dans une espèce appartenante au genre que Rondelet appelle *mullus*, les nerfs optiques sont disposés de sorte qu'ils sont l'un au-dessus de l'autre dans leur naissance, & qu'ils divergent en se portant vers les orbites *(e)*. Le lobe postérieur est impair & tout-à-fait détaché de la moelle alongée; en dessous on observe encore un petit lobe impair & placé dans le milieu: nous avons déja dit qu'il se trouvoit dans le crâne une excavation propre à le loger; ce lobe n'a point été décrit par les Anatomistes, à moins qu'il ne soit connu par quelques-uns sous le nom de *eminentiæ candicantes*: nom qui ne lui convient point, puisqu'à proprement parler, il n'y a qu'une seule éminence.

(d) On doit consulter Morgagni, *epist. anat. XVII*, dans laquelle il décrit l'organe de l'odorat de quelques Poissons.

(e) On trouvera des détails curieux & intéressans, dans une Dissertation de M. Haller, sur les yeux de quelques Poissons.

Pour résumer, le cerveau des épineux diffère de celui des anguilliformes, en ce que dans les épineux il est plus court, moins volumineux & plus arrondi, & que les lobes sont plus inégaux, moins développés & moins nombreux; la structure intérieure diffère moins que l'extérieure. En écartant les lobes principaux, on aperçoit une fente qui répond au troisième ventricule de l'homme; en devant on reconnoît de la manière la plus frappante, la commissure antérieure même dans le brochet; observation qui a échappé à M. Camper, & que M. Huller a faite dans la carpe; en arrière sont les tubercules quadrijumeaux que M. Camper a très-bien décrits: au-dessous du cervelet on trouve la continuation du ventricule, & une petite éminence annulaire; & vers le milieu de la face inférieure du cerveau on remarque la tige & la glande pituitaire.

Dans la base du crâne sont creusées deux petites fosses, qui ne sont séparées que par une crête peu épaisse & peu saillante; c'est dans chacune de ces fosses que sont placés un ou deux osselets dont Klein a connu le nombre & la position; sur les côtés se trouvent deux enfoncemens, dans lesquels sont logés trois conduits demi-circulaires aqueux, que Swammerdam & Duverney ont décrits, & quelquefois un troisième osselet: un mucus gélatineux & la pulpe d'un nerf, environnent les conduits & les osselets. M. Camper qui s'est occupé de cet objet avec beaucoup de succès, a décrit, de plus que les autres, la position respective de toutes ces parties, la bourse qu'il nomme élastique, l'ouverture des conduits & une partie figurée comme une petite raquette dans le brochet, & qu'il croit capable de rendre la bourse élastique dans certaines circonstances. Je l'ai examiné avec le plus grand soin; je n'ai pas observé qu'elle eût l'apparence aucunement musculeuse, & je crois qu'il est facile de démontrer que ce n'est autre chose qu'une bourse subalterne, continue avec la bourse élastique, également creuse & transparente, & qui n'en diffère qu'en ce qu'elle forme un petit cul-de-sac, & que ses parois sont plus épaisses. Les conduits aqueux des épineux ne m'ont

pas femblé faire des contours auffi réguliers que ceux des anguilliformes. J'ajouterai une obfervation relative à l'adminiftration anatomique. M. Camper, dans fes diffections du cerveau & de l'organe de l'ouïe, recommande de couper le crâne perpendiculairement dans le milieu, & fuivant la longueur du corps. Mais les petits offelets font placés dans des foffes fi voifines les unes des autres, qu'une pareille coupe les dérange néceffairement; & j'ai toujours mieux réuffi en enlevant avec des cifeaux la paroi fupérieure du crâne; par ce moyen l'on aperçoit les offelets de chaque côté en place, ainfi que le mucus gélatineux & les conduits demi-circulaires aqueux, fans qu'ils aient fouffert le moindre dérangement.

La poitrine eft à peu-près de la même grandeur que celle des anguilliformes; le cœur eft également enveloppé par un péricarde mince & adhérent à un diaphragme membraneux, mais la forme eft un peu différente. Dans la plupart des individus qui appartiennent à cet ordre, il reffemble à une pyramide à trois angles, dont la pointe feroit en devant, un des angles en deffus, & la bafe en arrière. Dans quelques-uns elle eft coupée obliquement comme dans le *fcomber* ou *maquereau*, & dans l'*éperlan;* dans quelques autres il s'éloigne de la figure pyramidale, & il approche de la cubique. Dans la morue, par exemple, il femble que la partie fupérieure de la pyramide ait été coupée. Dans quelques Poiffons épineux qui, fans avoir les deux yeux du même côté, font cependant très-aplatis, il offre encore une fingularité: c'eft qu'il eft prefque auffi blanc que fon appendice; ces variétés, au refte, furprendront moins fi l'on fe fouvient que les individus de cet ordre font plus nombreux que ceux du précédent; quelle que foit la forme du cœur, il eft prefque toujours furmonté par un appendice blanc & pyramidal, qui, dans quelques individus, eft irrégulièrement quadrangulaire, & toujours féparé du cœur par un étranglement. *Voyez pl. II, fig. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.*

L'eftomac fait dans la plupart un cul-de-fac, & reffemble plus à celui des cartilagineux plats qu'à tout autre. Dans quelques-uns

quelques-uns cependant comme dans l'éperlan & le poiſſon nommé vrac ou carpe de mer, il eſt peu diſtinct de l'inteſtin; les poiſſons très-aplatis, & qui cependant n'ont point les yeux binés *(binati)*, ont l'eſtomac globuleux. Dans le rouget & le ſurmulet il eſt en quelque ſorte triangulaire; dans le maquereau, l'inteſtin ſort de la partie ſupérieure de l'eſtomac à peu-près comme dans l'anguille; dans le poiſſon connu en Normandie ſous le nom de *talput*, il fait en bas une petite boſſe conique. M. Gouan dit que dans quelques Poiſſons il eſt en partie muſculeux, & en partie membraneux comme le géſier des oiſeaux. Je n'ai jamais rencontré cette variété; & ceux que j'ai vus reſſembloient plutôt à la poche ou premier eſtomac des oiſeaux, qu'à leur géſier.

L'inteſtin eſt dans tous les Poiſſons très-étroit auprès du pylore; dans quelques-uns tels que le colin ou lieu, & la morue, on obſerve un renflement du côté de l'eſtomac: la plupart ont la portion du conduit la plus étroite, entourée par un nombre quelquefois très-conſidérable d'appendices vermiculaires, qui s'ouvrent dans ſa cavité: on les trouve deſſinées dans Valentini; mais cette figure pèche en ce qu'elle ne préſente ces appendices que comme ſortant de la partie inférieure du pylore; quelques individus en ont un moindre nombre, & alors elles ſont plus groſſes comme dans le *cottus* de Rondelet, que les Normands appellent vulgairement crapaud de mer; d'autres n'en ont qu'un ou deux, comme l'éperlan. Le colin ou lieu, outre ſes appendices, a une eſpèce de cœcum plus gros & placé tout auprès; enfin, pluſieurs Poiſſons comme la carpe de mer ou vrac n'en ont point, & le pylore eſt moins étroit chez eux. Aucun Anatomiſte n'avoit donné l'hiſtoire de leurs variations: ces appendices logent des vers longs & aplatis qui étoient connus de Peyer *(f)*; on en trouve auſſi de répandus entre les inteſtins & le péritoine: Malpighy croyoit qu'il s'y filtroit un ferment; on les trouve ordinairement

(f) M. Duhamel a dernièrement fait deſſiner ces vers, ainſi que les appendices vermiformes, dans ſon Traité général des Pêches & Hiſtoire des Poiſſons.

remplis d'un chile blanc, & l'on n'a encore rien dit de vraiſemblable ſur leurs uſages, non plus que ſur ceux de l'appendice vermiforme du cœcum humain, qui a avec eux beaucoup d'analogie. *Voy. pl. II, fig. 8, 9, 10, 11, 12 & 13.*

La veſſie urinaire & les reins qui n'étoient point connus par Needham, ont été très-bien décrits par M. Gouan; nous ferons ſeulement quelques remarques ſur la conformation ſingulière de ces organes dans quelques Poiſſons. La veſſie urinaire de la gode eſt fortifiée ſupérieurement par un muſcle creux, & elle s'ouvre au-deſſus de l'anus par un conduit particulier. Dans le rouget, les reins forment en bas une tumeur ovale; plus haut ils ſe rétréciſſent, & ſe terminent par deux eſpèces de cornes qui ſont placées des deux côtés de l'épine *(pl. III, fig. 3)*; le même Poiſſon eſt remarquable par un viſcère ſingulier: au-devant des reins ſe trouve une poche charnue inférieurement, membraneuſe vers le haut, qui contient un fluide gélatineux, & de la partie ſupérieure de laquelle partent deux conduits qui ſe recourbent & vont aboutir à une petite glande creuſe *(pl. III, fig. 2)*; on trouve encore dans la vive deux petites veſſies auprès de l'anus, qui communiquent avec les reins, & au-deſſus deſquels ſont deux autres veſſies plus grandes qui ſe rapprochent par le bas, & qui appartiennent aux organes de la génération *(pl. III, fig. 6)*. Le cottus ou crapaud de mer a deux poches auprès du rectum, qui ſont remplies par une humeur glaireuſe: le ſurmulet en a auſſi deux; mais l'humeur qui les remplit n'eſt pas auſſi épaiſſe; enfin on remarque un grand nombre de variétés à cet égard, qui, ſi on y joint les différentes dimenſions de l'abdomen, la place qu'occupe l'anus, l'abſence ou la préſence de la veſſie aërienne, les appendices vermiformes plus ou moins nombreuſes, les circonvolutions des inteſtins, la figure de l'eſtomac, celle du cœur & la ſtructure des parties ſexuelles, ſont plus que ſuffiſantes pour ſervir de caractères anatomiques propres à faire des genres & des eſpèces, quand on ſera plus riche en deſcriptions.

Poiſſons épineux plats.

Les Poiſſons épineux plats, nommés *plani* par les Latins, ſont ceux par leſquels nous finirons nos obſervations. La raiſon qui nous a déterminés à ſuivre cet ordre, c'eſt que ces derniers ſont tellement diſpoſés, que la bizarrerie de leur forme, l'obliquité de leur marche, la poſition de leurs yeux, ſemblent les éloigner plus que tous les autres du modèle que nous regardons comme le mieux fini & comme parfait, qui eſt l'homme. Malgré ces différences, ils ont une très-grande analogie avec les Poiſſons épineux arrondis; leurs muſcles latéraux inter-épineux & natatoires ſont abſolument les mêmes, & nous avons ſeulement quelques remarques à faire ſur leur ſquelette & ſur leurs viſcères.

Le crâne eſt horizontal, quoiqu'il paroiſſe oblique; on y remarque deux cavités cérébrales plus profondes que dans les Poiſſons des ordres précédens, & qui contiennent les deux oſſelets dont nous avons déjà parlé pluſieurs fois; à la partie antérieure de la foſſe pituitaire ſont creuſés obliquement pluſieurs conduits qui s'étendent juſqu'aux yeux & aux narines; ſur les côtés du crâne on trouve quatre ou cinq pièces courbes & mobiles les unes ſur les autres: celles du côté des yeux ſont plus grandes, & toutes ſe réuniſſent vers les deux angles de la bouche; deux autres ſont recourbées & remontent en arrière; elles ſont principalement deſtinées à ſoutenir les mâchoires, & à faire la fonction des os de la pommette. La mâchoire ſupérieure eſt formée par deux portions de cercles placés l'un derrière l'autre, réunis vers les commiſſures, & qui, vers la partie ſupérieure & moyenne, ſont joints enſemble par deux pièces mobiles; ces deux ſegmens compoſent une double mâchoire qui s'alonge & ſe raccourcit à volonté: pareille ſtructure ſe trouve dans la plupart des épineux arrondis & dans quelques cartilagineux; la mâchoire inférieure n'a rien de remarquable, ſi ce n'eſt un double condile dont un s'articule avec les deux ſegmens réunis, dont nous venons de parler; & l'autre, avec l'os qui fait

fonction d'arcade zigomatique. *Voyez planche IV, figure 8.*

La poitrine eſt très-étroite & placée derrière un os recourbé, qui s'articule en arrière avec l'épine auprès des opercules; cet os fait en devant une ſaillie qui met le cœur à couvert, qui ſupplée au ſternum des animaux parfaits, & qui donne inſertion à deux nageoires entre leſquelles eſt l'anus. La colonne épinière fait un contour très-remarquable auquel répond une ligne extérieure, & qui rend la cavité abdominale plus grande; cette dernière eſt plus étroite dans ces Poiſſons que dans les ordres précédens: en devant elle eſt bornée par les ouïes & par l'os ſternal, en haut par l'épine, latéralement par les côtes, & en arrière par un os tranchant, ſemi-circulaire, articulé avec l'épine qui s'avance juſqu'à l'os ſternal, derrière lequel il fait une ſeconde ſaillie; cet os eſt particulier aux Poiſſons épineux plats. Nous avons auſſi trouvé deux os particuliers aux cartilagineux; le ſquelette varie donc à raiſon des conformations extérieures, & des grandes différences qui partagent en différens ordres les individus d'une même famille. *Voyez pl. IV, fig. 2.*

Les cerveaux vont toujours en diminuant, depuis les cartilagineux juſqu'aux épineux plats. La raie a deux maſſes cérébrales jointes enſemble par un étranglement; l'anguille a huit lobes; les Poiſſons épineux arrondis en ont un ou deux de moins que les anguilliformes, & les épineux plats ſont encore moins bien organiſés, ils ont en tout cinq lobes apparens en deſſus, dont deux ſont antérieurs & très-petits, deux ſont plus gros & donnent naiſſance aux nerfs de l'œil, & un eſt tout-à-fait poſtérieur, qui tient lieu de cervelet: la face inférieure préſente un lobe de plus, qui eſt arrondi, impair & placé dans le milieu. *Voyez pl. V, fig. 6 & 7.* Les nerfs optiques naiſſent l'un au-deſſus de l'autre, de ſorte cependant que l'un eſt plus antérieur, & tous les deux ſe portent du même côté *(voyez pl. V, fig, 10);* les oſſelets de l'ouïe y ſont peu conſidérables, & les conduits aqueux moins régulièrement contournés que dans les épineux arrondis. M. Camper n'a point décrit le cerveau ni l'organe de l'ouïe des

Poiſſons épineux plats; mais l'analogie lui a fait ſoupçonner la même conformation, & je me ſuis convaincu depuis peu par la diſſection d'une ſole, que l'appareil de cet organe ne diffère en rien dans ce Poiſſon de celui du brochet, ſi ce n'eſt que l'on n'y trouve point le troiſième oſſelet; je n'y ai point trouvé non plus la partie que M. Camper appelle du nom de *tenſor burſæ;* la ſtructure intérieure du cerveau eſt auſſi la même que celle que nous avons obſervée dans les épineux arrondis; ce qui fait voir combien eſt grande l'analogie qui exiſte entre ces deux familles de Poiſſons, que nous regardons comme appartenans au même ordre.

Le cœur eſt ſitué profondément, & enveloppé d'un péricarde mince; il a de même un appendice, & il varie dans quelques eſpèces; dans le barbue, par exemple, il eſt tronqué ſupérieurement, la baſe eſt oblique au plan du Poiſſon; dans la flondre il eſt irrégulièrement arrondi. *Voyez planche IV, fig. 1 & 3.* Le foie eſt compoſé d'un ſeul lobe très-aplati, au-deſſous eſt la véſicule du fiel qui, dans quelques-uns, reſſemble à une goutte d'huile iſolée; la tête eſt arrondie, & l'eſtomac, lorſqu'il eſt gonflé, eſt globuleux, ſes membranes ſont fort minces, & dans quelques eſpèces, comme dans le barbue, il eſt plus alongé avec deux appendices au pylore; plus communément cependant les Poiſſons épineux plats n'en ont point, l'inteſtin eſt ſoutenu par un petit méſentère, & fait au moins trois circonvolutions. *Voy. pl. IV, fig. 5.*

J'ai trouvé dans la plie une poche placée derrière l'anus, & remplie par un fluide aſſez conſiſtant, & qui communiquoit par un conduit très-court avec ſes reins. Dans les Poiſſons plats, ces organes ſont ſemi-circulaires, placés dans l'arrondiſſement de la cavité abdominale, & toujours derrière la poitrine; ſi on ſe rappelle que j'ai trouvé dans la veſſie de pluſieurs Poiſſons épineux & ronds, un fluide preſque gélatineux, on verra que l'urine des Poiſſons a en général plus de conſiſtance que celle des autres animaux; peut-être eſt-ce la grande quantité de leur huile qui eſt la cauſe de ce phénomène. *Voyez pl. IV, fig. 4.*

Des deux côtés de l'os courbe & tranchant qui termine l'abdomen en arrière, & des os interépineux qui s'étendent jusqu'à l'extrémité de la queue, sont deux prolongemens coniques qui communiquent avec la cavité abdominale, & dans lesquels sont logés les organes sexuels; ce sont deux sacs triangulaires dont les pointes sont prolongées; l'une s'insinue dans l'arrière-cavité, l'autre se porte en dessus & le long des reins, la troisième est dirigée vers le rectum; là les deux pointes ou angles antérieurs se réunissent en un conduit commun, qui s'ouvre dans le voisinage de l'anus: l'intérieur de ces organes est rempli dans les femelles par un nombre prodigieux de petits grains qui sont des œufs, & dans les mâles, par un amas de filets très-fins qui ne sont autre chose que des vaisseaux roulés les uns sur les autres; l'abdomen de ces Poissons, quoique fort étroit, renferme donc tous les viscères possibles, & ils sont tous très-faciles à démontrer, ce que l'on ne trouve pas ainsi dans l'abdomen des Poissons épineux & arrondis. *Voyez pl. IV, fig. 6 & 7.*

Les Poissons que j'ai disséqués sont parmi les épineux arrondis, la morue, le merlan, le maquereau, le rouget, le mulet, le surmulet, la vive, l'éperlan, le gougeon, le colin ou lieu, le poisson Saint-Pierre, la truite, la tanche, la carpe, le brochet, une espèce de turdus, ou grive de mer, la gode & le poisson nommé *talput;* & parmi les épineux plats, la limande, le turbot, la plie, la flondre & la sole; il faut ajouter la première espèce d'aiguille de Rondelet & le cottus, vulgairement appelé crapaud de mer.

Telle est la suite des faits les plus importans & les moins connus, que j'ai observés & qui m'ont été fournis par la dissection d'un nombre de Poissons assez grand pour décrire un objet quelconque avec précision; il faut commencer par établir des divisions méthodiques: pénétré de cette vérité, j'ai rangé sous différentes classes les individus dont j'avois à développer la structure. Les muscles & le squelette des cartilagineux, & celui des poissons plats, les viscères qui servent à la digestion, les reins, les cœurs & les cerveaux sont les

parties dont la forme & la position respectives sont exposées avec le plus de soin dans ces deux Mémoires. Il reste encore bien des choses à desirer sur les organes de la génération, sur l'Anatomie interne des viscères, & sur l'histoire des nerfs. Ces dernières Recherches me paroissent être sur-tout de la plus grande importance; peut-être sont-elles capables de jeter un grand jour sur les questions les plus obscures de la Philosophie; peut-être aussi les Métaphysiciens ne se sont-ils égarés dans la nuit des systèmes, que parce que les Anatomistes ne leur ont pas fourni un nombre suffisant de données, & parce qu'ils ont parlé de la sensibilité des brutes, sans en avoir auparavant étudié les organes: des circonstances plus favorables me mettront peut-être un jour à portée de suivre ce travail dont je connois l'importance & la difficulté. Tout le fruit que je me suis proposé de recueillir jusqu'ici, consiste à rassembler des caractères anatomiques, qui dans la suite puissent me servir à classer mes observations.

Caractères anatomiques des cartilagineux.

Crâne d'une seule pièce; mâchoire supérieure d'une ou de quatre pièces; mâchoire inférieure comme celle d'un enfant; deux grandes fosses dans le crâne placées l'une derrière l'autre; cellule située derrière l'orbite qui renferme l'organe de l'ouïe; trois conduits membraneux renfermés dans trois conduits osseux; corps blanchâtre semblable à l'amidon, qui tient lieu d'osselets; gelée & pulpe auditive; côtes dans les cartilagineux arrondis, qui manquent dans les cartilagineux plats; sternum avec quatre branches; os innominé figuré en fer-à-cheval; os hyoïde formé de deux pièces qui s'unissent à angle aigu. Squelette.

Plusieurs muscles placés en dessous dans la région thorachique, & en-dessus derrière la tête; & entr'autres quatre muscles longuets qui se rapprochent par la forme de ceux des animaux plus parfaits; muscles latéraux; muscles des nageoires & des ouïes. Muscles.

Cerveau divisé en deux lobes ou bosses considérable, l'une antérieure & l'autre postérieure, jointes par un étranglement; Viscères.

cervelet très-exprimé; ventricules; point de tubercules quadrijumeaux; nerſs olfactoires très-gros; tige pituitaire.

Cavités thorachiques aſſez amples; plèvre épaiſſe & peu adhérente; point de péricarde; oreillette tranſparente, gonflée comme une bulle d'air & cordiforme; ſang fluide & très-rouge; cœur irrégulièrement triangulaire & feſtonné dans un de ſes bords; muſcle blanc qui fortifie l'artère dans ſa naiſſance.

Foie diviſé en trois lobes principaux dans les cartilagineux plats, en deux lanières dans les arrondis; véſicule du fiel adhérente au foie; rate oblongue & double dans quelques-uns; pancréas triangulaire & collé le long de l'inteſtin; eſtomac oblique & formant un cul-de-ſac; inteſtin large & allant preſque directement à l'anus.

Dans les femelles, ſac double qui s'ouvre dans l'anus en forme de cloaque, & qui tient lieu de cornes de l'utérus; paquet d'œufs jaunes & de toutes ſortes de grandeurs, grouppés au-deſſus de chaque extrémité de ce double inteſtin; ſac quadrangulaire & aplati, deſtiné à renfermer le fœtus qui s'ouvre facilement de dedans en dehors par ſon extrémité poſtérieure, & qui eſt placé dans l'inteſtin ſuſdit; organe ſemblable à un teſticule; dans les mâles un viſcère blanc alongé, creux, ayant des parois épaiſſes, & s'ouvrant auprès de l'anus par un conduit avec une ou deux appendices charnues; reins derrière le péritoine, & s'ouvrant dans l'anus par un conduit court & très-dilatable.

Vaiſſeaux glaireux, noueux, parallèles dans leur trajet, placés ſous la peau, & contenant un fluide analogue à celui qui eſt renfermé dans les conduits aqueux de l'organe de l'ouïe.

Caractères anatomiques des anguilliformes.

Squelette. Crâne d'une ſeule pièce; foſſe cérébrale & pituitaire étroite; oſſelet de Klein très-gros; eſpèce de bec comme aux oiſeaux; os vomer; os uniforme qui tient lieu de pommette; petit os mobile dans la commiſſure des mâchoires: os hyoïde demi-circulaire; opercules formés par des cercles concentriques &

& ployans ; côtes & vertèbres très-nombreuſes qui vont toujours en décroiſſant.

Pluſieurs paires de muſcles bien organiſés dans la région du thorax & de l'abdomen ; muſcles latéraux ; muſcles des nageoires & des ouïes. Muſcles.

Cerveau compoſé de quatre lobes pairs & deux impairs ; ou de ſix lobes pairs, & de deux impairs dans tous les individus ; un lobe impair & inférieur ; ventricule prolongé ſous le cervelet ; tubercules peu ſaillans & tenant la place des quadrijumeaux ; tige pituitaire ; trois conduits demi-circulaires aqueux de chaque côté de la moelle alongée, dans l'intérieur du crâne & au-deſſus de l'oſſelet ſuſdit. Viſcères.

Poitrine étroite triangulaire ; péricarde ; eau du péricarde ; cœur triangulaire ayant ſon grand bord à gauche, & en haut comme en bas une pointe fort mouſſe ; appendice du cœur en larme de Job ; ſang noir & caillé ; réſervoir cubique.

Foie preſque d'un ſeul lobe, peu étendu ſur les côtés ; véſicule du fiel détachée ; rate petite & arrondie ; eſtomac long, droit & parallèle à la longueur de l'animal ; inteſtin naiſſant près du cardia, faiſant angle avec l'eſtomac, court & allant droit à l'anus.

Veſſie aérienne double ; rubans ſexuels pliſſés, creux & ſitués des deux côtés du boyau ſur la veſſie aérienne ; cavité abdominale prolongée au-delà de l'anus ; reins noirâtres & placés dans cette arrière-cavité : péritoine noir ou argenté ; tiſſu cellulaire graiſſeux qui ſupplée à l'épiploon.

Caractères anatomiques des Poiſſons épineux arrondis.

Tête compoſée d'un nombre conſidérable & indéterminé de pièces oſſeuſes ; un, deux & quelquefois trois oſſelets de l'ouïe ; vomer ; os hyoïde formant un angle aigu par ſes deux branches ; opercules écailleux ; vertèbres & côtes beaucoup moins nombreuſes que dans les anguilliformes ; elles finiſſent par nuances moins inſenſibles ; queue avec des os interépineux, ſupérieurs & inférieurs ; nageoires & os qui les ſoutiennent. Squelette.

Muſcles latéraux, muſcles des nageoires & des ouïes. Muſcles.

Viſceres. Cerveau compoſé de ſept, ou au moins de cinq lobes ſupérieurs, dont deux ſont très-petits, & d'un impair inférieur & moyen; ventricule moins alongé que dans les anguilliſormes; tubercules quadrijumeaux; commiſſure du cerveau; valvule au-deſſus du ventricule poſtérieur; trois conduits demi-circulaires de chaque côté; membrane qui les entoure; nerf auditif qui a deux branches; nerfs optiques qui ſe croiſent dans pluſieurs de ces Poiſſons; nerfs de la première paire qui ſont alongés, pulpeux & parallèles.

Cavité de la poitrine triangulaire & étroite; péricarde; cœur pyramidal & appendice en larme de Job.

Foie peu diviſé; rate oblongue; véſicule du fiel adhérente au foie & à l'eſtomac; eſtomac plus ou moins arrondi; pylore étroit; appendices du pylore très-nombreuſes dans la plupart; inteſtin long, mince & remarquable par un grand nombre de circonvolutions

Dans les mâles, organe blanchâtre creux ayant des parois épaiſſes, & compoſé de pluſieurs pelotons de fibres blanches roulées les unes ſur les autres, & qui s'ouvrent dans le conduit de la veſſie; dans les femelles, organe compoſé de grains qui ſont des œufs: l'ouverture de ce viſcère eſt placée au bas de la veſſie urinaire.

Veſſie urinaire avec un conduit particulier; reins rougeâtres, ovales & placés derrière le péritoine; veſſie natatoire dans le plus grand nombre.

Caractères anatomiques des Poiſſons épineux plats.

Squelette. Un nombre très-conſidérable d'os dans la tête; quatre foſſes cérébrales étroites, mais profondes; oſſelets de l'ouïe peu volumineux; conduits obliques qui mènent aux yeux & aux narines pluſieurs ſegmens de cercles tranchans, & placés latéralement dans l'angle des mâchoires; opercules écailleux; os recourbé qui ſe termine en devant par une ſaillie analogue au ſternum; os tranchant & ſemi-lunaire qui termine poſtérieurement l'abdomen.

Muſcles. Muſcles latéraux peu épais; muſcles des nageoires & des ouïes.

Cinq lobes cérébraux ſupérieurs, dont deux ſont pairs, antérieurs & très-petits, deux pairs moyens & plus gros, & un impair & poſtérieur; un lobe inférieur & impair; ſtructure interne du cerveau, la même que dans les épineux arrondis; organe de l'ouïe auſſi le même. Viſcères.

Cavités de la poitrine étroite; cœur priſmatique ou alongé & arrondi à ſes extrémités; appendice en larme de Job; ſang noir & caillé dans le réſervoir.

Foie aplati & composé d'un ſeul lobe; véſicule du fiel iſolée; rate arrondie; eſtomac globuleux & très-mince; pylore dans la plus grande partie des individus ſans appendices; inteſtin étroit & faiſant un aſſez grand nombre de circonvolutions.

Cavité abdominale arrondie; reins ſemi-lunaires; veſſie urinaire alongée en forme de boyau; deux prolongemens latéraux & poſtérieurs de la cavité abdominale dans leſquels ſont logés les organes ſexuels.

EXPLICATION DES FIGURES.

PLANCHE I.

FIGURE 1. Mâchoire de congre. *b*, pièce moyenne de la mâchoire ſupérieure. *a*, narines. *cc*, pièces latérales de la mâchoire ſupérieure. *d*, petit os enſiforme placé entre les pièces de la mâchoire ſupérieure. *e*, petit os figuré comme une clavicule qui remonte en arrière & en haut, en partant de l'angle des mâchoires.

Fig. 2. Os hyoïde du congre. *b*, baſe de la langue. *aa*, branches de l'os hyoïde. *ccc*, petits cercles qui forment les opercules.

Fig. 3. Coupe du crâne du congre; cette coupe eſt horizontale.

Fig. 4. Coupe des muſcles ſpinaux de l'anguille. *aa*, portions d'ovales décrites par les muſcles latéraux. *b*, épine. *c*, place qu'occupent ſupérieurement les couches ſpinales & moyennes.

Fig. 5 & 6. Figures des cœurs des anguilliformes.

Fig. 7. Déſigne les couches muſculeuſes du tronc. *a*, couche ſpinale. *b*, couche moyenne. *c*, couche latérale. *d*, couches abdominales.

Figure 8. Estomac de l'anguille de mer. *a*, pylore. *d*, cardia. *cb*, extrémités.

Fig. 9. Arrière-cavité conique qui se trouve derrière l'anus, & qui loge les reins dans les anguilliformes.

Fig. 10. Estomac de congre. *b*, cardia. *a*, pylore. *c*, extrémité inférieure.

Fig. 11. Vessie aérienne, reins, les cordons sexuels du congre. *a*, vessie aérienne. *bb*, cordons sexuels. *ccd*, reins placés dans l'arrière-cavité. *Fig. 9.*

Fig. 12. Vessie urinaire & organes sexuels de l'anguille. *a*, vessie urinaire. *bb*, sacs sexuels. *c*, réunion des conduits.

PLANCHE II.

Fig. 1. Cœur de scomber ou maquereau.
Fig. 2. Cœur d'éperlan.
Fig. 3. Cœur du poisson Saint-Pierre.
Fig. 4. Cœur du poisson nommé *talput*.
Fig. 5. Cœur de morue.
Fig. 6. Fait voir la grandeur du thorax des épineux.
Fig. 7. Cœur, appendice en forme de larme de Job, & deux principales veines du crapaud de mer.
Fig. 8. Estomac du poisson Saint-Pierre avec ses appendices.
Fig. 9. Estomac du rouget avec ses appendices.
Fig. 10. Estomac du maquereau avec ses appendices.
Fig. 11. Estomac de l'éperlan avec deux appendices.
Fig. 12. Estomac du poisson nommé *talput*.
Fig. 13. Estomac du colin ou lieu, avec un renflement près le pylore.

PLANCHE III.

Fig. 1. Cordons sexuels du maquereau. *a*, épine; place qu'occupent les reins. *bb*, cordons sexuels.

Fig. 2. Vessie du rouget. *d*, vessie. *aa*, partie supérieure charnue avec les deux conduits recourbés. *acd*, qui se réunissent vers la caroncule *b*.

Fig. 3. Représente les reins du rouget.

Fig. 4. Vessie urinaire, vessie aérienne & reins de la gode. *a*, vessie urinaire très-épaisse en haut. *b*, vessie aérienne. *c*, reins. *d*, conduit qui fait les fonctions d'uretère.

Fig. 5. Reins & vessie aérienne du poisson nommé talput. *a*, vessie aérienne. *bc*, deux glandes qui occupent la place & qui

font la fonction de reins. *d*, conduit qui va d'une glande à l'autre.

Figure 6. Organes fexuels & petites veffies de l'anus, obfervées dans un poiffon femblable au rouget, & que les Normands appellent roulet. *a*, place qu'occupent les reins des deux côtés de l'épine. *bb*, facs ou organes fexuels, *cc*, deux petites veffies placées derrière l'anus. *d*, place de l'anus.

Fig. 7. Deux petites veffies que l'on trouve derrière l'anus du crapaud de mer.

Fig. 8. Organes fexuels du poiffon nommé talput. *a*, organe qui reffemble à un ruban pliffé. *bb*, deux facs que j'ai trouvés flafques. *c*, réunion des conduits.

PLANCHE IV.

Fig. 1. Cœur de barbue avec fon appendice charnu.

Fig. 2. Défigne la grandeur de l'abdomen dans les poiffons épineux plats. *ab*, os fternal. *cd*, os tranchant femi-lunaire qui termine l'abdomen en arrière.

Fig. 3. Cœur de flondre avec fon appendice.

Fig. 4. Les reins & la veffie de la plie. *a*, la veffie urinaire. *b*, les reins.

Fig. 5. Eftomac & inteftin de la barbue. *a*, eftomac. *bc*, appendice du pylore. *d*, premier inteftin. *e*, rétréciffement de l'inteftin. *f*, fecond inteftin ou rectum.

Fig. 6. Organes fexuels de la barbue. *ab*, angles qui font logés dans les arrières-cavités coniques. *dd*, angles qui remontent en fuivant les reins. *c*, réunion des deux organes latéraux en un conduit.

Fig. 7. Rectum & organes fexuels de la limande. *a*, rectum. *bb*, deux facs fexuels. *c*, cloaque ou réunion de ces conduits à l'anus.

Fig. 8. Tête d'un poiffon épineux plat, dans laquelle les os des deux mâchoires font principalement deffinés. *ah*, deux condiles ou articulations de la mâchoire inférieure. *ee*, traverfe qui unit les os de la mâchoire fupérieure avec le crâne; cette traverfe eft mobile. *cd*, os plat & oblique qui fe porte vers l'angle des deux mâchoires. *ab*, autre os plat placé dans le milieu. *ma*, os recourbé qui fe porte auffi vers la commiffure de la bouche. *mb*, os tranfverfal qui réunit les précédens entr'eux; ces os font mobiles les uns fur les autres.

PLANCHE V.

Figure 1. Cerveau de congre avec les principaux nerfs qui en partent. *aa*, nerfs optiques. *b*, lobe antérieur, impair & séparé en deux par un petit raphé. *cc*, les deux lobes pairs & antérieurs. *dd*, deux lobes pairs moyens, & qui donnent naissance aux nerfs optiques & aux petits nerfs oculaires. *e*, le cervelet. *fg*, deux nerfs qui percent le crâne & qui se distribuent au palais, aux narines, aux ouïes & au cœur. *hi*, deux nerfs qui partent de la moelle alongée, & qui se réunissent en *K*. *l*, moelle épinière avec ses nerfs.

Fig. 2. Cerveau de congre vu en dessous. *a*, petit lobe impair & moyen. *dd*, lobes moyens & pairs qui tiennent lieu de couches optiques. *bb*, nerfs optiques. *cc*, nerfs oculaires; les nerfs optiques sont plus rapprochés à leur origine qu'ils ne le sont

Fig. 8. Cerveau d'anguille qui est très-alongé, & dont les lobes antérieurs sont mieux développés & plus nombreux.

Fig. 3. Cerveau de la carpe de mer ou vrac vu en-dessus; il a deux lobes antérieurs *aa*. *bb*, petits lobes moyens. *cc*, lobes postérieurs qui donnent naissance aux nerfs optiques. *d*, cervelet.

Fig. 4. Même cerveau vu en dessous. *c*, lobe impair, inférieur & moyen. *aa*, nerfs optiques. *bb*, petits nerfs oculaires. *de*, principaux nerfs latéraux.

Fig. 5. Cerveau d'un petit poisson qui s'appelle vive en Normandie, & qui n'a que cinq lobes en comptant le cervelet; ce petit poisson est aplati horizontalement & a les deux yeux en dessus.

Fig. 6. Cerveau de plie vu en dessus; il a cinq lobes en tout. *aa*, petits lobes antérieurs très-superficiels. *cc*, lobes qui tiennent lieu de couches optiques. *b*, cervelet. *de*, principaux nerfs latéraux.

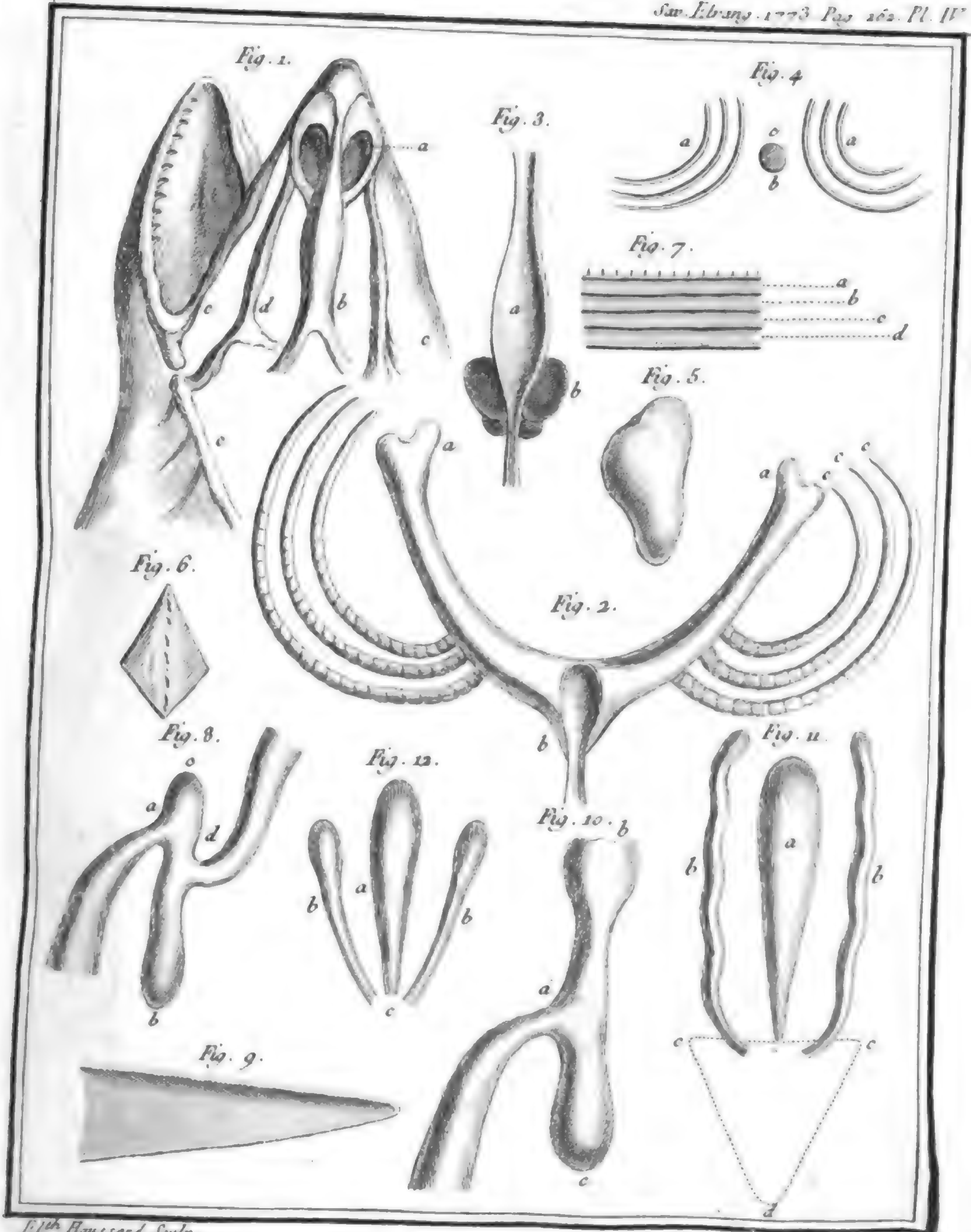
Fig. 7. Même cerveau vu en dessous. *e*, petit lobe moyen, impair & inférieur. *ab*, nerfs optiques. *cd*, nerfs oculaires.

Fig. 9. Cerveau d'une espèce de turdus ou grève de mer vu en dessous. *a*, lobe inférieur & impair. *bb*, nerfs optiques qui se croisent en *C*.

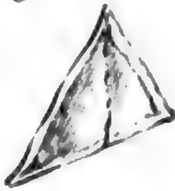
Fig. 10. Cerveau de turbot vu en dessous. *a*, lobe inférieur & impair. *bb*, nerfs optiques dont un est plus antérieur & plus élevé.

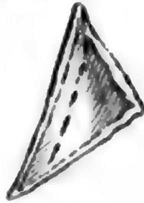


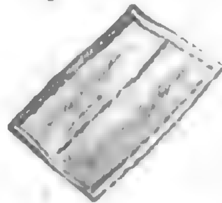
Pl. I.

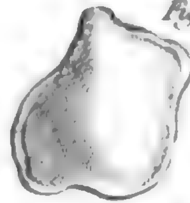


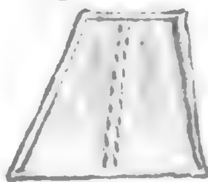
Eli^th Haussard Sculp.

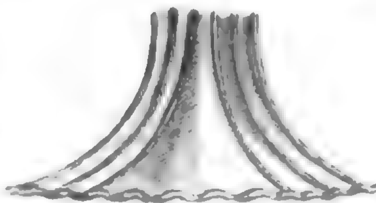

Fig. 1.

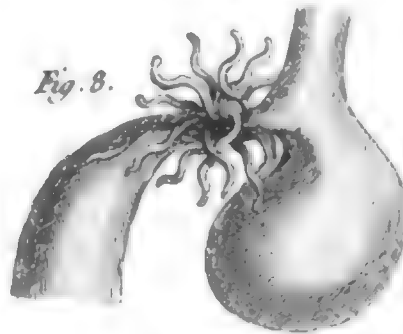

Fig. 2.

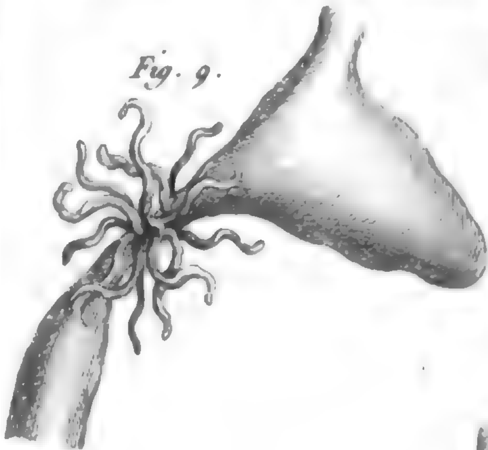

Fig. 3.

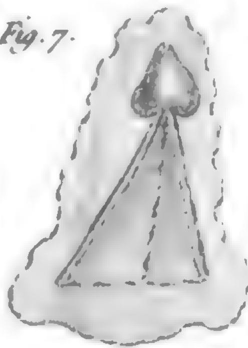

Fig. 4.


Fig. 5.


Fig. 6.


Fig. 8.


Fig. 9.


Fig. 7.

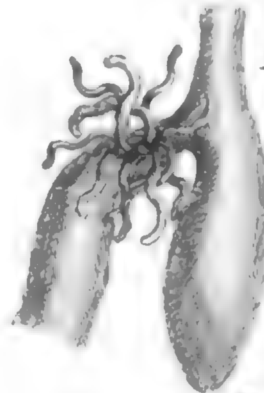
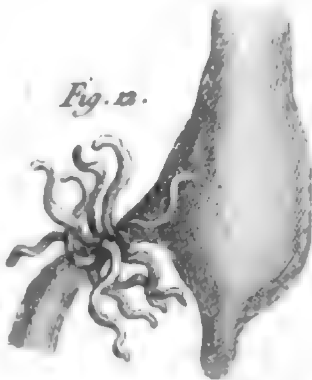
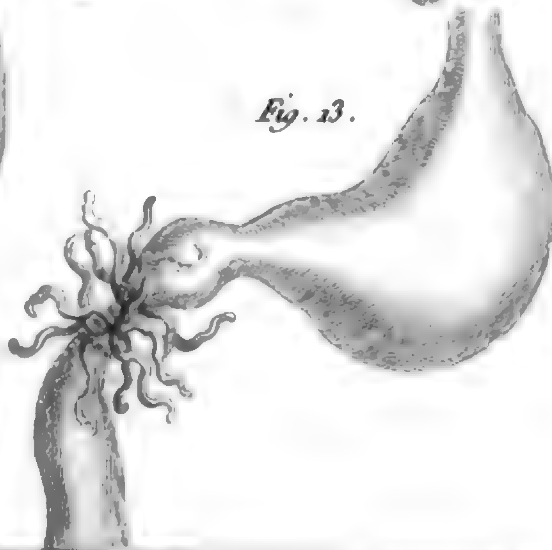

Fig. 10.


Fig. 11.


Fig. 12.


Fig. 13.

Cne Haussard Sculp.

Fig. 1.

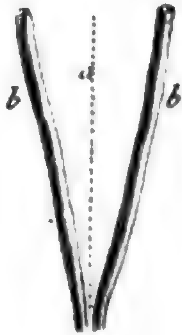


Fig. 2.

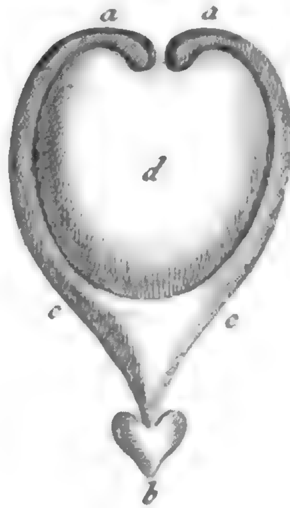


Fig. 3.



Fig. 4.

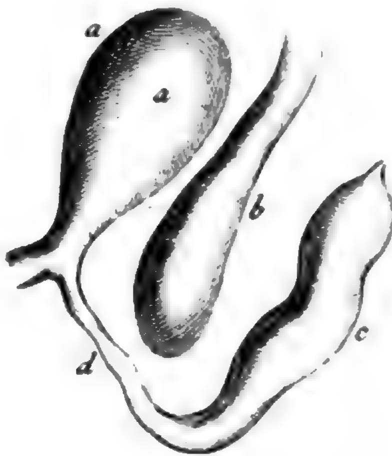


Fig. 5.

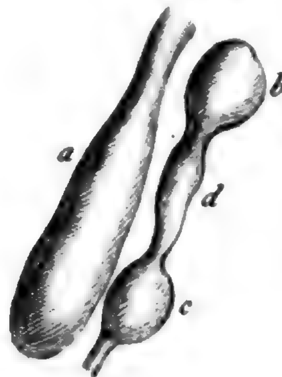


Fig. 6.

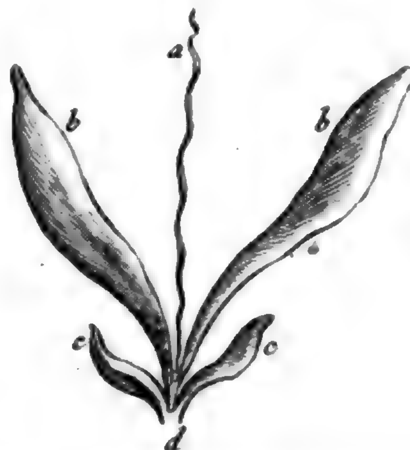
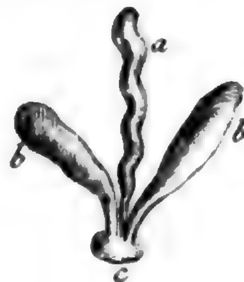


Fig. 7.



Fig. 8.



Elle. Haussard Sculp.


Fig. 3.


Fig. 1.ere

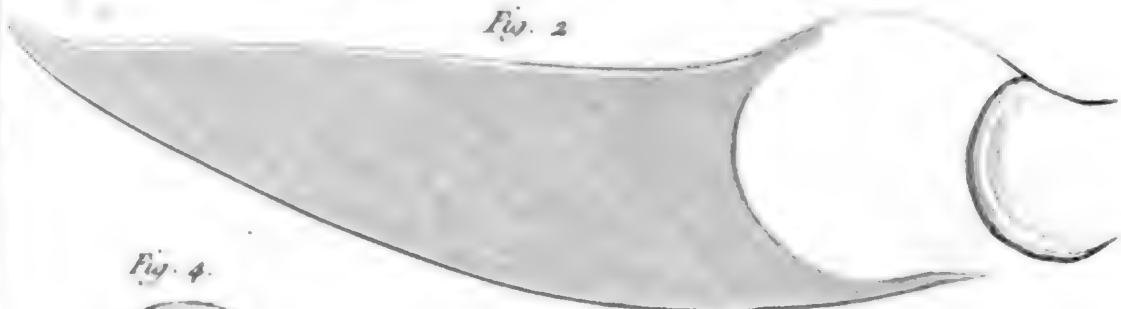
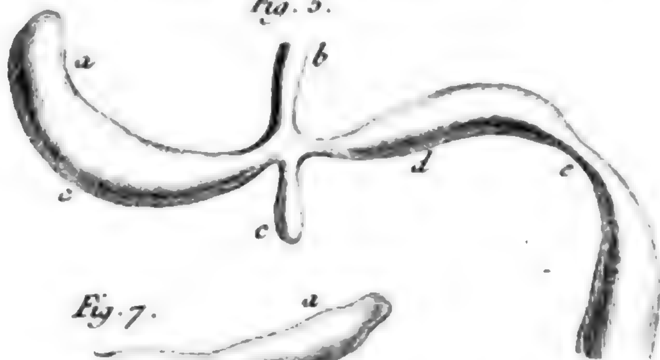
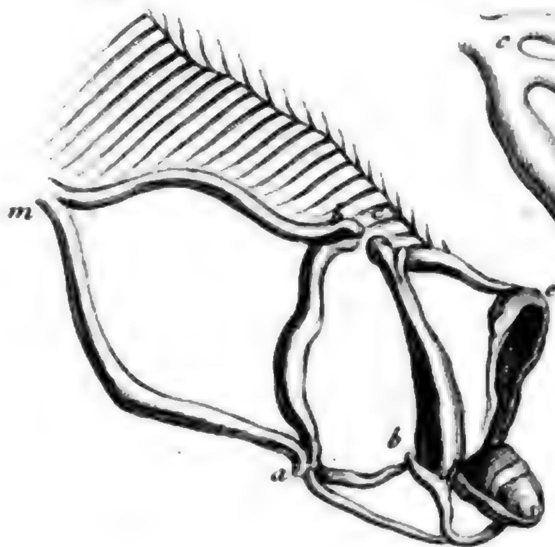
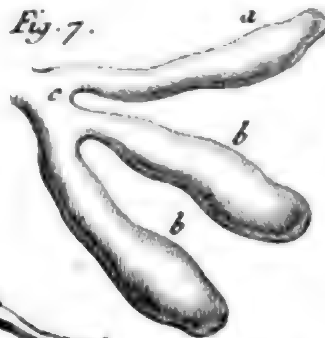
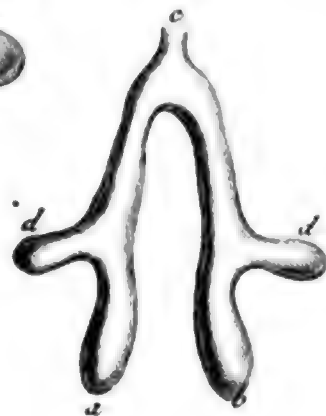

Fig. 2


Fig. 4.


Fig. 5.


Fig. 8.


Fig. 7.


Fig. 6.

Cne Haussard Sculp.





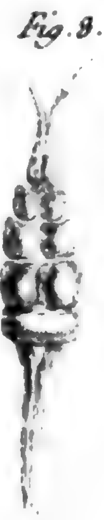




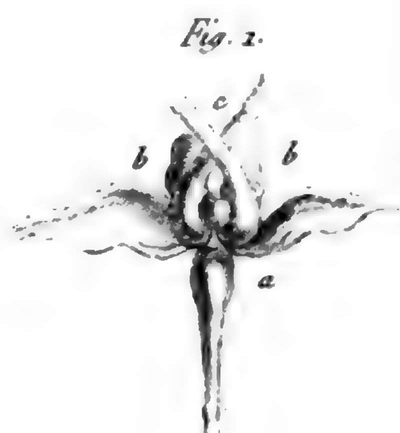












Vve Haussard Sculp.

DESCRIPTION DU COCOS DE L'ÎLE PRASLIN,

vulgairement appelé Cocos de mer.

Par M. SONNERAT.

L'ÎLE Praſlin ou l'île des Palmiers, eſt juſqu'à préſent le ſeul endroit où l'on ait trouvé l'arbre qui produit ce Cocos ſi recherché, qu'on n'avoit connu juſqu'alors que ſous le nom de Cocos de mer, Cocos de Salomon, Cocos des Maldives. La rareté de ce fruit, ſa forme bizarre, ſon origine inconnue, tout avoit contribué à lui faire attribuer de grandes propriétés, & imaginer des fables ſur ſon exiſtence, comme c'eſt la coutume dans tous les pays, à l'égard de ce qui eſt inconnu & ſingulier.

L'arbre qui produit le cocos de mer, s'élevant en beaucoup d'endroits de l'île ſur le rivage de la mer, la plus grande partie de ſes fruits tombe dans ſes eaux, ſe ſoutient à leur ſurface, le vent les pouſſe, les courans dont la direction eſt dans ces parages à l'Eſt-Nord-Eſt, les portent juſque ſur le rivage des Maldives, ſeule partie de la Terre où l'on avoit trouvé ce fruit avant la découverte de l'île Praſlin; ce qui lui fit donner le nom de *Cocos des Maldives* par les Européens; & les Maldivois le nommèrent *Travarcarné* (ce qui veut dire tréſor); il fut enſuite appelé *Cocos de Salomon*, pour lui donner apparemment un nom qui répondît au merveilleux qu'on attachoit à ſon origine. Ne connoiſſant point l'arbre qui le produiſoit, ne le pouvant découvrir, on avoit imaginé que c'étoit le fruit d'une plante qui croiſſoit au fond de la mer, qu'il ſe détachoit quand il étoit mûr, & que ſa légèreté le faiſoit ſurnager au-deſſus des flots, il reſtoit pour achever la fable, à prêter à ce fruit ſi extraordinaire, les plus grandes & les plus rares propriétés; c'eſt ce qui ne

manqua pas d'arriver. On débita, on crut & l'on croit encore, non-seulement aux Indes, mais dans toute l'Asie, que l'amende du Cocos de mer a toutes les propriétés que nous attribuons à la thériaque, & que nous exagérons peut-être; que sa coque est un antidote assuré contre toutes sortes de poisons. Les grands Seigneurs de l'Indostan achettent encore ce fruit à très-haut prix; ils font faire de sa coque des tasses qu'ils enrichissent d'or & de diamans; ils ne boivent jamais que dans ces tasses, persuadés que le poison qu'ils ne craignent tant, que parce qu'ils s'en servent eux-mêmes, ne sauroit leur nuire, quelqu'actif qu'il soit, quand leur boisson a été versée & s'est purifiée dans ces coupes salutaires. Le Souverain des îles Maldives met à profit l'erreur générale : ses prédécesseurs se sont attribués, & il conserve la propriété exclusive d'un fruit qui, porté sur les eaux, poussé sur les côtes par le vent, devroit appartenir à celui qui le ramasse, il le vend à un très-haut prix, ou l'envoie aux différens Souverains de l'Asie, comme le plus précieux don qu'ils puissent recevoir. Mais le Cocos de mer devant bientôt n'être plus rare, ne paroissant plus un être singulier, perdra bientôt sans doute, sa valeur, ses propriétés, & le Souverain des Maldives le tribut que lui payoit l'ignorance & l'erreur.

L'île Praslin ou l'île des Palmiers a tout au plus six ou sept lieues de tour; elle fait partie de l'Archipel, connu autrefois sous le nom de *Trois-frères*, puis sous celui de *Mahé*, & enfin aujourd'hui sous celui de *Sechelles;* c'est dans cette île d'une étendue si bornée, & dans cette île seule, qu'on a découvert jusqu'à présent ce Cocos si précieux dans l'Inde. Comment ne s'est-il point trouvé dans les îles adjacentes? Comment l'arbre qui le produit n'y croît-il pas? Pourquoi étoit-il borné à la seule étendue de l'île Praslin, quand cet Archipel fut séparé du Continent, & que l'irruption des mers changea cette portion du globe en un amas d'îles? Je laisse aux Physiciens & aux Naturalistes ces questions qui seroient d'une longue & trop difficile discussion, & je me borne à parler de l'arbre qui produit ce fruit si singulier.

Cet

Cet arbre obſervé attentivement, a été reconnu pour une eſpèce de latonier ou de lontar des Indes; il s'élève juſqu'à quarante-deux pieds de hauteur, ſa tête ſe couronne de dix ou douze feuilles en éventail de vingt-deux pieds de haut, ſur quinze pieds de large, portées ſur des pédicules longs de ſix ou ſept pieds; elles ſont échancrées aſſez profondément dans leur contour, & chaque lobe eſt lui-même ſubdiviſé en deux portions par le haut; leur conſiſtance eſt ferme & coriace: ce qui les rend préférables aux feuilles de nos Cocotiers ordinaires, pour faire des couvertures de maiſons à la façon indienne.

De l'aiſſelle des feuilles ſort une panicule conſidérable & très-ramifiée, de ſix pieds de longueur; ſa baſe eſt charnue, épaiſſe, ſes rameaux ſont terminés par des amas de fleurs femelles qui paroiſſent avoir toutes un calice compoſé de pluſieurs pièces, à cinq, ſix, & quelquefois ſept diviſions: leur piſtile en mûriſſant devient un fruit ſphérique d'un pied & demi de diamètre, dont l'enveloppe eſt très-épaiſſe & fibreuſe comme celle du Cocos; elle renferme trois coques dont une avorte le plus ſouvent: ces coques ſont très-groſſes, preſque ſphériques, comprimées ſur un de leurs côtés, & diviſées juſque dans le milieu de leur longueur, en deux portions; ce qui leur donne une figure très-bizarre; leur intérieur ſe remplit d'abord d'une eau blanche d'un goût amer & aſſez déſagréable; à meſure que le fruit mûrit, cette eau ſe change comme dans les Cocos ordinaires en une ſubſtance ſolide, blanche, huileuſe, qui s'attache aux parois intérieures du fruit.

Clutius donne une légère deſcription de ce Cocos, ſous le nom de *nux medica.*

Il ſeroit à ſouhaiter qu'on pût ſavoir par différens eſſais, ſi l'opinion des Anciens ſur les propriétés de cette noix eſt fondée.

Ces fruits ont chacun à leur baſe le calice dont j'ai parlé ci-deſſus, il ne les quitte point, même après leur parfaite maturité.

Le tronc de l'arbre ſemblable à celui du Cocotier par ſa forme, eſt en général plus gros, plus dur, & d'une couleur plus noire.

On a tranſporté à l'Île-de-France des plants & des noix de cet arbre, qui ont très-bien réuſſi.

L'arbre que je viens de décrire paroît être, comme l'on voit, un individu femelle; je n'en ai point rencontré d'autres, ainſi que ceux qui ont voyagé comme moi dans ces îles où j'ai paſſé en Juin, qui étoit ſans doute le temps de la parfaite maturité de leur fruit; mais depuis j'ai reçu de M. Cordé, ancien Officier de la Compagnie des Indes, qui avoit relâché dans cet Archipel en Octobre, une portion d'un régime de fleurs mâles de cet arbre; ce qui ſemble fixer le temps de la floraiſon au mois de Septembre, qui répond au printemps de l'Europe, & le temps de ſa maturité aux mois de Juin & Juillet qui répondent à notre hiver. Cette portion de régime, dont j'ai joint ici le deſſin, avoit environ deux pieds & demi de longueur, ſans aucune ramification, elle étoit d'une forme cylindrique, de quatre pouces de diamètre, couverte entièrement d'un nombre infini de fleurs mâles, compoſée d'un calice à ſix diviſions, & de ſix étamines oppoſées à chacune de ces diviſions. Les régimes de fleurs mâles n'ayant point encore été rencontrées ſur les pieds qui produiſent les fruits; il eſt probable que cet arbre les portent ſur des individus différens, de ſorte que l'on peut regarder ce palmier comme une eſpèce de latonier, c'eſt-à-dire, de lontar des Indes, auquel il reſſemble d'ailleurs par toutes ſes autres parties, comme on peut en juger par la comparaiſon des figures que j'ai cru mériter d'être préſentées à l'Académie, puiſqu'elles n'ont point encore été publiées.



MÉMOIRE

Sur la Conſtruction des Fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des Équations aux différences partielles.

Par M. MONGE, Profeſſeur royal de Mathématiques & de Phyſique à l'École du Génie.

J'AI donné ailleurs la manière générale de conſtruire les intégrales des équations aux différences partielles du premier ordre, lorſqu'elles ſont de cette forme $z = M + N\varphi V$, les quantités M, N & V étant données en x & y, quelle que ſoit la condition à laquelle, par la nature de la queſtion, l'on ſoit obligé de ſatisfaire. Le lieu geométrique de l'intégrale précédente eſt une famille de ſurfaces courbes, qui renferme autant d'eſpèces, que la fonction arbitraire φ peut avoir de formes différentes; & l'on diſtingue celle qui ſatisfait à une queſtion, en aſſignant dans l'eſpace une courbe par laquelle elle doive paſſer. J'ai fait voir qu'il n'y a point de courbe continue ou diſcontinue, quand même tous ſes points feroient donnés au haſard, & ſe ſuccèderoient ſans loi, par laquelle on ne puiſſe faire paſſer une ſurface courbe dont l'équation ſeroit $z = M + N\varphi V$, & j'ai donné la manière générale de les conſtruire. J'ai pareillement conſtruit les intégrales des ordres ſupérieurs dans certains cas, par exemple, lorſque les différentes fonctions arbitraires ſont compoſées de la même quantité, ou, lorſqu'étant compoſées de quantités différentes, il ſe trouve quelques particularités dans les conditions à remplir. Mais je n'ai fait voir que dans certains cas particuliers, que la ſurface qui eſt le lieu de l'intégrale d'une équation aux différences partielles, eſt auſſi celui de ſa différentielle; de plus, je n'ai pas conſtruit l'équation $z = M + N\varphi V$ en ſuppoſant les quantités M, N & V fonctions des trois variables x, y & z, auquel cas on peut les mettre ſous cette forme plus ſimple $M = \varphi V$. Je me

propoſe de le faire ici d'une manière propre à jeter encore quelque jour ſur cette matière.

Pour avoir la différentielle de l'équation $z = M + N\varphi V$, il faut d'abord la mettre ſous cette forme, $\frac{z-M}{N} = \varphi V$, enſuite la différentier en ne faiſant varier que x; ce qui donne

$$N\delta z - N\delta M - z\delta N + M\delta N = N^2\varphi' V . \delta V,$$

puis en ne faiſant varier que y, d'où l'on tire

$$N\partial z - N\partial M - z\partial N - M\partial N = N^2\varphi' V . \partial V;$$

enfin éliminer la fonction arbitraire $N^2\,\varphi'\,V$, qui ſe trouve dans les deux équations, & il vient pour différentielle partielle de la propoſée,

$$(A) \qquad \partial V\,[N\delta z - N\delta M - z\delta N + M\delta N] = \delta V\,[N\partial z - N\partial M - z\partial N + M\partial N].$$

(J'emploierai dans la ſuite, comme je l'ai toujours fait, des caractériſtiques différentes pour les différentes manières de différentier; cette méthode eſt plus commode, en ce qu'il eſt inutile d'avoir recours à une forme fractionnaire pour repréſenter une différentielle partielle).

Il s'agit donc de faire voir que toute ſurface qui ſatisfait à l'équation $z = M + N\varphi V$, ſatisfait auſſi à l'équation (A); mais j'ai déjà dit que cette intégrale appartient à une infinité de ſurfaces courbes différentes, & qui n'ont de commun que le procédé de la conſtruction; donc, la queſtion conſiſte à démontrer que par cela ſeul qu'une ſurface courbe aura été conſtruite par un certain procédé, quelle que ſoit d'ailleurs la courbe génératrice, continue ou diſcontinue, qui aura ſervi à ſa conſtruction, cette ſurface ſatisfera à une équation aux différences partielles.

Pour me rendre intelligible, je vais le démontrer d'abord pour des cas ſimples, & enſuite par gradation pour les cas les plus compliqués. Mais, parce que dans chaque cas la

démonstration est fondée sur le procédé de la construction, je crois nécessaire de faire précéder chaque démonstration par la construction du cas dont il sera question; & pour ne pas me répéter pour les constructions que j'aurai données dans les Mémoires précédens, je supposerai autant qu'il sera possible qu'il n'y ait rien d'analytique dans les intégrales; par exemple, que dans l'équation $z = M + N\varphi V$, les quantités données M, N & V soient discontinues.

PROBLÈME I.

Construire l'équation $z = \varphi V$ *de manière que la surface qui en sera le lieu géométrique, passe par une courbe donnée, continue ou discontinue, & dont les projections aient pour symboles d'équations* $y = F.x$ *&* $z = f.x$; *la quantité* V *étant une fonction quelconque, analytique ou non, mais donnée, des deux variables* x *&* y.

SOLUTION.

Soient PAD & PAB les deux plans, l'un horizontal & l'autre vertical, auxquels est rapportée l'équation de la surface à construire, de manière que les droites AP, AD & AB soient les axes rectangulaires des coordonnées x, y & z. Soit smS la courbe donnée dans l'espace par lequel doit passer la surface, & dont les projections continues ou discontinues rqR & $sm'S'$ ont pour symboles d'équations $y = Fx$ & $z = f.x$. Soit Q un point quelconque pris sur le plan horizontal, & auquel répondent les coordonnées $AP = x$ & $PQ = y$ prises à volonté; il est évident que la question consiste à construire l'ordonnée QM de la surface. Pour cela, supposons d'abord que la quantité V soit analytique, & soit construite sur le plan horizontal la courbe Qq, qui ait pour équation $V = \alpha$, α étant une constante telle que cette courbe passe par le point donné Q; enfin, soit imaginé par cette courbe une surface cylindrique verticale, prolongée jusqu'à ce qu'elle puisse couper la surface à construire suivant une courbe Mm, il est clair que l'on aura l'équation de la pro- Fig. 1.

jection verticale de cette courbe, en faisant $V = \alpha$ dans l'équation proposée $z = \phi V$. Cette équation sera donc $z =$ const. donc la projection verticale de cette courbe sera une droite horizontale; donc la courbe Mm sera elle-même plane & horizontale. Mais cette courbe étant sur la surface à construire, doit couper la courbe donnée smS quelque part en un point m dont la projection horizontale sera le point q, intersection des deux courbes Qq & rqR; donc, ayant mené $q\pi$ parallèle aux y, & élevé la verticale $\pi m'$, prolongée jusqu'à la rencontre de la courbe $sm'S'$, le point m' sera la projection verticale du point m, & si l'on mène par le point m' la droite horizontale $m'M'$, on aura la projection horizontale de la courbe Mm; donc, élevant la verticale PM', & faisant $QM = PM'$, le point M sera dans la surface demandée.

J'ai supposé, pour construire la courbe Qq, que la quantité V fut analytique; mais, si cette quantité n'est soumise à aucune loi de continuité, alors V n'est plus qu'un symbole, & représente une grandeur dont il est impossible d'avoir l'expression; par conséquent l'équation de la courbe Qq ne peut plus être exprimée, puisque les élémens de cette courbe se succèdent sans loi: & cette équation ne peut qu'être représentée par le symbole $V =$ const. $= \alpha$; néanmoins dans cette hypothèse il est possible de construire la courbe Qq. En effet, quoique la quantité V soit discontinue, cependant, puisqu'elle est donnée, elle peut être représentée par l'ordonnée verticale d'une surface courbe discontinue, donnée dans l'espace de quelque manière que ce soit, ou constructible par des procédés analogues à ceux que j'ai donnés dans le Mémoire auquel celui-ci doit servir de supplément; & le symbole d'équation de cette surface sera $V = z$; par conséquent, pour cette surface, deux des trois coordonnées x, y & z étant données à volonté, la troisième sera donnée ou constructible. Soit donc imaginée cette surface dans l'espace; il est évident que si on la coupe par un plan horizontal, on aura une section dont la projection horizontale aura pour

ſymbole d'équation, $V = \alpha$; il ne s'agit donc plus que de placer ce plan horizontal de telle manière que cette projection paſſe par le point Q. Pour cela, ſoit V le point où la verticale QM coupe cette ſurface; la droite QV ſera conſtructible, puiſqu'elle répond à un x & à un y donnés, & par conſéquent le point V ſera connu; ſoit mené par ce point un plan horizontal, il coupera la ſurface donnée en une courbe Vu, dont la projection horizontale ſera la courbe Qq demandée.

Corollaire.

Donc, quelle que ſoit la courbe donnée smS, la ſurface que je viens de conſtruire aura cette propriété, qu'étant coupée par une ſurface cylindrique qui ait une courbe Qq pour baſe, ou dont l'équation ſoit $V = \alpha$, elle donnera pour ſection une courbe plane & horizontale.

C'eſt cette propriété qui peut s'exprimer analytiquement, quoique la quantité V & la courbe smS ſoient diſcontinues; & ſon expreſſion eſt $\partial V \delta z - \delta V \partial z = 0$, différentielle de l'équation $z = \varphi V$, comme je vais le démontrer dans le théorème ſuivant.

Théorème I.

Quelle que ſoit la courbe génératrice, par cela ſeul qu'une ſurface aura été conſtruite par le procédé du Problème précédent, c'eſt-à-dire, d'après cette ſeule propriété qu'étant coupée par une ſurface cylindrique verticale dont l'équation ſoit $V = \alpha$, elle donnera pour ſection une courbe plane & horizontale, l'on aura dans tous les points de cette ſurface, l'équation aux différences partielles $\partial V \delta z = \delta V \partial z$.

Démonstration.

Soient, comme dans la figure précédente, PAD & PAB le plan horizontal & le plan vertical auxquels eſt rapportée la ſurface; ſoit $AP = x$ & $Pp = dx$; par le point P ſoit Fig. 2.

mené perpendiculairement aux x un plan vertical qui coupera le plan horizontal ſuivant la droite indéfinie PT, le plan vertical ſuivant PE, & la ſurface conſtruite ſuivant une courbe EMF; ſoit $PQ = y$; par le point Q ſoit élevée l'ordonnée verticale QM, & par le point M ſoit menée une tangente à la courbe EMF, qui prolongée rencontrera le plan horizontal quelque part en un point T de la droite PT. Par le point Q ſoit mené de même perpendiculairement aux y un plan vertical qui coupera le plan horizontal ſuivant une droite Qt, la ſurface ſuivant une courbe dont la tangente en M rencontrera la droite Qt quelque part en un point t; & la droite tT ſera l'interſection du plan horizontal par le plan tangent à la ſurface au point M. Enfin ſoient Qq la courbe dont l'équation eſt repréſentée par $V = \alpha$, & Mm l'interſection de la ſurface, par la ſurface cylindrique qui auroit Qq pour baſe. Cela poſé, il eſt clair, d'après la conſtruction, que la courbe Mm eſt horizontale & parallèle à Qq; de plus, ſon élément au point M eſt dans le plan tangent, & par conſéquent parallèle à Tt; donc Qq eſt parallèle à Tt; donc les triangles tQT & $QQ'q$ ſont ſemblables & donneront $tQ : QT :: QQ' : Q'q$. Or, des deux ſous-tangentes tQ & QT, la première eſt égale à $\frac{z\,dx}{\delta z}$, & la ſeconde à $\frac{-z\,dy}{\partial z}$; de plus, le rapport de QQ' à $Q'q$ eſt égal à celui de dx à dy pris dans l'équation $V = \alpha$ de la courbe Qq, & ce rapport ſe trouvera en différentiant l'équation $V = \alpha$, qui donne $dV = 0$, ou $dx \cdot \frac{\delta V}{dx} + dy \frac{\partial V}{dy} = 0$, & par conſéquent $dx : dy = - \frac{\partial V}{dy} : \frac{\delta V}{dx}$; donc, en ſubſtituant ces valeurs, l'analogie précédente deviendra $\frac{z\,dx}{\delta z} : - \frac{z\,dy}{\partial z} :: - \frac{\partial V}{dy} : \frac{\delta V}{dx}$, d'où l'on tirera $\partial V \delta z = \delta V \partial z$, équation différentielle de $z = \varphi V$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

COROLLAIRE.

Dans cette démonſtration, il n'a nullement été queſtion de la courbe génératrice, elle n'eſt fondée que ſur cette propriété de la ſurface courbe, qu'étant coupée par une ſurface cylindrique, dont l'équation eſt $V = \alpha$, l'interſection eſt une courbe plane & horizontale. Donc, la concluſion auroit également lieu, quand même la courbe génératrice ſeroit diſcontinue: or, on peut employer une courbe diſcontinue pour la conſtruction; donc, il y a des ſurfaces diſcontinues qui ſatisfont dans chacun de leurs points à cette équation $\partial V \delta z = \delta V \partial z$.

PROBLÈME II.

Conſtruire l'équation z = M + N φ V, *de manière que la ſurface qui en ſera le lieu géométrique, paſſe par une courbe quelconque donnée, continue ou diſcontinue, & dont les projections aient pour ſymboles d'équations* y = Fx *&* z = fx. *Les quantités* M, N *&* V *étant des fonctions données, analytiques ou non, des deux variables* x *&* y.

SOLUTION.

Soient, comme dans la figure première, *PAD* & *PAB* le plan horizontal & le plan vertical, auxquels eſt rapportée la ſurface; *smS* la courbe donnée, par laquelle doit paſſer la ſurface; *rqR* & *sm'S'* ſes deux projections. Soient *AP* & *PQ* les deux coordonnées qui répondent au point *Q*, pris à volonté, pour lequel il faille conſtruire l'ordonnée verticale *QM*. Cela poſé, on conſtruira de même que dans le Problème I, la courbe *Qq* dont l'équation ſoit $V = \alpha$, la conſtante α étant telle que cette courbe paſſe par le point *Q*; ce qui eſt toujours poſſible, ſoit que la quantité *V* ſoit analytique ou non. On concevra par la courbe *Qq* une ſurface cylindrique verticale, prolongée juſqu'à la rencontre de la ſurface, & qui la coupera ſuivant une courbe *Mm*, dont la verticale *QM* ſera une ordonnée. Soit *M'm'* Fig. 3.

la projection verticale de cette courbe; on aura son équation en éliminant y de l'équation $z = M + N\phi V$ à l'aide de l'équation $V = \alpha$. Soient donc M' & N' ce que deviennent les quantités M & N, en y mettant pour y sa valeur prise dans l'équation $V = \alpha$. L'équation de la courbe $M'm'$ sera $z = M' + N'A$, A étant une constante arbitraire dont la détermination dépend de la considération suivante.

La courbe Mm étant sur la surface à construire, doit nécessairement couper la courbe donnée smS, quelque part en un point m, dont la projection horizontale est le point q, intersection de la courbe Qq avec la courbe rqR. Donc, si l'on mène $q\pi$ parallèle aux y, & que l'on élève la verticale indéfinie $\pi l'$, cette droite rencontrera la courbe $s\,m'\,S'$ en un point m' qui sera la projection verticale du point m, & par lequel passera nécessairement la courbe $M'm'$. Ainsi l'équation de la courbe $M'm'$ est $z = M' + N'A$, A étant telle que la courbe passe par le point déterminé m'.

Pour construire cette équation, il faut d'abord construire les quantités M' & N'. Imaginons dans l'espace deux surfaces courbes, dont les équations aient pour symboles $z = M$ & $z = N$; ces deux surfaces continues ou discontinues doivent être données ou constructibles, puisque les quantités M & N sont supposées données; concevons ensuite que les deux surfaces soient coupées par la surface cylindrique verticale qui a Qq pour base, la première suivant Nn, & la seconde suivant la courbe Ll; ces deux courbes seront constructibles, de même que leurs projections verticales $N'n'$ & $L'l'$. Or, les équations de ces projections sont ce que deviennent les équations $z = M$ & $z = N$ en éliminant y à l'aide de l'équation $V = \alpha$; donc, elles seront $z = M'$ & $z = N'$; donc, si l'on construit les courbes $N'n'$ & $L'l'$, les quantités M' & N' seront construites. Quant à la constante indéterminée A, il faut que dans la courbe $M'm'$, pour l'abscisse $x = A\pi$, on ait $z = \pi m'$; mais pour la même abscisse on a $M' = \pi n'$ & $N' = \pi l'$; donc, on aura $\pi m' = \pi n' + \pi l' \times A$; d'où l'on tire $A = \frac{\pi m' - \pi n'}{\pi l'} = \frac{n'm'}{\pi l'}$.

Actuellement que les quantités M', N' & A sont construites, il sera facile de construire l'équation $z = M' + N'A$, & par conséquent d'avoir la courbe $M'm'$. On élèvera la verticale PM', on portera PM' de Q en M, & le point M appartiendra à la surface demandée.

La même courbe $M'm'$ servira pour tous les points de la courbe Qq; mais lorsqu'il s'agira de construire l'ordonnée verticale de la surface, qui répondra à un autre point Q', il faudra mener une nouvelle courbe $Q'q'$, dont l'équation sera $V = \alpha'$, ce qui donnera une nouvelle courbe $M'm'$, qui servira à déterminer toutes les ordonnées correspondantes aux différens points de la courbe $Q'q'$; & ainsi de suite.

COROLLAIRE.

Toute surface construite par le procédé précédent, quelle que soit la courbe par laquelle on l'ait fait passer pour satisfaire aux conditions de la question, aura donc cette propriété, qu'étant coupée par une surface cylindrique dont l'équation soit $V = \alpha$, elle donnera pour section, une courbe dont la projection verticale aura pour symbole d'équation $z = M' + N'A$, M' & N' étant ce que deviennent les quantités M & N, après en avoir éliminé y à l'aide de l'équation $V = \alpha$, & A étant une constante. C'est cette propriété qui, quoique la surface puisse être discontinue, peut avoir une expression analytique, & qui, comme je vais le démontrer, est réellement exprimée par l'équation aux différences partielles de $z = M + N\varphi V$.

THÉORÈME II.

Quelle que soit la courbe génératrice, par cela seul que dans la construction d'une surface on aura suivi le procédé du Problème précédent, ou par cela seul qu'en coupant la surface par une surface cylindrique dont l'équation soit $V =$ const. on a une courbe dont la projection verticale a pour symbole d'équation $z = M' + N'A$, on aura pour chacun de ses points l'équation Fig. 4.

$$\partial V[N\delta z - N\delta M - z\delta N + M\delta N]$$
$$= \delta V[N\partial z - N\partial M - z\partial N + M\partial N].$$

DÉMONSTRATION.

Fig. 4. Concevons cette surface construite & rapportée aux deux plans PAD & PAB, l'un horizontal & l'autre vertical. Soit $AP = x$, $Pp = dx$; par les points P & p soient menés perpendiculairement aux x deux plans infiniment proches, qui couperont le plan horizontal selon les droites indéfinies PH & ph, le plan vertical suivant PE & pe, & la surface courbe, suivant les deux courbes EMH & emh. Soit $PQ = y$, & par le point Q soit élevée la verticale QM, qui coupera la courbe EMH en un point M, par lequel soit imaginée la tangente MT, prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre le plan horizontal quelque part en un point T, qui sera nécessairement sur la droite PH, ou sur son prolongement. Par la verticale QM soit de même imaginé un plan vertical perpendiculaire aux y, qui coupera le plan horizontal en une droite $Q'Qt$, parallèle aux x, & la surface en une courbe dont la tangente en M rencontrera la droite Qt quelque part en t. Par conséquent la droite tT sera la section du plan horizontal par le plan tangent à la surface au point M. Soit Qq la courbe qui a pour symbole d'équation $V = a$; Mm un élément de l'intersection de la surface par la surface cylindrique qui auroit Qq pour base; & Gg la projection verticale de cet élément. Par le point t soit mené parallèlement à l'élément Mm une droite tR qui sera nécessairement dans le plan tangent, & soit prolongée cette droite jusqu'à la rencontre de la tangente MT, qu'elle coupera en un point R, par lequel soit abaissée la verticale Rr; si l'on mène tr, on aura la projection horizontale de tR. Soit menée $t\theta$ perpendiculairement aux x, & θK parallèle à l'élément Gg; cette droite sera la projection verticale de tR, & l'on aura par conséquent $PK = Rr$, & la droite KR sera horizontale; enfin soit menée la petite horizontale Gg.

Cela posé, les deux triangles $QQ'q$ & tQr seront semblables & donneront $QQ':Q'q::tQ:Qr$; or, on a vu (Théorème I), que le rapport de QQ' à $Q'q$ est égal à celui de $-\frac{\partial V}{dy}$ à $\frac{\delta V}{dx}$; de plus la sous-tangente tQ est $=\frac{z dx}{\delta z}$; donc on aura (A) $-Qr \times \partial V . \delta z = z dy \delta V$. Pour trouver l'expression de $Qr = VR$, il faut considérer que les triangles MVR & MQT sont semblables & donnent $-\partial z : dy :: (z - Rr) : VR$; d'où l'on tire VR ou $Qr = -(z - Rr)\frac{dy}{\partial z}$. Mais Rr est $= PK$, & les deux triangles semblables θPK & Ggg donnent $Gg : gg :: \theta P$ (ou $\frac{z dx}{\delta z}$) $: PK$; d'où l'on tire PK ou $Rr = \frac{z dx}{\delta z} . \frac{gg}{Gg}$; donc, en substituant cette valeur, on aura

$$Qr = -\left[z - \frac{z dx}{\delta z} . \frac{gg}{Gg}\right]\frac{dy}{\partial z},$$

& par conséquent l'équation (A) deviendra

$$(B)\ \left[\delta z - dx . \frac{gg}{Gg}\right]\partial V = \partial z \delta V,$$

dans laquelle il ne s'agit plus que de trouver le rapport de gg à Gg, ou celui de dz à dx pris dans l'équation de la courbe Gg.

Cette équation est par hypothèse $z = M' + N'A$, ou $\frac{z-M'}{N'} = A$; d'où l'on tire par la différentiation, dz ou $gg = dM' + \frac{z-M'}{N'} dN'$; donc, l'équation (B) revient à celle-ci,

$$(C)\ [N'\delta z - N'dM' + (z-M')dN']\partial V = N'\partial z \delta V.$$

Il reste donc à substituer aux quantités M', N', dM' & dN' leurs valeurs en quantités données immédiatement.

Or, puisque les quantités M' & N' sont ce que deviennent

respectivement M & N, en éliminant y à l'aide de l'équation $V = a$, si l'on imagine les surfaces qui auroient pour symboles d'équations $M = z$ & $N = z$, il est évident que M' & N' sont les ordonnées de ces surfaces considérées Fig. 3. dans la surface cylindrique qui a Qq pour base; donc *(fig. 3)* la droite QN considérée comme ordonnée de la courbe Nn, sera $= M'$; de même la droite QL regardée comme ordonnée de la courbe Ll sera $= N'$. Mais cette abstraction n'empêche pas que les droites QN & QL ne soient, pour le point Q, les ordonnées des surfaces dont les équations sont représentées par $M = z$ & $N = z$; donc, dans l'équation *(C)* il faudra mettre M à la place de M', & N à la place de N'.

Fig. 4. Il n'en est pas de même des différentielles dM' & dN'; ces quantités ne sont point égales à dM & dN. En effet, dM & dN sont les différentielles des ordonnées QN & QL, prises de quelque manière que puisse varier x & y, c'est-à-dire, sans qu'il y ait de rapport déterminé entre dx & dy, au lieu que dM' & dN' sont les différentielles de ces ordonnées considérées comme mobiles sur la surface cylindrique verticale, c'est-à-dire, prises dans cette hypothèse que si AP devient Ap, PQ devienne pk; enfin elles sont les différentielles partielles des ordonnées M & N, prises en regardant V comme constant; donc, on aura les quantités dM' & dN' en substituant à la place de $\frac{dy}{dx}$ dans dM & dN sa valeur prise dans l'équation $dV = 0$ ou $dx \cdot \frac{\delta V}{dx} + dy \frac{\partial V}{dy} = 0$.

$$\text{Or, on a } dM = dx \frac{\delta M}{dx} + dy \frac{\partial M}{dy}$$

$$\& \ dN = dx \frac{\delta N}{dx} + dy \frac{\partial N}{dy};$$

$$\text{on aura donc } dM' = \delta M - \partial M \frac{\delta V}{\partial V}$$

$$\& \ dN' = \delta N - \partial N \frac{\delta V}{\partial V};$$

& substituant ces valeurs dans l'équation *(C)*, on aura

$$\partial V[N\delta z - N\delta M - z\delta N + M\delta N]$$
$$= \delta V[N\partial z - N\partial M - z\partial N + M\partial N]$$

Donc, &c. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Cette démonstration est indépendante de la nature de la courbe qui a dû servir à la construction de la surface; donc, il est indifférent à la vérité du Théorème, que cette courbe soit ou ne soit pas continue. Or, on peut employer une courbe discontinue pour cette construction; donc, il y a des surfaces discontinues qui satisfont à l'équation précédente aux différences partielles.

REMARQUES.

Dans tout ce qui précède, j'ai supposé, non-seulement que la courbe donnée fut discontinue & tracée au hasard, mais encore que la quantité V & les facteurs M & N ne fussent pas analytiques. La première hypothèse étoit la seule nécessaire; je n'ai fait la seconde que pour une plus grande généralité, & je pouvois m'en dispenser. Il est bien en effet un grand nombre de questions où l'on est obligé de satisfaire à des conditions discontinues, mais je n'en connois pas où l'on doive employer des quantités M, N & V qui ne soient pas soumises à la loi de continuité.

J'ai encore supposé que les quantités M, N & V fussent simplement fonctions des deux variables x & y, & qu'elles pussent par conséquent être représentées par les ordonnées de surfaces courbes données; mais il peut arriver que ces quantités soient en même temps fonctions de z, & qu'elles ne puissent plus être représentées que par des aires de surfaces courbes, ou par des solides variables, & terminés par des limites données. En effet, les équations $M = \omega$, $N = \omega$ & $V = \omega$ . . . &c. étant alors à quatre variables, ne peuvent plus être construites simplement avec des lignes droites,

parce que l'eſpace ne nous offre que trois dimenſions, & que ces équations en ont quatre. Or, l'uſage des quadratures & des cubatures eſt peu commode dans les conſtructions, ſur-tout lorſqu'on eſt obligé d'opérer ſur des aires & des ſolides diſcontinus. Néanmoins il ſe préſente ici deux cas, ou les quantités *M, N* & *V* ſont analytiques, ou elles ſont diſcontinues; dans le premier cas, l'analyſe nous donne des moyens de conſtruire les équations où elles ſe trouvent, d'une manière analogue à celle que j'ai déjà employée ; dans le ſecond, outre que je ne connois aucune queſtion qui le produiſe, il ne ſera pas plus difficile de conſtruire l'équation, que de repréſenter les quantités *M, N* & *V,* qui ne peuvent pas être données ſans être repréſentées. Ainſi je me contenterai de conſtruire les intégrales dans l'hypothèſe que ces grandeurs ſoient analytiques, ce qui n'empêche pas que la courbe donnée ne puiſſe être diſcontinue. Je commence par le cas le plus ſimple.

PROBLÈME III.

Conſtruire l'équation $z = \varphi V$ *de manière que ſon lieu géométrique paſſe par une courbe donnée à volonté, & dont les projections horizontale & verticale aient pour ſymboles d'équations* $y = Fx$ *&* $z = fx$, *les fonctions* Fx *&* fx *étant continues ou diſcontinues, mais la quantité* V *étant une fonction analytique & donnée des trois variables* x, y *&* z.

SOLUTION.

Fig. 5. Soient *AP, AD* & *AB* les axes des trois coordonnées rectangulaires x, y & z; smS la courbe donnée par laquelle doit paſſer la ſurface à conſtruire, rqR & sgS' les projections de cette courbe, & Q le point pour lequel il s'agit de conſtruire l'ordonnée verticale QM de la ſurface. Cela poſé, ſuppoſons pour un inſtant que cette verticale ſoit connue, & que l'on ait $QM = a$; il eſt évident que ſi l'on mettoit a à la place de z dans V, qui par-là deviendroit une fonction de x & y que j'indique par V'; que ſi l'on conſtruiſoit

construisoit la courbe Qq dont l'équation fut $V' = \alpha$, la constante α étant telle que la courbe passât par le point Q, & qu'ensuite on imaginât la surface cylindrique qui auroit Qq pour base, cette surface couperoit la surface demandée en une courbe Mm qui seroit plane & horizontale, puisque sa projection verticale Gg seroit une droite horizontale, dont l'équation seroit $z = \text{const.}$ Il est clair de plus, 1.° que cette valeur constante de z seroit $z = a$; 2.° qu'ayant mené $q\pi$ parallèle aux y, & élevé la verticale πg, on auroit $\pi g = qm = QM = PG = a$; mais l'on ne connoît pas cette valeur de z, qui est au contraire l'objet du Problème.

Soit donc fait z égale à une certaine constante a' prise à volonté, & que je suppose représentée par PG''; soit mise cette valeur dans V, qui par-là deviendra $'V$; soit construite la courbe Qq'' dont l'équation soit $'V = \alpha'$, cette constante étant telle que la courbe passe par le point Q; soit menée $q''\pi''$ parallèle aux y, & élevée la verticale $\pi''h'$, qui rencontrera la droite horizontale menée par le point G'' en un point g''; cela fait, si les points g'' & h' coïncidoient, la valeur de $z = PG'' = a'$ seroit bonne, & l'on auroit $PG'' = QM$. Mais supposons que les points g'' & h' ne se confondent pas, on fera z égale à une autre constante a'' qu'on portera de P en G', on mettra a'' à la place de z dans V, qui deviendra $''V$, & l'on construira une nouvelle courbe Qq' qui aura pour équation $''V = \alpha''$; cette constante faisant passer la courbe par le point Q, on mènera $q'\pi'$ parallèle aux y, & l'on élevera la verticale $\pi'h'$ qui coupera la droite horizontale menée par le point G' quelque part en un point g'. On continuera ainsi de suite à déterminer par le même procédé tant de points $g''g'g$...&c. qu'on voudra, par lesquels on fera passer la courbe $g''g'g$, qui coupera sgS' quelque part en un point g, par lequel on abaissera la verticale $g\pi$, on fera $QM = \pi g$, & le point M sera dans la surface demandée. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

Quelle que ſoit la courbe donnée smS, une ſurface conſtruite par le procédé que je viens de décrire, aura donc cette propriété, qu'étant coupée par une ſurface dont l'équation ſera $V =$ conſt. quelconque, elle donnera pour interſection une courbe plane & horizontale. C'eſt cette propriété qui peut s'exprimer analytiquement, quoique la courbe donnée puiſſe être diſcontinue; & ſon expreſſion eſt l'équation différentielle de la propoſée $z = \phi V$, c'eſt-à-dire, $\partial V \delta z = \delta V \partial z$, comme on le verra dans la propoſition ſuivante.

THÉORÈME III.

Toute ſurface conſtruite par le procédé du Problème précédent, & qui par conſéquent aura la propriété d'être coupée ſuivant une courbe plane & horizontale par toute ſurface qui aura pour équation, V (fonction de x, y & z) $=$ conſt. donnera dans chacun de ſes points $\partial V \delta z = \delta V \partial z$.

DÉMONSTRATION.

Fig. 2. Tout étant de même dans la figure 2 que pour le Théorème I, ſoit Mm l'interſection de la ſurface conſtruite par celle qui auroit pour équation $z =$ certaine conſtante, il eſt évident que la projection horizontale Qq de cette courbe aura pour équation $V' = a$, & que tout ce qui a été dit dans la démonſtration du Théorème I, peut s'appliquer ici; car les triangles $QQ'q$ & tQT ſeront toujours ſemblables & donneront de même $\partial V' \delta z = \delta V' \partial z$. Mais l'on a $\delta V' = \delta V$ & $\partial V' = \partial V$; en effet, pour avoir δV il faut différentier V en regardant z & y comme conſtans, de même pour avoir ∂V, il faut différentier V ſans faire varier x & z; or dans V', z eſt déjà conſtant par conſtruction, ou, pour mieux dire, V' n'eſt autre choſe que V où l'on regarde z comme conſtant; donc, $\delta V'$ ſera égale à la différentielle de V, priſe en regardant z & y comme conſtans; donc, on aura $\delta V' = \delta V$, pareillement $\partial V' = \partial V$;

donc, l'équation aux différences partielles que l'on vient de trouver, est la même que celle-ci $\partial V \delta z = \delta V \partial z$.

COROLLAIRE I.

Il suit de la comparaison de ce Théorème avec le Théorème I, que soit que la quantité V renferme ou ne renferme pas la variable z, si une surface satisfait à l'équation $z = \varphi V$, elle satisfera aussi à celle-ci $\partial V \delta z = \delta V \partial z$.

COROLLAIRE II.

Donc, *si l'équation aux différences partielles* M $\frac{\delta z}{dx}$ + N $\frac{\partial z}{dy} = 0$, *dans laquelle les facteurs* M *&* N *sont fonctions de* x, y *&* z, *est intégrable en traitant comme constante la quantité* z *qui se trouve dans les facteurs, & que son intégrale soit* z = φV, *cette équation sera aussi intégrable en regardant* z *comme variable, & son intégrale sera encore* z = φV.

Quoique cette proposition soit étrangère à l'objet de ce Mémoire, je la crois d'une assez grande utilité pour trouver ici sa place. On vient d'en voir la démonstration par des considérations géométriques, on peut s'en assurer encore par la différentiation, & je pense qu'on ne sera pas fâché d'en voir la démonstration analytique par l'intégration.

Soit $dz = p\,dx + q\,dy$, la proposée $M\frac{\delta z}{dx} + N\frac{\partial z}{dy} = 0$, deviendra $Mp + Nq = 0$, & donnera par la substitution

$$dz = p\,dx - \frac{Mp}{N}\,dy = \frac{p}{N}\,[N\,dx - M\,dy].$$

Soit actuellement ω le facteur qui rendroit la formule $N\,dx - M\,dy$ différentielle complète, en regardant z comme constant, & soit V son intégrale, on aura

$$dz = \frac{p}{N\omega}\,[N\omega\,dx - M\omega\,dy] = \frac{p}{N\omega}\,[\delta V + \partial V].$$

& par conséquent si V n'étoit pas fonction de z, on auroit $z = \varphi V$. Mais en regardant z comme variable, la quantité

$\delta V + \partial V$ n'eſt pas une différentielle complète, il manque le terme $'dV$, $'d$ étant le caractère de la différentielle d'une quantité priſe en ne faiſant varier que z; ſoit donc ajouté de part & d'autre le terme $\frac{p}{N\omega}\, 'dV$, on aura

$$dz + \frac{N\omega}{p}\, 'dV \text{ ou } \left[dz + \frac{N\omega}{p}\,\frac{'dV}{dz}\,dz\right]$$
$$= \frac{p}{N\omega}\left[\delta V + \partial V + 'dV\right] = \frac{p}{N\omega}\,dV,$$

ou enfin $dz = \frac{p}{N\omega + p\frac{'dV}{dz}} \cdot dV$, dont l'intégrale eſt encore $z = \varphi V$. Donc, &c.

En effet, on ſait que l'intégrale de $dy\,\delta z - a\,dx\,\partial z = 0$ eſt $z = \varphi\,(ax + y)$, & l'intégrale de $dy\,\delta z - z\,dx\,\partial z = 0$ eſt $z = \varphi\,(zx + y)$. Ces deux intégrales, comme leurs différentielles, ne diffèrent l'une de l'autre, qu'en ce que dans la ſeconde, la variable z tient par-tout la place qu'occupe la conſtante a dans la première. De même, l'intégrale de $dy\,\delta z - Z\,dx\,\partial z = 0$, Z étant une fonction quelconque de z, ſera $z = \varphi\,(Zx + y)$.

On pourra m'objecter que lorſque j'ai ajouté aux deux membres de l'équation $dz = \frac{p}{N\omega}\,[\delta V + \partial V]$, la quantité $\frac{p}{N\omega}\, 'dV$, je pouvois encore leur ajouter le terme $\frac{p}{N\omega}\, d.\psi.z$; que par-là l'équation ſeroit devenue

$$dz + \frac{p}{N\omega}\,\frac{'dV}{dz}\,dz + \frac{p}{N\omega}\,d.\,\frac{\psi z}{dz}\,dz = \frac{p}{N\omega}\,[dV + d\,\psi z],$$

dont l'intégrale eſt $z = \varphi\,(V + \psi z)$, & non pas $z = \varphi V$.

Je répondrai que tant que la fonction φ reſtera arbitraire comme elle l'eſt ici, il ſera indifférent d'écrire $z = \varphi V$ ou $z = \varphi\,(V + \psi z)$, parce que les deux équations ſe ſuppoſent réciproquement l'une l'autre. Pour le démontrer,

ſoit $'\varphi$ le caractère de la fonction φ renverſée, c'eſt-à-dire, qu'ayant $z = \varphi V$ l'on ait $V = '\varphi z$; cela poſé, l'équation $z = \varphi (V + \psi z)$ donnera $V + \psi z = '\varphi z$, ou $V = '\varphi z - \psi z$. Or, la fonction $'\varphi$ étant arbitraire, on a $'\varphi z - \psi z =$ fonction arbitraire de z, $= '\varphi z$; donc, on aura $V = '\varphi z$, & par conſéquent $z = \varphi V$. Ainſi cette objection n'infirme en aucune manière la vérité de la propoſition, & j'en tire la concluſion ſuivante.

COROLLAIRE III.

Puiſque l'équation $z = \varphi V$, à laquelle ſatisfait la ſurface conſtruite par le Problème précédent, eſt la même que celle-ci $z = \varphi (V + \psi z)$, tant que la fonction φ ſera arbitraire, il s'enſuit que cette ſurface aura encore la propriété d'être coupée ſuivant une courbe plane & horizontale, par une ſurface dont l'équation ſera $V + \psi z =$ conſt. ou $V = \psi z$, ou enfin $z = '\psi V$. *Donc, deux ſurfaces conſtruites par le procédé précédent, rapportées à la même origine des coordonnées, & dont les équations ſeront par conſéquent* $z = \varphi V$ *&* $z = \psi V$, *auront la propriété de ſe couper réciproquement ſuivant une courbe horizontale.* Voilà la propriété générale qui eſt exprimée par l'équation $\partial V \delta z = \delta V \partial z$; je n'avois fait juſqu'ici qu'en développer des cas particuliers.

Cette propriété peut ſe démontrer encore directement par l'analyſe. En effet, ſoit éliminée z des deux équations $z = \varphi V$ & $z = \psi V$, on aura $\varphi V = \psi V$ pour équation de la projection horizontale de l'interſection des deux ſurfaces; or, l'équation $\varphi V = \psi V$ donne $V =$ conſt. on aura donc $z =$ conſt. pour équation de la projection verticale de cette interſection; donc, &c.

PROBLÈME IV.

Conſtruire l'équation générale $M = \varphi V$, *de manière que la ſurface qui en ſera un lieu géométrique, paſſe par une courbe à double courbure, continue ou diſcontinue, mais donnée, & dont les*

projections horizontale & verticale aient pour symboles d'équations y = F x & z = f x; *les quantités* M & V *étant des fonctions analytiques & données des trois variables* x, y & z.

SOLUTION.

Soient, comme dans les figures précédentes, *AP, AD* & *AB* les trois axes des coordonnées rectangulaires, *smS* la courbe donnée par laquelle doit passer la surface à construire, *rqR* & *sgS'* les projections de cette courbe que je suppose construites, & *Q* le point pour lequel il s'agit de construire l'ordonnée *QM* de la surface. Cela posé, imaginons une surface courbe dont l'équation soit $V = \alpha$, α étant une constante dont la détermination dépend des considérations suivantes; cette surface coupera la surface demandée en une courbe dont la projection horizontale aura pour équation ce que devient la proposée $M = \varphi V$ en y substituant pour *z* sa valeur prise dans $V = \alpha$, & la projection verticale de cette courbe aura pour équation ce que devient $'M = \varphi V$ en mettant pour *y* sa valeur prise dans $V = \alpha$. Soient donc $'M$ la fonction de *x* & *y*, que devient la quantité *M* en éliminant *z* à l'aide de $V = \alpha$, & M' la fonction de *x* & *z* que devient la même quantité en éliminant *y*, il est évident que les équations des projections de la courbe d'intersection seront

$'M = A$ pour la projection horizontale,
& $M' = A$ pour la projection verticale,

A étant une constante indéterminée & la même pour les deux équations.

Nous avons donc deux constantes indéterminées dans ces équations, 1.° α qui entre dans $'M$ & M'; 2.° la quantité *A*; supposons que l'une de ces constantes, α, par exemple, soit déterminée, ou, pour mieux dire, donnons à α une certaine valeur prise à volonté, & soit construite sur le plan horizontal la courbe Qq'' qui ait pour équation $'M = A$, la constante *A* étant telle que cette courbe passe par le point

Q; ſoit auſſi conſtruite ſur le plan vertical la courbe $G''g''$ qui ait pour équation $M' = A$, A ayant la valeur qui lui convient pour ſatisfaire à la courbe Qq'', c'eſt-à-dire, A étant ce que devient $'M$ en mettant AP pour x, & PQ pour y; enfin ſoit $N'n'$ l'interſection de la ſurface demandée par celle qui a pour équation $V = \alpha$, il eſt évident que ſi α avoit ici la valeur qui lui convient, la courbe $N'n'$ couperoit la courbe donnée smS en un point dont la projection horizontale ſeroit en q''; ou, ce qui revient au même, qu'ayant mené $q''\pi''$ parallèle aux y, & élevé la verticale $\pi''h'$, les points g'' & h' devroient coïncider. La queſtion eſt donc réduite à donner à α une valeur telle que ces deux points ſe confondent.

Pour cela, ſoit donné à α une autre valeur un peu différente; ſoient conſtruites les nouvelles courbes Qq' & $G'g'$ dont les équations ſoient $'M = A$ & $M' = A$, α ayant ſa nouvelle valeur dans $'M$ & M', & A étant toujours telle que la courbe Qq' paſſe par le point Q, ſoit menée $q'\pi'$ parallèle aux y, & élevée la verticale $\pi'g'$, ce qui donnera un nouveau point g'. Soit donnée à α une troiſième valeur pour avoir un autre point g, & ainſi de ſuite. Par tant de points g'', g', g.....&c. qu'on voudra, déterminés & conſtruits de la même manière, ſoit menée la courbe $g''g'g$ qui rencontrera sgS' en un point g, par lequel on abaiſſera la verticale $g\pi$; ſoit menée πq parallèle aux y, & qui coupera la courbe donnée rqR en un point q; enfin ſoit conſtruite la courbe Qq qui ait pour équation $'M = A$, les deux conſtantes α & A ayant des valeurs telles que cette courbe paſſe par les deux points déterminés Q & q, je dis que la valeur de α qu'on aura trouvée, ſatisfera à la queſtion. Car ſi on conſtruit la courbe Gg, α & A ayant dans ſon équation $M' = A$, les valeurs qui ſatisfont à la courbe Qq, cette courbe paſſera par le point g; donc, ayant élevé la verticale PG, ſi l'on porte PG de Q en M, le point M ſera dans la ſurface demandée.

En effet, ſoit Mm la courbe dont les projections horizontale

& verticale ſont Qq & Gg, cette courbe ſera ſur une des ſurfaces qui ſatisfont à l'équation $M = \varphi V$, puiſqu'elle eſt l'interſection d'une pareille ſurface avec une autre dont l'équation eſt $V = \alpha$; de plus, cette courbe ſera ſur celle de ces ſurfaces qui paſſe par la courbe smS, puiſque la courbe Mm & la courbe smS ſe coupent, ce dont on peut s'aſſurer en remarquant que le point q eſt la projection commune de deux points qui ſe trouvent chacun ſur une des courbes Mm & smS, & dont le point g eſt la projection verticale commune. Or, deux points qui ont mêmes projections horizontale & verticale, ſe confondent.

Donc, &c.

COROLLAIRE.

Quelle que puiſſe être la courbe donnée smS, qu'elle ſoit ſoumiſe ou non à la loi de continuité, la ſurface conſtruite par le procédé précédent, n'en aura pas moins cette propriété, que ſi on la coupe par une ſurface courbe, dont l'équation ſoit $V =$ conſtante quelconque, on aura pour ſection une courbe à double courbure, dont les projections horizontale & verticale auront pour équation, la première $'M = A$, & la ſeconde $M' = A$, $'M$ étant ce que devient la fonction M donnée en x, y & z, en ſubſtituant pour z ſa valeur priſe dans $V =$ conſt. & M' ce que devient la même quantité M, en éliminant y à l'aide de l'équation $V =$ conſt. C'eſt cette propriété qui peut s'exprimer analytiquement, quoique la ſurface ſoit diſcontinue; & ſon expreſſion eſt l'équation aux différences partielles de $M = \varphi . V$.

Avant que de le démontrer, différentions d'abord cette équation.

En ne faiſant varier que x, on a $\delta M = \delta V \varphi' V$,
En ne faiſant varier que y, on a $\partial M = \partial V \varphi' V$,
En ne faiſant varier que z, on a $'d M = 'd V \varphi' V$;

donc, en éliminant la quantité arbitraire $\varphi' V$, on aura les trois équations ſuivantes aux différences partielles.

(A).

(A) $\partial V \delta M - \delta V \partial M = 0.$

(B) $'dV \delta M - \delta V 'dM = 0.$

(C) $'dV \partial M - \partial V 'dM = 0.$

dont deux étant données, la troisième s'ensuit nécessairement.

Chacune de ces équations n'est pas la différentielle complète de l'équation $M = \varphi V$; car la première (A), ne comprend pas les différentielles partielles de V & de M prises par rapport à z, & par conséquent seroit la même que s'il n'y avoit point de z dans V & dans M; de même, l'équation (B) qui ne renferme pas de différentielles prises en ne faisant varier que y, seroit la même quand même il n'y auroit point de y dans les quantités M & V; enfin, la troisième équation (C), ne renfermant point de quantités δM, δV, suppose que les fonctions M & V ne contiennent point x. Ainsi, c'est le système des trois équations (A), (B) & (C), ou tout au moins des deux quelconques d'entr'elles, qu'il faut regarder comme la différentielle de l'équation $M = \varphi V$. Mais cette forme est peu commode & d'ailleurs inusitée; il faut trouver une équation unique qui tienne lieu des précédentes, & qui soit telle que deux d'entr'elles étant données, il en vienne la troisième.

Pour cela, je reprends l'équation $M = \varphi V$, & je remarque que la quantité z est une certaine fonction de x & y; d'où il suit qu'absolument parlant, les quantités M & V ne sont que des fonctions de x & y; par conséquent lorsque l'on fait varier les quantités par rapport à x, elles varient encore par rapport à z, en tant que z est fonction de x & y. Soit Δ le caractère de cette manière de différentier, la différentielle ΔM sera de cette forme $\Delta M = p\,dx + q\,\delta z$, & il est évident que le terme $p\,dx$ est celui que l'on auroit en ne faisant varier M que par rapport à dx. On aura donc $p\,dx = \delta M$; mais $q\,\delta z$ est la différentielle de M, prise en ne faisant varier que z dont on ne prend que la partie qui dépend de la variation de x; donc on aura $q\,\delta z = \frac{'dM}{dz}\,\delta z$. Ainsi l'on aura $\Delta M = p\,dx + q\,\delta z = \delta M + \frac{'dM}{dz}\,\delta z$.

Pareillement, lorsqu'on fait varier M & V par rapport à y, elles varient encore par rapport à z, en tant que z est fonction de x & y; d'où il suit que si Δ' est le caractère de cette différentiation, on aura

$$\Delta' M = \partial M + \frac{dM}{dz} \partial z;$$

on aura aussi $\Delta V = \delta V + \frac{dV}{dz} \delta z$

$$\& \quad \Delta' V = \partial V + \frac{dV}{dz} \partial z.$$

Avant que d'aller plus loin, il faut bien distinguer les différentes manières de différentier représentées par les caractères δ, ∂, Δ & Δ' que j'expose très-clairement de la manière suivante.

Pour Δ, x varie seule } & z ne varie point.
Pour d, y varie seule }

Pour Δ', x varie } & z varie aussi en tant que fonction de x & y.
Pour Δ, y varie }

Cela posé, on aura $\Delta M = \Delta V \varphi' V$; on aura aussi $\Delta' M = \Delta' V \varphi' V$; éliminant l'arbitraire $\varphi' V$, on aura l'équation

$$\Delta M \,.\, \Delta' V - \Delta V \,.\, \Delta' M = 0;$$

substituant à la place de ces quantités leurs valeurs que nous venons de trouver, & réduisant, on trouvera pour équation différentielle unique & complète de $M = \varphi V$,

$$\text{(D)} \quad \begin{aligned} &\delta z\, [\partial V dM - dV \partial M] \\ &- \partial z\, [\delta V dM - dV \partial M] \\ &+ dz\, [\partial V \delta M - \delta V \partial M] = 0. \end{aligned}$$

Cette équation est la différentielle unique & complète de $M = \varphi V$, 1.° parce qu'elle renferme, comme l'équation $\Delta V \,.\, \Delta' M - \Delta' V \,.\, \Delta M = 0$, les différences partielles des quantités M & V, prises de toutes les manières possibles; 2.° parce qu'en y supposant deux des trois équations (A), (B) & (C), la troisième s'ensuit nécessairement.

Je vais faire voir actuellement que la surface précédemment construite, satisfait à cette équation.

THÉORÈME IV.

Toute surface courbe construite par le procédé du Problème précédent, & qui, quoique discontinue, jouira par conséquent de la propriété énoncée dans le commencement du Corollaire, donnera dans chacun de ses points l'équation (D).

DÉMONSTRATION.

Tout étant dans la *figure 4* comme pour le Théorème II, soit Mm l'intersection de la surface construite par la surface dont l'équation seroit $z =$ const. Cette constante étant telle que la courbe Mm passe par un certain point M; les courbes Qq & Gg qui en seront les projections horizontale & verticale, auront pour équation, la première $'M = A$, & la seconde $M' = A$. Cela posé, les triangles semblables $QQ'q$ & tQr donneront de la même manière que pour le Théorème II, $Qr = tQ \times \frac{Q'q}{QQ'}$; or, on a $tQ = z\,\frac{dx}{\delta z}$; de plus le rapport de QQ' à $Q'q$ est égal à celui de dx à dy pris dans l'équation de la courbe Qq, c'est-à-dire, dans l'équation $'M = A$. Soit donc différentiée cette équation, ce qui donne $d\,'M = 0$, ou parce que $'M$ est fonction de x & de y, $dx\,\frac{\delta' M}{dx} + dy\,\frac{\delta' M}{dy} = 0$, & par conséquent $\frac{dy}{dx} = -\frac{\delta' M}{dx} : \frac{\delta' M}{dy}$; donc on aura $Qr = -\frac{z\,\delta' M\,dy}{\delta' M\,\delta z}$.

Fig. 4.

Pareillement, les triangles semblables Ggg & θPK donneront PK ou $Rr = \theta P\,\frac{gg}{Gg}$; or, on a $\theta P = tQ = \frac{z\,dx}{\delta z}$, de plus, le rapport de gg à Gg est égal à celui de dz à dx, pris dans l'équation de la courbe Gg, c'est-à-dire, dans l'équation $M' = A$; soit donc différentiée cette équation, ce qui donne $dM' = 0$, ou parce que M' est fonction de

x & de z $dx \frac{\delta M'}{dx} + dz \frac{'dM'}{dz} = 0$, & par conséquent $\frac{dz}{dx} = - \frac{\delta M'}{dx} : \frac{'dM'}{dz}$; donc, on aura $Rr = - \frac{z \delta M' dz}{'dM' \delta z}$.
Mais les triangles semblables MVR & MQT donnent $- \partial z : dy :: z - Rr : VR = Qr$; donc, on aura en substituant les valeurs que l'on vient de trouver, & réduisant,

(E) $\delta z \partial' M \, 'dM' - \partial z \delta' M \, 'dM' + dz \delta M' \partial' M = 0$;

il s'agit actuellement de trouver en M & V les valeurs des quantités $\delta' M$, $\partial' M$, $\delta M'$ & $'dM'$.

La quantité $d'M$ est ce que devient la différentielle dM, lorsqu'on élimine z & dz dans l'hypothèse de $V =$ const. or, on a généralement

$$(F) \quad dM = dx \frac{\delta M}{dx} + dy \frac{\partial M}{dy} + dz \frac{'dM}{dz},$$

& l'équation $V =$ const. donne $dV = 0$, ou

$$(G) \quad dx \frac{\delta V}{dx} + dy \frac{\partial V}{dy} + dz \frac{'dV}{dz} = 0;$$

donc, en substituant dans (F) à la place de dz, sa valeur prise dans l'équation (G), on aura

$$\partial' M = \delta M + \partial M - [\delta V + \partial V] \frac{'dM}{'dV},$$

d'où l'on tirera $\delta' M = \delta M - \delta V \frac{'dM}{'dV}$

$$\& \ \partial' M = \partial M - \partial V \frac{'dM}{'dV};$$

pareillement dM' est ce que devient la différentielle dM lorsqu'on en élimine y & dy en supposant $V =$ const. donc en substituant dans (F), à la place de dy sa valeur prise dans l'équation (G), on aura

$$dM' = \delta M + 'dM - [\delta V + 'dV] \frac{\partial M}{\partial V};$$

d'où l'on tirera $\delta M' = \delta M - \delta V \frac{\partial M}{\partial V}$,

$$\& \ 'dM' = 'dM - 'dV \frac{\partial M}{\partial V};$$

donc, en substituant ces valeurs dans l'équation (E), on aura

$$o = \delta z [\partial M - \partial V \frac{ꝺM}{ꝺV}] [ꝺM - ꝺV \frac{\partial M}{\partial V}]$$
$$- \partial z [\delta M - \delta V \frac{ꝺM}{ꝺV}] [ꝺM - ꝺV \frac{\partial M}{\partial V}]$$
$$+ dz [\delta M - \delta V \frac{\partial M}{\partial V}] [\partial M - \partial V \frac{ꝺM}{ꝺV}].$$

Multipliant tout par $ꝺV \partial V$, l'équation se trouvera multiple du facteur $\partial V ꝺM - ꝺV \partial M$, & donnera après la division,

(D) $\delta z [\partial V ꝺM - ꝺV \partial M] - \partial z [\delta V ꝺM - ꝺV \delta M]$
$+ dz [\partial V \delta M - \delta V \partial M] = o.$

Donc, &c.

REMARQUES.

1.° Le cas que je viens de traiter est général, & renferme tous ceux qui précèdent; donc, si dans l'équation (D) on fait les suppositions qui peuvent les ramener aux différens cas des Théorèmes I, II & III, elle doit donner les mêmes équations aux différences partielles. Par exemple, pour la ramener à l'équation du Théorème III, dont l'intégrale est $z = \varphi V$, il faut faire $M = z$ & $ꝺM = dz$, $\delta M = \delta z$ & $\partial M = \partial z$. Or, si l'on introduit ces valeurs dans l'équation (D), on trouve, toute réduction faite, $\partial V \delta z = \delta V \partial z$. Donc, la différentielle que j'ai donnée de $z = \varphi V$ est complète; ce qui est une nouvelle confirmation de ce que j'ai dit dans les Corollaires du Théorème III.

2.° L'équation (D), outre les différentielles partielles δz & ∂z, renferme encore la différentielle totale dz; par-là elle n'est pas sous la forme des équations ordinaires aux différences partielles, mais l'on a $dz = \delta z + \partial z$; donc, cette équation deviendra

$$\delta z \left\{ \begin{matrix} \partial V ꝺM - ꝺV \partial M \\ + \partial V \delta M - \delta V \partial M \end{matrix} \right\} + \partial z \left\{ \begin{matrix} ꝺV \delta M - \delta V ꝺM \\ + \partial V \delta M - \delta V \partial M \end{matrix} \right\} = o,$$

ou $\delta z [\partial V [\delta M + ꝺM] - [\delta V + ꝺV] \partial M]$
$+ \partial z [\delta M [\partial V + ꝺV] - [\partial M + ꝺM] \delta V] = o.$

Actuellement, de même que δ indique une différentielle prise en ne faisant varier que x, & ∂ en ne faisant varier que y, soit δ' une différentielle prise en ne regardant comme constant que x, & ∂' en ne regardant comme constant que y, on aura

$\delta M + 'dM = \partial' M$, $\partial M + 'dM = \delta' M$, pareillement, $\delta V + 'dV = \partial' V$ & $\partial V + 'dV = \delta' V$; donc, l'équation précédente se transformera en celle-ci,

$$\delta z [\partial V \partial' M - \partial' V \partial M] + \partial z [\delta M \delta' V - \delta' M \delta V] = 0$$

qui est la forme la plus simple que l'on puisse donner à la différentielle de l'équation $M = \phi V$, M & V étant des fonctions des trois variables x, y & z, & la troisième variable z étant elle-même fonction des deux premières x & y, de manière qu'il n'y ait que deux variables indépendantes, & que l'équation $M = \phi V$ appartienne à une surface courbe.

PROBLÈME V.

Construire l'équation $M = \phi V + N \psi V$, *de manière que la surface qui en sera le lieu géométrique, passe en même temps par deux courbes continues ou discontinues, données à volonté, & dont les projections horizontales & verticales auront pour symboles d'équations*, $y = Fx$, $z = f.x$ *pour la première*, *&* $y = F'x$, $z = f'x$ *pour la seconde ; les quantités* M, N *&* V *étant fonctions quelconques, mais analytiques & données, des trois variables* x, y *&* z.

SOLUTION.

Fig. 7. Soient AP, AD & AB les trois axes des coordonnées rectangulaires x, y & z; $sm S$ une des courbes données, dont les projections horizontale & verticale rqR & sgS ont pour symboles d'équations, la première $y = Fx$, & la seconde $z = f.x$. Soit de même LNO la seconde courbe donnée, dont les projections FKE & LGT ont pour symboles d'équations $y = F'.x$ & $z = f'x$; enfin, soient AP & PQ les coordonnées qui répondent au point Q, pris à

volonté, & pour lequel il s'agit de construire l'ordonnée verticale QM. Cela posé, imaginons une surface courbe dont l'équation seroit $V = \alpha$, la constante α étant telle que cette surface coupe la surface demandée suivant une courbe NMm, dont la projection horizontale kQq passe par le point Q; & soit $GM'g$ la projection verticale de cette courbe. Il est évident que si la courbe $GM'g$ étoit construite, en élevant la verticale PM', & portant PM' de Q en M, le point M appartiendroit à la surface demandée. Donc, la question se trouve réduite à trouver la valeur de α qui satisfait à cette condition.

Soient $'M$ & $'N$ ce que deviennent les quantités M & N, en éliminant z à l'aide de l'équation $V = \alpha$; soient pareillement M' & N' ce que deviennent les mêmes quantités en éliminant y; l'équation de la courbe kQq sera $'M = A + 'NB$, & celle de la courbe $GM'g$ sera $M' = A + N'B$, les quantités A & B étant deux constantes indéterminées dont la détermination dépend de la considération suivante.

La courbe NMm se trouvant sur la surface à construire, doit couper les courbes données smS & LNO quelque part en des points N & m, dont les projections horizontales sont les points k & q, & dont les projections verticales G & g, se déterminent en menant les droites $q\pi$ & kb parallèles aux y, & en élevant par les points π & b des verticales prolongées jusqu'à ce qu'elles coupent les courbes sgS' & LGT; donc, α étant tel dans les quantités $'M$, $'N$, M' & N' que la courbe kq passe par le point Q, les constantes A & B doivent être telles que la courbe $GM'g$ passe par les points g & G; sans cela la surface à construire ne passeroit pas par les courbes données.

Soit donnée à la quantité α une certaine grandeur prise à volonté; soit aussi pris sur la courbe FkE le point k'' à volonté, & soit construite la courbe $k''Qq''$, dont l'équation soit $'M = A + 'NB$, les constantes A & B étant telles que la courbe passe par les points k'' & Q. Soit aussi construite

la courbe $G''g''$ dont l'équation soit $M' = A + N'B$, les constantes α, A & B ayant les valeurs qui conviennent à la courbe $K''Qq''$, il est évident que si la valeur donnée à α étoit la valeur requise, & que le point K'' fut celui qui convient à la courbe KQq, en menant les droites $k''b''$ & $q''\pi''$ parallèles aux y, & élevant les verticales $b''G''$ & $\pi''g''$, les points g'' & h' coïncideroient, de même que les points b'' & f'; mais comme l'on est parti d'hypothèses arbitraires, il faut supposer que les points ne coïncident pas. On conservera le même point K'', & l'on donnera à α une seconde valeur; on construira une nouvelle courbe $K''Qq'$, dont l'équation soit $'M = A + 'NB$, les constantes A & B étant telles que cette courbe passe par les points K'' & Q, on mènera $q'\pi'$ parallèle aux y, on élevera la verticale $\pi'g'$, & l'on construira la nouvelle courbe $G'g'$ dont l'équation soit $M' = A + N'B$, α, A & B ayant les valeurs qui conviennent à la courbe $K''Qq'$, & l'on aura un nouveau point g'. On déterminera de cette manière tant de points $g''g'$....&c. qu'on voudra, par lesquels on fera passer la courbe $g''g'$, qui coupera la courbe donnée sgS' en un point μ, par lequel on abaissera la verticale μV, & on mènera Vu parallèle aux y. On construira l'équation $'M = A + 'NB$, les quantités α, A & B ayant des valeurs telles que son lieu $K''Qu$ passe par les trois points déterminés K'', Q & u; enfin on construira la courbe μH qui ait pour équation $M' = A + N'B$, α, A & B ayant les valeurs qui conviennent à la courbe $K''Qu$, & l'on élevera la verticale $b''H$. Si le point H coïncidoit avec le point G, le point K'' seroit bon, & la courbe $K''Qu$ seroit la courbe KQq.

Mais le point H peut encore ne pas coïncider avec le point G; soit donc pris un autre point K' à volonté, & construite une nouvelle courbe $g''g'$, comme on a construit la courbe $g''g'$ à l'aide du point K''; ce qui donnera un nouveau point μ', qui servira à construire une autre courbe $\mu'H'$, & par conséquent à déterminer un nouveau point H'. Par tant de points H, H'...&c. qu'on voudra, déterminés de

la même manière, on fera passer la courbe HH', qui coupera la courbe donnée LGT en un point G, par laquelle on abaissera la verticale Gb, on mènera la droite bK parallèle aux y, & le point K sera déterminé.

Pour ce point K, on construira la courbe $G''G'$ qui lui convient, comme on a construit la courbe $g''g'$ pour le point K'', & la courbe $g''g'$ pour le point K', & cette courbe coupera la courbe donnée sgS' en un point g, par lequel on abaissera la verticale $g\pi$; on mènera πq parallèle aux y, & le point q sera déterminé. Enfin, on construira la courbe KQq dont l'équation soit $'M = A + 'NB$, a, A & B étant telles que cette courbe passe par les trois points K, Q & q, on construira pour ces mêmes valeurs la courbe GMg, & l'on aura les projections de la courbe NMm; on élèvera la verticale PM', on fera $QM = PM'$, & le point M sera dans la surface demandée. C. Q. F. T.

COROLLAIRE.

Quelles que puissent être les courbes données smS & LNO, la surface que l'on vient de construire aura cette propriété, que si on la coupe par une surface courbe qui ait pour équation $V =$ const. quelconque, on aura une section dont la projection verticale aura pour équation $M' = A + N'B$, dans laquelle A & B sont deux constantes qui dépendent de la nature des deux courbes smS & LNO; & les quantités M' & N' des fonctions de x & z, que l'on obtient en éliminant y des deux quantités données M & N, à l'aide de l'équation $V =$ const. C'est cette propriété générale dont l'expression est l'équation aux différences partielles de l'équation $M = \varphi V + N\psi V$.

Je pourrois le démontrer en conservant cette forme; mais comme l'équation aux différences partielles, en supposant que M, N & V soient fonctions de x, y & z, contient plus de deux mille termes, & que par conséquent je me jetterois dans des formules trop compliquées, j'aime mieux le démontrer sur le cas particulier de l'équation $z = \varphi V + N\psi V$,

où je ſuppoſerai encore les quantités N & V ſimplement fonctions de x & y; la démonſtration n'aura rien de particulier, & pourra s'étendre au cas général.

Soit différentiée l'équation $z = \varphi V + N\psi V$ en regardant y comme conſtant, & l'on aura

$$\delta z = \delta V.\varphi' V + \delta N \psi V + N \delta V \psi' V,$$

en ne faiſant varier que y,

$$\partial z = \partial V \varphi' V + \partial N \psi V + N \partial V \psi' V.$$

Multipliant la première par ∂V, la ſeconde par δV, & retranchant l'une de l'autre, on aura

$$\partial V \delta z - \delta V \partial z = [\partial V \delta N - \delta V \partial N] \psi V,$$

que je mets ſous cette forme,

$$\frac{\partial V \delta z - \delta V \partial z}{\partial V \delta N - \delta V \partial N} = \psi V. \text{ ou } \omega = \psi V;$$

ſoit différentiée cette équation de nouveau par rapport à x,

ce qui donne . . . . $\delta \omega = \delta V \psi' V$

enſuite par rapport à y, ce qui donne $\partial \omega = \partial V \psi' V$

en éliminant $\psi' V$, on aura . . . . . . $\partial V \delta \omega - \delta V \partial \omega = 0$;

enfin, remettant pour ω ſa valeur, l'équation aux différences partielles de $z = \varphi V + N \psi V$, ſera

$$(H). \quad \left.\begin{array}{l} [\partial V \delta N - \partial N \delta V] \left\{\begin{array}{l} \partial V[\delta z \delta \partial V + \partial V \delta \delta z - \partial z \delta \delta V - \delta V \delta \partial z] \\ - \delta V[\delta z \partial \partial V + \partial V \delta \partial z - \partial z \delta \partial V - \delta V \partial \partial z] \end{array}\right\} \\ - [\partial V \delta z - \delta V \partial z] \left\{\begin{array}{l} \partial V[\delta N \delta \partial V + \partial V \delta \delta N - \partial N \delta \delta V - \delta V \delta \partial N] \\ - \delta V[\delta N \partial \partial V + \partial V \delta \partial N - \partial N \delta \partial V - \delta V \partial \partial N] \end{array}\right\} \end{array}\right\} = 0;$$

équation à laquelle la ſurface conſtruite par le procédé précédent dans l'hypothèſe de $z = \varphi V + N \psi V$, doit ſatisfaire.

THÉORÈME V.

Toute ſurface qui, conſtruite par le procédé du Problème V, ſera le lieu de l'équation $z = \varphi V + N \psi V$, & qui, quoiqu'elle puiſſe être diſcontinue, jouira par conſéquent de la propriété énoncée dans le Corollaire précédent, N & V

étant des fonctions quelconques de x & y, donnera dans chacun de ses points, l'équation *(H).*

DÉMONSTRATION.

Soient AP, AD & AB les axes rectangulaires des coordonnées x, y & z; soient $AP = x$, $PP' = P'P'' = dx$; par les trois points P, P' & P'' soient menés trois plans infiniment proches perpendiculaires aux x, qui couperont le plan horizontal suivant les droites PQ, $P'Q'$, $P''Q''$, & le plan vertical suivant les droites PG, $P'G'$, $P''G''$. Soit $M M' M''$ l'intersection de la surface construite, avec celle qui auroit pour équation $V =$ const. & $QQ'Q''$, $GG'G''$ ses projections horizontale & verticale; soient prolongés les élémens QQ', MM' & GG' correspondamment jusqu'en q, m & g, & élevées les verticales QM, $Q'M'$, $Q''M''$ & qm. Enfin, soient menées Gg parallèle à PP', MN parallèle à QQ', & $M''n$ parallèle à $Q''q$; cela posé, il est évident que l'on aura $G''g = mn$. Or, mn est la différentielle seconde de l'ordonnée verticale $QM = z$, en supposant que son pied Q ne sorte pas de la courbe $QQ'Q''$, c'est-à-dire, prise en mettant à chaque différentiation, à la place de $\frac{dy}{dx}$ la valeur que donne l'équation de la courbe $QQ'Q''$; de plus, $G''g$ est la différentielle seconde de l'ordonnée PG, dont l'expression est, par hypothèse, $A + N'B$, ou parce que N' est ce que devient N en éliminant y à l'aide de l'équation de la courbe $QQ'Q''$; $G''g$ est la différence seconde de $A + NB$, prise en mettant à chaque différentiation à la place de $\frac{dy}{dx}$ la valeur que donne l'équation de la courbe $QQ'Q''$; donc, en différentiant deux fois de cette manière l'équation $z = A + NB$, on aura une équation qui sera la traduction analytique de celle-ci $G''g = mn$. Fig. 8.

Mais, puisque V ne contient point z, la surface qui a pour équation $V =$ const. est cylindrique, & cette équation est aussi celle de la courbe $QQ'Q''$; on aura par conséquent

pour cette courbe $\frac{dy}{dx} = - \frac{\delta V}{dx} \cdot \frac{dy}{\partial V}$; ainsi en différentiant $z = A + NB$, qui donne $dz = BdN$, ou $\delta z + dy \frac{\partial z}{dy} = B (\delta N + dy \frac{\partial N}{dy})$, & éliminant dy, on aura $\delta z - \frac{\delta V}{\partial V} \partial z = B (\delta N - \frac{\delta V}{\partial V} \partial N)$ ou $\frac{\partial V \delta z - \delta V \partial z}{\partial V \delta N - \delta V \partial N} = B$; & enfin pour abréger $\omega = B$; différentiant encore cette équation de la même manière, on aura $\delta \omega - \frac{\delta V}{\partial V} \partial \omega = 0$, & par conséquent $\partial V \delta \omega - \delta V \partial \omega = 0$, équation qui est la même que celle qui précède l'équation (H), & qui doit donner cette même différentielle en mettant pour ω sa valeur. Donc, &c. C. Q. F. D.

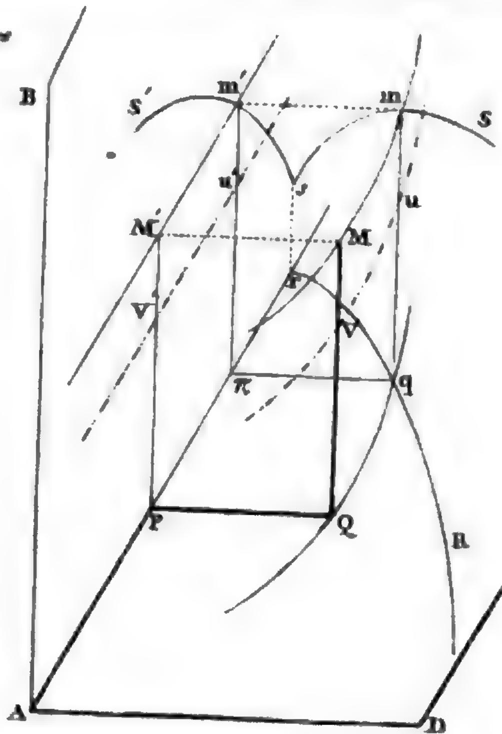
REMARQUE.

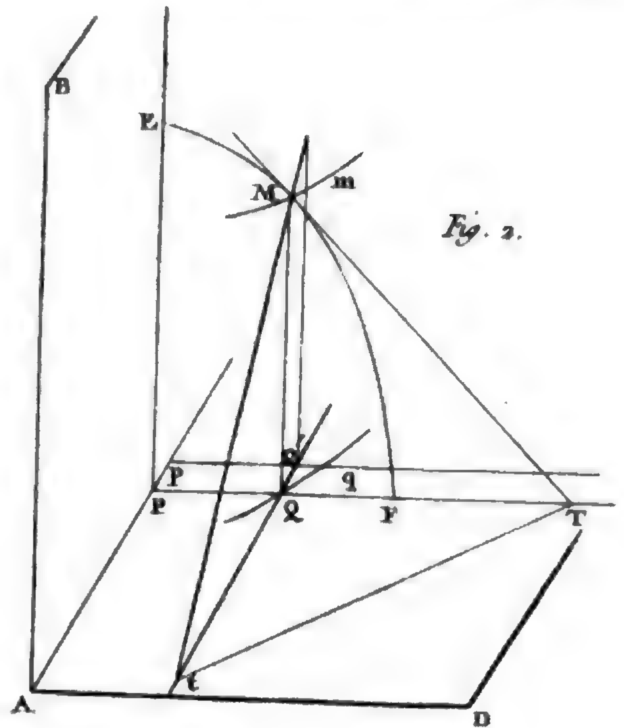
La méthode que j'ai suivie dans cette démonstration est beaucoup plus simple que celle des autres Théorèmes, elle est d'ailleurs plus générale; &, comme il est facile de le voir, rien n'empêche qu'on ne puisse l'étendre à tous les degrés; de plus, il n'y aura aucune difficulté à supposer que z entre dans les quantités N & V, & même que l'équation construite soit de cette forme, $M = \varphi V + N \psi V + PFV \ldots$ &c. $M, N, P \ldots V$ étant fonctions quelconques de x, y & z; il faudra simplement ne pas oublier d'employer, pour en trouver la différentielle, la méthode que j'ai donnée dans le corollaire du Problème IV.

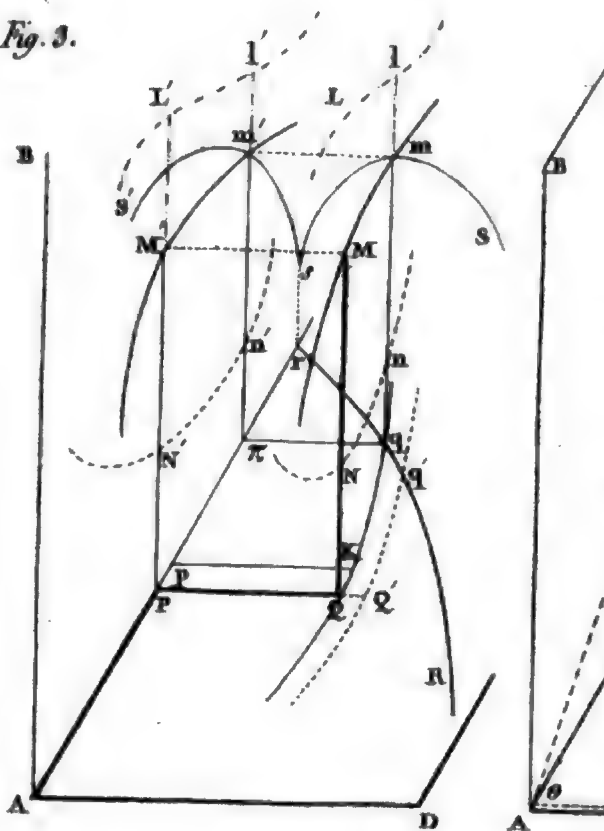
CONCLUSION.

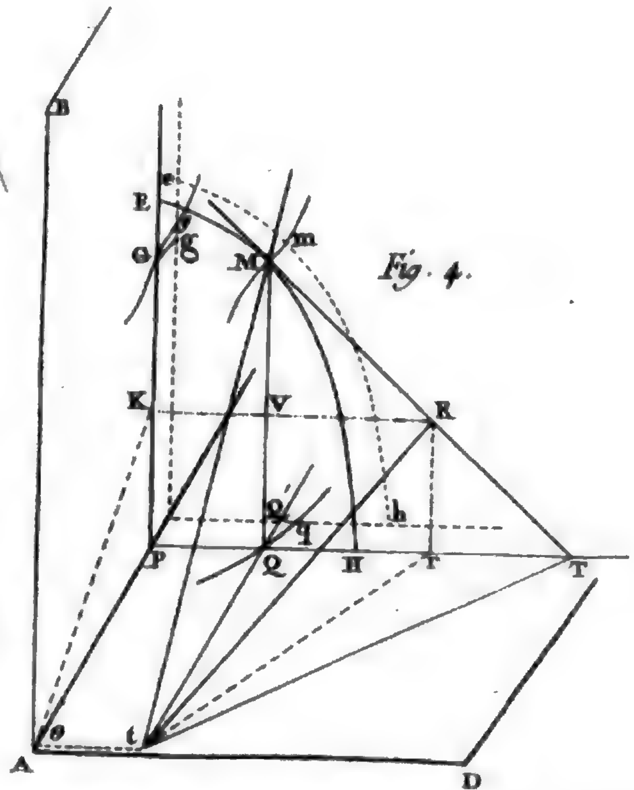
Ce Mémoire renferme les constructions des intégrales d'équations aux différences partielles, plus générales que celles que j'avois construites jusqu'à présent, & j'y démontre que les lieux géométriques de ces intégrales satisfont généralement à leurs équations aux différences partielles; ce que je m'étois proposé.



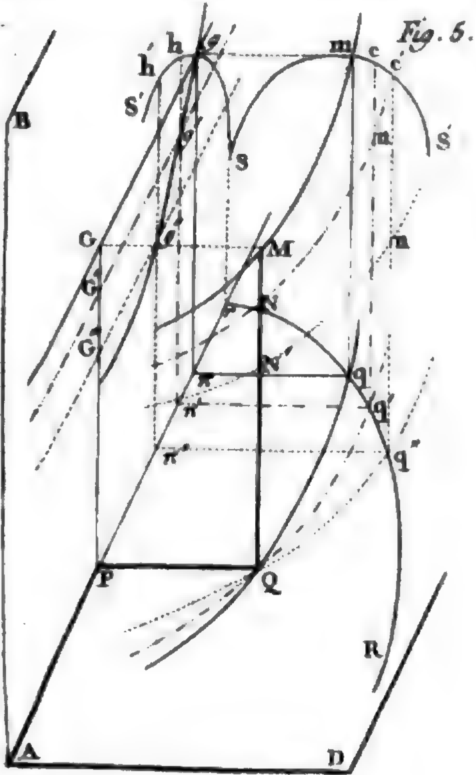


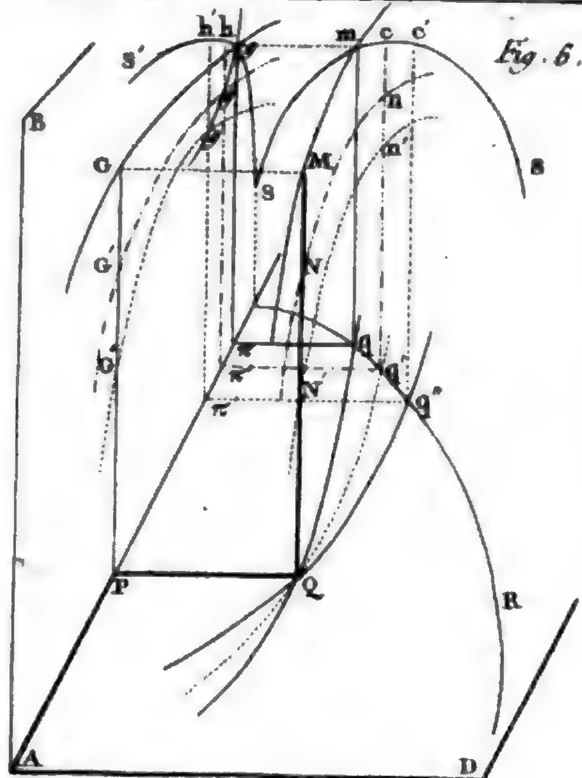


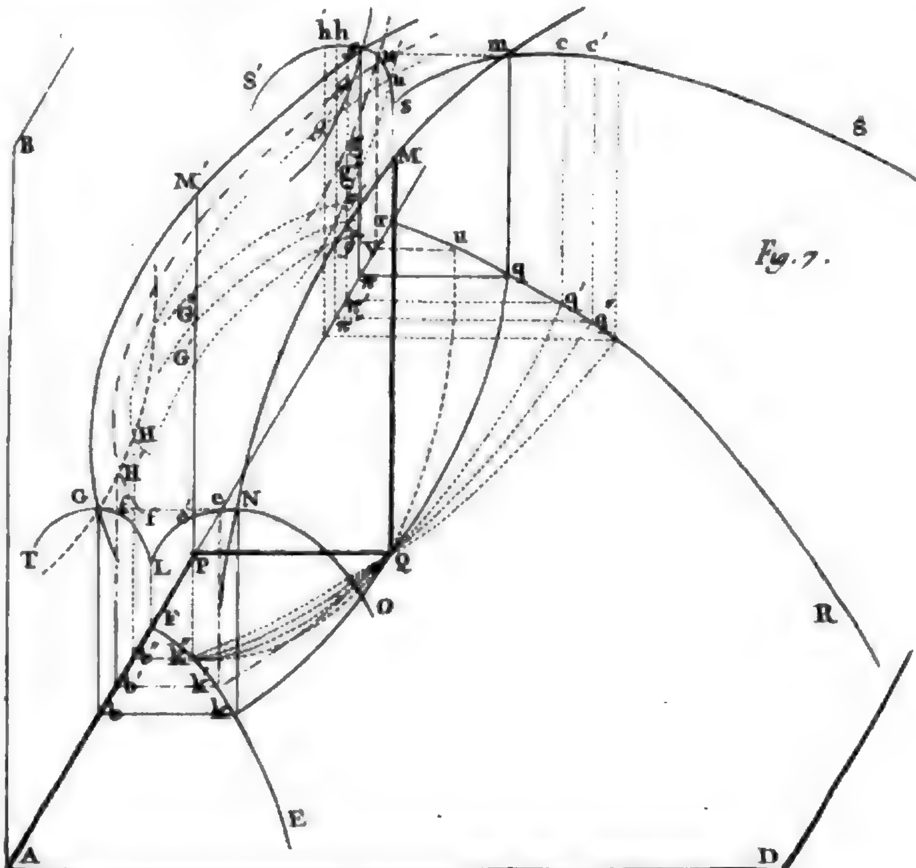




Cᵗᵉ Haussard Sculp.







Cne Haussard Sculp.

Fig. 8.

Fig. 9.

Elth Haussard Sculp.

OBSERVATION ANATOMIQUE,

SUR une extrémité inférieure dont les muſcles ont été changés en tiſſu graiſſeux, ſans aucune altération dans la forme extérieure.

Par M. VICQ-D'AZYR.

PARMI les cadavres qui ont été apportés à mon amphithéâtre, pour y ſervir à l'inſtruction des Élèves qui ſuivent mes leçons d'Anatomie, il s'en eſt trouvé un dont la jambe étoit fléchie ſur la cuiſſe, & le pied fortement étendu ſans que l'extrémité fut amaigrie ou infiltrée. Curieux de connoître la cauſe de cette attitude vicieuſe, j'ai fait exécuter au fémur dans la cavité cotyloïde, & à la jambe, dans le gingline du genou, des mouvemens que j'ai trouvés auſſi faciles qu'ils le ſont ordinairement; ſurpris de trouver les articulations ſaines, j'ai diviſé la peau pour découvrir les muſcles de la cuiſſe. Mais, au lieu demuſcles, je n'ai trouvé qu'un tiſſu graiſſeux, fibreux & cellulaire; & ſi on en excepte quelques-uns, je me ſuis aperçu que tous ceux de l'extrémité avoient ſubi cette métamorphoſe. On trouve dans les Auteurs les plus anciens, quelques exemples d'une pareille dégénéreſcence. On lit dans l'Hiſtoire des animaux d'Ariſtote, que la chair ſe change en graiſſe lorſqu'elle reçoit trop de nourriture: *vertitur in pingue quoties pabuli copia ſuppetit.* Pluſieurs parmi les Modernes ont fait cette remarque. Salzmann qui a écrit une Diſſertation ſur l'altération & le défaut de pluſieurs muſcles, a vu des fibres charnues écartées, &, pour ainſi dire, écraſées par un amas de graiſſe. Leuwenhoek, cité à ce ſujet par M. de Haller, a vu la graiſſe en faire autant, même à l'égard des tendons. Albinus, après avoir conſidéré le muſcle en général, ajoute: *pinguidine ita diſtinditur aliquando, ut reliqua muſculorum ſuffocet; tendines vero pinguidini tam facile non cedunt.* De toutes les cauſes qui détruiſent l'organiſation intime du

muſcle, la ſurabondance de graiſſe eſt cependant une des plus rares. Les plus communes ſont l'aſtrophie, la paralyſie, la ſuppuration, l'infiltration; & M. de Haller, en parlant d'un amas exceſſif de graiſſe dans le tiſſu muſculeux, dit que ce vice vient le plus ſouvent de naiſſance : *in morbis rarum, in monſtris vulgare vitium eſt.* Quoique ce vice, d'après ce paſſage de M. de Haller, doive être regardé comme peu commun, je l'ai cependant déjà obſervé deux fois; la première, dans l'ancien amphithéâtre de M. Antoine Petit, & la deſcription en fut faite dans le Journal de Médecine, par M. le Thual; la ſeconde, à l'hôpital de la Charité. Mais, dans aucune de ces deux circonſtances, la déſorganiſation n'étoit, à beaucoup près, ſi complète qu'elle l'eſt dans l'extrémité qui fait le ſujet de cette Obſervation. C'eſt donc moins la rareté du fait en lui-même, qui me détermine à le préſenter à l'Académie, que la nature de quelques détails que je crois importans pour l'hiſtoire des muſcles.

Le ſujet dont les muſcles ont été détruits ou remplacés par un tiſſu graiſſeux, étoit vieux, & l'on n'a point trouvé dans les grandes cavités, de cauſe à laquelle on puiſſe attribuer ce vice de conformation. Les informations que j'ai faites m'ont appris que, pendant long-temps, il s'étoit également ſervi des deux extrémités; qu'après une maladie, celle du côté gauche étoit de plus en plus affoiblie ſans ſe déformer, & qu'enfin le malade avoit été contraint de marcher à l'aide d'une béquille: c'eſt ce qu'annonçoit la couleur de l'aiſſelle du même côté noire & rembrunie par les frottemens. Les muſcles du dos, le quarré des lombes, le pectiné & le grand feſſier ont conſervé leur couleur naturelle. Tous les autres muſcles de l'extrémité ſont, ou détruits, ou tellement pâles; qu'ils ont perdu toute leur rougeur. Les aponévroſes même n'ont plus cet œil luiſant & ſatiné que tous les Anatomiſtes leur reconnoiſſent : c'eſt ce que l'on peut voir dans le *faſcia lata*, & dans le tendon du triceps tibial. La portion ſciatique du demi-nerveux & du biceps, les jumeaux, les extenſeurs des doigts, celui du pouce & le jambier antérieur, ſont les

ſeuls muſcles dans leſquels on retrouve quelques fibres dont la direction ſoit marquée ; tous les muſcles rotateurs de la cuiſſe, ceux qui ſont placés ſur le devant du fémur, les muſcles iliaques & pſoas, le moyen & le petit feſſier, les adducteurs, les muſcles profonds & poſtérieurs de la jambe, les muſcles plantaires ſont abſolument changés en graiſſe, & à peine en retrouve-t-on quelques veſtiges en les cherchant dans la place qu'ils devroient occuper. L'artère eſt oſſeuſe en pluſieurs endroits, & le tiſſu du nerf m'a paru plus mou qu'il ne l'eſt ordinairement. Mais, ce que cette extrémité préſente de plus curieux, c'eſt la déſorganiſation de la fibre muſculaire, & ſa dégénéreſcence en fibres cellulaires qui ſe fait par nuances inſenſibles. Dans le couturier, ſi on l'examine depuis ſon inſertion à l'os des iles juſqu'au tibia, on obſerve tous ces changemens avec leurs degrés ſucceſſifs de la manière la plus frappante ; inférieurement il eſt tellement confondu avec la graiſſe qui environne le genou, qu'on ne peut l'en diſtinguer. Le demi-nerveux, dans ſa portion arrondie, n'a point de tendon diſtinct ; toute ſa ſubſtance eſt homogène & continue : on peut faire la même obſervation ſur preſque tous les autres muſcles. La graiſſe qui ſe trouve dans leurs corps eſt ferme, blanche, contenue dans un grand nombre de petites cellules, & n'écarte point les trouſſeaux les uns des autres ; les fibres qui tiennent la place des muſculaires, m'ont paru plus tenues, plus fines & analogues à la ſubſtance ligamenteuſe. Le tiſſu cellulaire qui les unit, eſt blanchâtre, plus lâche & plus diductible qu'il n'eſt ordinairement ; ce n'eſt point entre ces lames que le ſuc graiſſeux paroît être épanché ; mais bien entre les élémens de la fibre elle-même. Si on preſſe fortement un muſcle quelconque de cette extrémité, on en exprime une très-grande quantité de graiſſe, qui ne diffère en rien de celle qui eſt répandue dans tout le ſyſtème cellulaire ; un morceau de cette ſubſtance muſculeuſe dégénérée, obſervé avec une forte loupe, préſente un aſſemblage de fibres molles, tranſparentes, dont le diamètre eſt différent dans les différens points de leur longueur, & qui

dans quelques-uns, paroiſſent partagés par un nombre aſſez grand de petites cloiſons: ſi on fait effort pour ſéparer ces fibres les unes des autres, alors leur organiſation eſt en partie détruite, & la loupe fait apercevoir les lames blanchâtres qui les uniſſent, & dans chaque interſtice un petit ruiſſeau graiſſeux que la preſſion a fait couler. Enfin, le muſcle privé de la graiſſe, à l'aide d'une preſſe, ne paroît plus être, & n'eſt plus en effet, qu'un canevas ligamenteux ou cellulaire; l'intérieur des articulations diſſéquées avec le plus grand ſoin n'a offert aucune altération, & le corps de chaque muſcle a conſervé ſon volume ordinaire, de ſorte que le membre recouvert de ſa peau, paroiſſoit être dans ſon état naturel, & en tout ſemblable à celui du côté oppoſé, dans lequel les muſcles ont conſervé la forme & la rougeur dont ils jouiſſent ordinairement. Tel eſt l'état de l'extrémité qui fait le ſujet de cette obſervation; nous abandonnons aux Phyſiciens les conſéquences qui peuvent en être déduites, tant pour l'hiſtoire des maladies qui attaquent les muſcles dans leur organiſation la plus intime, que pour la théorie du mouvement muſculaire.



MÉMOIRE

MÉMOIRE
SUR LA
DÉTERMINATION DES FONCTIONS ARBITRAIRES
Qui entrent dans les intégrales des Équations aux différences partielles.

Par M. MONGE, Professeur royal de Mathématiques & de Physique à l'École du Génie.

SI dans la solution d'une question, l'on a plusieurs variables indépendantes à considérer, il arrive presque toujours que l'on est conduit à une équation aux différences partielles; & l'intégrale de cette équation contient un certain nombre de fonctions arbitraires, qui dépend de l'ordre de l'équation, & du nombre des variables indépendantes. Par exemple, si le nombre de ces variables est deux, il entre autant de fonctions arbitraires dans l'intégrale, qu'il y avoit d'unités dans le degré de l'équation différentielle; & pour compléter la solution, il faut déterminer quelles doivent être les formes de ces fonctions généralement arbitraires, pour que l'intégrale satisfasse aux circonstances particulières de la question.

J'ai déjà fait voir * qu'en supposant la perfection de l'analyse ordinaire, cette détermination n'avoit rien de difficile pour le premier degré, & qu'il étoit toujours possible de construire l'équation, quand même les circonstances particulières de la question ne seroient pas expressibles analytiquement, ou, ce qui revient au même, quand les conditions ne seroient pas soumises à la loi de continuité; il en est de même pour quelques équations particulières des degrés supérieurs, par exemple, si toutes les différentes fonctions arbitraires sont composées de la même quantité, auquel cas elles doivent être multipliées par des facteurs différens, afin de demeurer distinctes. Je me propose de reprendre la question générale, & de faire voir que la détermination des fonctions

* *Dans un Mémoire imprimé ci-dessus, p. 267, & qui doit paroître dans le V.e vol. de la S. R. de Turin.*

arbitraires qui ſe trouvent dans l'intégrale d'une équation aux différences partielles, dépend en géneral, dans les cas que je n'ai pas encore traités, de l'intégrale d'une ou de pluſieurs équations aux différences finies, dans leſquelles le rapport de la variable principale à ſa différence finie eſt donné, ſoit qu'il ſoit variable, ſoit qu'il ſoit conſtant.

De nouveaux beſoins exigent donc que l'on perfectionne ce genre de calcul auquel de très-célèbres Géomètres ont déjà travaillé, mais qui eſt encore trop imparfait pour que la plupart des opérations auxquelles je ſerai conduit puiſſent s'exécuter. Je choiſirai des exemples que je puiſſe traiter, afin de parvenir à des réſultats, & que les ſolutions ſoient éclaircies par des applications.

Je ſuis forcé de convenir ici qu'au-delà de ce que j'ai fait ſur cette matière, il n'y a aucune équation aux différences partielles, que je puiſſe conſtruire dans le cas des conditions diſcontinues : je ſuis obligé d'opérer ſur les équations de condition, & par conſéquent de les ſuppoſer analytiques.

PROBLÈME I.

Déterminer quelles doivent être les formes des fonctions arbitraires φ *&* ψ *dans l'équation*

$$z = \varphi U + \psi V,$$

pour que cette équation ſatisfaſſe en même temps à ces deux conditions,

1.° *qu'en faiſant* $y = F.x$, *on ait* $z = f.x$;
2.° *qu'en faiſant* $y = F'x$, *on ait* $z = f'x$,

les quantités U *&* V *étant données en* x *&* y, *&* *les formes des fonctions* F, F', f *&* f' *étant connues.*

SOLUTION.

Soit miſe à la place de y dans les quantités U & V ſa première valeur $y = Fx$, & ſoient U' & V' les fonctions connues de x que deviennent ces quantités par cette ſubſtitution; ſoit de même ſubſtituée la ſeconde valeur de $y = F'x$,

& soient U'' & V'' les nouvelles fonctions de x que donne cette opération, il est évident que par les deux conditions de la question, on aura les deux équations suivantes,

$$(A) \quad \mathrm{f}\,x = \varphi U' + \psi V'$$
$$(B) \quad \mathrm{f}'x = \varphi U'' + \psi V'';$$

cela posé, on fera $V' = u$, d'où l'on tirera une valeur de x en u, que je suppose représentée par $f.u$, & que l'on substituera dans les quantités $\mathrm{f}.x$ & U'; la première deviendra $\mathrm{f}(fu)$: soit représentée la seconde par $'U$, il est clair que l'équation (A) se transformera en celle-ci,

$$(C) \qquad \mathrm{f}(fu) = \varphi\,'U + \psi u,$$

dans laquelle la forme de la fonction ψ seroit connue, si l'on connoissoit celle de la fonction φ, puisque les quantités $\mathrm{f}(fu)$ & $'U$ sont données en u.

On fera la même opération sur l'équation (B), c'est-à-dire, on fera $V'' = u$; d'où l'on tirera une valeur de x que j'indique par $f'\,u$, & qui, substituée dans les quantités $\mathrm{f}'\,x$ & U'', donnera

$$(D) \qquad \mathrm{f}'\,(f'u) = \varphi\,''U + \psi u;$$

on retranchera cette équation de (C), & l'on aura

$$\mathrm{f}(fu) - \mathrm{f}'\,(f'u) = \varphi\,'U - \varphi\,''U,$$

équation de laquelle ψu est éliminée, & dans laquelle il ne reste d'indéterminée que la fonction φ, puisque les quantités $'U$ & $''U$ sont données en u, & que les fonctions f, f', f & f' sont de formes données; il s'agit donc de donner à la fonction φ une forme telle qu'elle satisfasse à cette équation.

Pour cela, soit AG une droite sur laquelle on compte les abscisses u à partir du point A comme origine, de manière que l'on ait $A\pi = u$; soit construite la courbe $B\mu C$ telle que l'on ait constamment $\pi\mu = \mathrm{f}\,(fu) - \mathrm{f}'\,(f'\,u)$; soit $SMNT$ la courbe qui a pour équation $y = \varphi u$, c'est-à-dire; $\pi n = \varphi\,(A\pi)$; il est évident qu'en prenant $AP = {}''U$ & $AQ = {}'U$, on aura $PM = \varphi\,''U$ & $QN = \varphi\,'U$; Fig. 1.

d'où il suit qu'ayant mené MR parallèle à AG, on aura $NR = \varphi\,'U - \varphi\,''U$, & par conféquent $NR = \pi\mu$; ce qui doit faire trouver l'équation de la courbe $SMNT$, ou ce qui revient au même, la valeur de la fonction φ.

Comme les quantités $'U$ & $''U$ ne font pas fimples, mais qu'elles font compofées d'une certaine manière donnée de l'abfciffe $A\pi = u$; foit fait $''U$ (ou AP) $= v$, & $'U - ''U$, ou $PQ = \Delta v$, Δ étant le caractère d'une différence finie, on aura $PM = \varphi v$, $QN = \varphi\,(v + \Delta v)$ & $NR = \Delta\varphi v$; foit enfin prife la valeur de u dans l'équation $''U = v$, pour la fubftituer dans la valeur de $\pi\mu = \text{f}\,(fu) - \text{f}'\,(f'u)$, cette quantité, en fuppofant que l'on ait $u = f''.v$, deviendra $\text{f}\,[f(f''v)] - \text{f}'\,[f'\,(f''v)] = \pi\mu$, & l'équation $NR = \pi\mu$ deviendra $\text{f}\,[f(f''v)] - \text{f}'\,[f'\,(f''v)] = \Delta\varphi v$, équation aux différences finies, dont l'intégrale donnera la forme de la fonction φ.

Mais pour intégrer cette équation, il faut connoître le rapport de la variable v à fa différence finie Δv; pour cela, l'équation $''U = v$ nous a déjà donné $u = f''v$; de l'équation $'U - ''U = \Delta v$ on tirera une autre valeur de u en Δv; foit cette valeur $u = \Gamma.\Delta v$, on aura donc $f''v = \Gamma\Delta v$, ce qui donnera le rapport demandé, & fervira à intégrer l'équation précédente, & à trouver la forme de la fonction φ; connoiffant cette forme, on la compofera en $'U$ pour la fubftituer dans l'équation (C), ou en $''U$ dans l'équation (D), & l'on parviendra également à une équation qui ne renfermera plus d'indéterminées que la fonction ψ, qui fera par conféquent facile à déterminer.

COROLLAIRE.

Ce Problème eft donc ramené à l'intégration d'une équation aux différences finies, dans laquelle le rapport de la variable à fa différence, eft variable. Je femerai dans ce Mémoire quelques principes fur ce calcul; mais, s'ils n'étoient pas fuffifans, on pourroit avoir recours à un Mémoire auquel travaille actuellemeut M. de la Place, & dans lequel cet habile

Géomètre m'a dit qu'il convertissoit toujours une équation aux différences finies & variables, en une équation aux différences finies & constantes.

Je vais passer maintenant à quelques applications, que je supposerai d'abord les plus simples, tant pour rendre la marche plus sensible, que pour éviter des détails de calcul trop pénibles.

EXEMPLE I.

Soit proposé de déterminer la nature des fonctions arbitraires φ & ψ dans l'équation $z = \varphi\,(ax - y) + \psi\,(bx - y)$, de telle manière que cette équation satisfasse à ces deux conditions, 1.° qu'en faisant $y = Ax$, on ait $z = Bx$; 2.° qu'en faisant $y = Cx$, on ait $z = Dx$; les quantités a, b, A, B, C, & D étant constantes.

Par les deux conditions de la question, on doit avoir

$$\text{(A)} \quad Bx = \varphi\,(a - A)\,x + \psi\,(b - A)\,x,$$
$$\text{(B)} \quad Dx = \varphi\,(a - C)\,x + \psi\,(b - C)\,x;$$

or, ce cas est si simple, qu'il feroit inutile d'avoir recours à la méthode du Problème. On voit en effet facilement que les fonctions φ & ψ doivent être d'une seule dimension, & que l'on satisfera à ces deux équations en posant

$$Bx = E\,(a - A)\,x + \mathrm{e}\,(b - A)\,x$$
$$Dx = E\,(a - C)\,x + \mathrm{e}\,(b - C)\,x;$$

d'où l'on tire $E = \frac{B(b-C) - D(b-A)}{(A-C)\,(a-b)}$ & $\mathrm{e} = \frac{D(a-A) - B(a-C)}{(A-C)\,(a-b)}$;

ce qui donne pour l'équation demandée,

$$z = \frac{[B(b-C) - D(b-A)]\,(ax-y) + [D(a-A) - B(a-C)]\,(bx-y)}{(A-C)\,(a-b)}$$

qui est effectivement de la forme $z = \varphi\,(ax - y) + \psi\,(bx - y)$, & satisfait en même temps aux deux conditions proposées; mais ce procédé n'est pas général: reprenons la méthode du Problème.

Soit fait dans l'équation (A) $V' = u$, c'est-à-dire,

$(b - A)\ x = u$; ce qui donne $x = \frac{u}{b - A}$, & elle deviendra $\frac{Bu}{b - A} = \varphi\left(\frac{a - A}{b - A} u\right) + \psi u$ (C).

Soit fait de même dans l'équation (B), $(b - C)\ x = u$; ce qui donne $x = \frac{u}{b - C}$, & l'on aura (D) $\frac{Du}{b - C} = \varphi\left(\frac{a - C}{b - C} u\right) + \psi u$; retranchant ces deux équations l'une de l'autre, l'on obtiendra

$$\frac{Bu}{b - A} - \frac{Du}{b - C} = \varphi\left(\frac{a - A}{b - A} u\right) - \varphi\left(\frac{a - C}{b - C} u\right).$$

Actuellement soit $\frac{a - C}{b - C} u = v$, & $\frac{a - A}{b - A} u - \frac{a - C}{b - C} u = \Delta v$, d'où l'on tire $u = \frac{(b - A)(b - C)}{(A - C)(a - b)} \Delta v$ & $\frac{a - A}{b - A} u = v + \Delta v$, & soient substituées ces valeurs dans l'équation précédente, on aura

$$\frac{B(b - C) - D(b - A)}{(A - C)(a - b)} \Delta v = \varphi(v + \Delta v)v - \varphi v = \Delta \varphi v,$$

dont l'intégrale donne

$$\varphi v = \frac{B(b - C) - D(b - A)}{(A - C)(a - b)} v + \text{constante};$$

substituant cette forme dans l'une ou l'autre des équations (C), (D), on trouvera également $\psi u = \frac{D(a - A) - B(a - C)}{(A - C)(a - b)} u$ $-$ constante; ce qui donne la même équation que nous avons déjà trouvée, sans constantes arbitraires, puisqu'elles se détruisent, étant de signes différens.

L'intégration de l'équation aux différences finies n'a souffert aucune difficulté, parce qu'elle est linéaire; mais il peut arriver que dans l'équation $\mathrm{f}[f(f''v)] - \mathrm{f}'[f'(f''v)] = \Delta\varphi v$, qui résout généralement le Problème, le premier membre renferme des fonctions quelconques de v & Δv; dans ce cas, l'intégration peut être soumise à des difficultés qui

conduisent à un nouveau genre de calcul intégral, dont je vais donner un des exemples les plus simples.

EXEMPLE II.

Soit proposé de déterminer la nature des fonctions arbitraires dans la même équation $z = \varphi(ax - y) + \psi(bx - y)$, pour qu'elle satisfasse à ces deux conditions; 1.° qu'en faisant $y = Ax$, l'on ait $z = Bx^m$; 2.° qu'en faisant $y = Cx$, on ait $z = Dx^n$.

En opérant comme ci-dessus, on aura par les deux conditions de la question,

(A) $Bx^m = \varphi(a - A)x + \psi(b - A)x$,

(B) $Dx^n = \varphi(a - C)x + \psi(b - C)x$;

on fera dans la première $(b - A)x = u$, & elle deviendra

(C) $\dfrac{Bu^m}{(b - A)^m} = \varphi\,\dfrac{a - A}{b - A}\,u + \psi u$;

on fera de même dans la seconde $(b - C)x = u$, & on aura

(D) $\dfrac{Du^n}{(b - C)^n} = \varphi\,\dfrac{a - C}{b - C}\,u + \psi u$;

retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on aura

(E) $\dfrac{Bu^m}{(b - A)^m} - \dfrac{Du^n}{(b - C)^n} = \varphi\left(\dfrac{a - A}{b - A}\,u\right) - \varphi\left(\dfrac{a - C}{b - C}\,u\right)$.

Actuellement soit fait, comme dans l'exemple précédent, $\dfrac{a - C}{b - C}\,u = v$ & $\dfrac{a - A}{b - A}\,u - \dfrac{a - C}{b - C}\,u = \Delta v$; ce qui donne les deux valeurs suivantes de u,

$$u = \frac{b - C}{a - C}\,v$$

$$u = \frac{(b - A)(b - C)}{(A - C)(a - b)}\,\Delta v$$

& par conséquent $\Delta v = \dfrac{(A - C)(a - b)}{(a - A)(a - C)}\,v$;

soit substituée la première valeur de u dans l'équation (E), & elle deviendra

$$\frac{B(b-C)^m v^m}{(b-A)^m (a-C)^n} - \frac{D v^n}{(a-C)^n} = \Delta \varphi v$$

équation aux différences finies, dans laquelle la variable eſt proportionnelle à ſa différence finie, & qu'il faut intégrer pour avoir la forme de la fonction φ.

Pour cela, ſoit repréſenté par K le rapport conſtant de la variable à ſa différence finie, de manière que l'on ait $\Delta u = K u$; cela poſé, on aura $\Delta(u^m) = (u + Ku)^m - u^m = u^m [(1+K)^m - 1]$, d'où l'on tire $u^m = \frac{\Delta(u^m)}{(1+K)^m - 1}$; par la même raiſon, on aura $u^n = \frac{\Delta(u^n)}{(1+K)^n - 1}$; d'où il ſuit que la dernière équation pourra ſe traduire ainſi:

$$\frac{B(b-C)^m \Delta(v^m)}{(b-A)^m (a-C)^m [(1+K)^m - 1]} - \frac{D.\Delta(v^n)}{(a-C)^n [(1+K)^n - 1]} = \Delta \varphi v,$$

dont l'intégrale eſt évidemment

$$\varphi v = \frac{B(b-C)^m v^m}{(b-A)^m (a-C)^m [(1+K)^m - 1]} - \frac{D.v^n}{(a-C)v^n [(1+K)^n - 1]} + \text{conſt.}$$

or, on a ici

$$K = \frac{(A-C)(a-b)}{(b-A)(a-C)}, \ \& \ (K+1) = \frac{(A-C)(a-b) + (b-A)(a-C)}{(b-A)(a-C)}$$

$= \frac{(a-A)(b-C)}{(b-A)(a-C)}$; donc, en ſubſtituant cette valeur on trouvera

$$\varphi v = \frac{B(b-C)^m v^m}{(a-A)^m (b-C)^m - (b-A)^m (a-C)^m} - \frac{D(b-A)^n v^n}{(a-A)^n (b-C)^n - (b-A)^n (a-C)^n} + \text{conſt.}$$

Connoiſſant la forme de la fonction φ, ſi on la ſubſtitue dans l'une ou l'autre des équations (C) & (D), on trouvera également

$$\psi u = \frac{D(a-A)^n u^n}{(a-A)^n (b-C)^n - (b-A)^n (a-C)^n} - \frac{B(a-C)^m u^m}{(a-A)^m (b-C)^m - (b-A)^m (a-C)^m} - \text{conſt.}$$

d'où il ſuit que l'équation demandée, ou la valeur de z doit être

$$z = \frac{B(b-C)^m (ax-y)^m - B(a-C)^m (bx-y)^m}{(a-A)^m (b-C)^m - (b-A)^m (a-C)^m} + \frac{D(a-A)^n (bx-y)^n - D(b-A)^n (ax-y)^n}{(a-A)^n (b-C)^n - (b-A)^n (a-C)^n}.$$

En

En effet, cette équation est de la forme $z = \varphi\ (ax - y) + \psi\ (bx - y)$, & satisfait en même temps aux deux conditions de la question, comme on peut s'en assurer.

COROLLAIRE.

La détermination des fonctions arbitraires de l'équation $z = \varphi U + \psi V$, ne dépend donc que de l'intégration d'une équation aux différences finies de cette forme, $W = \Delta \cdot \varphi v$, dans laquelle W est une quantité donnée en v, & où le rapport constant ou variable, de la variable principale v à sa différence finie Δv, est donné.

REMARQUE.

L'équation $z = \varphi\ (ax - y) + \psi\ (bx - y)$ est l'intégrale de l'équation aux différences partielles

$$\frac{\delta \delta z}{dx^2} + (a + b)\ \frac{\delta \partial z}{dx\, dy} + ab\ \frac{\partial \partial z}{dy^2} = 0.$$

Si l'on a $a = b$, la valeur de z que j'ai donnée dans le dernier exemple, devient $z = \frac{0}{0} - \frac{0}{0}$, & par conséquent ne produit plus rien; mais il faut remarquer que dans cette hypothèse, la proposée qui devient $z = \varphi\ (ax - y)$ cesse d'être l'intégrale complète de l'équation aux différences partielles, dont l'intégrale est alors $z = \varphi\ (ax - y) + x \psi\ (ax - y)$. Or, dans le Mémoire que j'ai déjà donné sur cette matière, j'ai fait voir qu'il étoit toujours possible de déterminer les fonctions arbitraires de cette équation, puisque ces fonctions sont composées de la même quantité $(ax - y)$, & même de construire la valeur de z, quand les conditions de la question renfermeroient des quantités discontinues, ou n'auroient point d'expressions analytiques. Si on n'a pas $a = b$, il sera possible de construire la valeur de z; mais comme on ne le pourra généralement faire qu'après avoir intégré l'équation aux différences finies, j'avouerai que je ne vois pas comment on pourroit procéder, en supposant les conditions discontinues, à moins que, comme dans le cas

des cordes vibrantes, ces conditions n'aient quelques particularités qui facilitent l'opération.

PROBLÈME II.

Déterminer les formes des fonctions arbitraires φ & ψ, dans l'équation

$$F z = L + M \varphi U + N \psi V,$$

de manière qu'elle satisfasse en même-temps à ces deux conditions;

1.° *qu'en faisant* $y = \Gamma x$, *on ait* $z = f x$;
2.° *qu'en faisant* $y = \Gamma' x$, *on ait* $z = f' x$;

les quantités L, M, N, U & V *étant données en* x & y, & *les formes des fonctions* F, Γ, Γ', f & f' *étant données.*

SOLUTION.

Soit mise à la place de y sa valeur Γx, dans les quantités L, M, N, U & V, qui par-là deviendront des fonctions connues de x que je représente respectivement par L', M', N', U' & V'. Soit pareillement mise pour y sa valeur $\Gamma' x$ dans les mêmes quantités, ce qui donnera de nouvelles fonctions de x, L'', M'', N'', U'' & V''. On aura par les deux conditions de la question, les deux équations suivantes,

$$\text{(A)} \quad F(\mathrm{f} x) = L' + M' \varphi U' + N' \psi V',$$
$$\text{(B)} \quad F(\mathrm{f}' x) = L'' + M'' \varphi U'' + N'' \psi V''.$$

On fera $V' = u$, d'où l'on tirera une valeur de x en u, que je représente par fu, & que l'on substituera à la place de x dans les quantités L', M', N' & U'; soient $`L, `M, `N$ & $`U$ les fonctions de u, que deviennent ces quantités par cette opération; l'équation (A) se transformera évidemment en celle-ci,

$$F[\mathrm{f}(fu)] = `L + `M \varphi `U + `N \psi u.$$

On fera de même $V'' = u$, & ayant substitué la valeur de x en u, prise dans cette équation, & que j'indique par $x = f'u$, dans les quantités L'', M'', N'' & U'', elles se transformeront

en des fonctions de u que je désigne respectivement par ${}^{\prime\prime}L$, ${}^{\prime\prime}M$, ${}^{\prime\prime}N$ & ${}^{\prime\prime}U$, & l'équation (B) deviendra

$$F[\mathrm{f}'(f'u)] = {}^{\prime\prime}L + {}^{\prime\prime}M\varphi\,{}^{\prime\prime}U + {}^{\prime\prime}N\psi u;$$

égalant les deux valeurs de ψu, on aura

$$\begin{aligned}{}^{\prime\prime}NF[\mathrm{f}(fu)] - {}^{\prime}NF[\mathrm{f}'(f'u)] &= {}^{\prime\prime}N\,{}^{\prime}L - {}^{\prime}N\,{}^{\prime\prime}L \\ &+ {}^{\prime}M\,{}^{\prime\prime}N\varphi\,{}^{\prime}U - {}^{\prime\prime}M\,{}^{\prime}N\varphi\,{}^{\prime\prime}U,\end{aligned}$$

équation en u, qui ne renferme plus d'arbitraires que la fonction φ.

Soit fait ${}^{\prime\prime}U = v$, & ${}^{\prime}U - {}^{\prime\prime}U = \Delta v$, ce qui donne $\varphi\,{}^{\prime}U = \varphi(v + \Delta v) = \varphi v + \Delta\varphi v$, & le second membre de l'équation précédente deviendra

$${}^{\prime\prime}N\,{}^{\prime}L - {}^{\prime}N\,{}^{\prime\prime}L + [{}^{\prime}M\,{}^{\prime\prime}N - {}^{\prime\prime}M\,{}^{\prime}N]\,\varphi v + {}^{\prime}M\,{}^{\prime\prime}N\Delta\varphi v.$$

Cela fait, des deux équations ${}^{\prime\prime}U = v$ & ${}^{\prime}U - {}^{\prime\prime}U = \Delta v$, on tirera deux valeurs de u, l'une en v, & l'autre en Δv, ce qui produira, en éliminant u, une valeur de Δv en v, que je représente par $\Delta v = Kv$; on substituera la valeur de u en v dans le premier membre, & dans les coëfficiens du second, & cette équation deviendra de la forme générale $W = \pi\varphi v + \omega\Delta.\varphi v$, où les quantités W, π & ω sont données en v, & dont l'intégrale donnera la forme de la fonction φ. Connoissant cette forme, il sera facile de déterminer celle de la fonction ψ, comme je l'ai déjà fait dans le Problème précédent.

EXEMPLE.

Soit la proposée $z^p = x^2\varphi(ax - y) + y^2\psi(bx - y)$ dans laquelle il faille déterminer les fonctions φ & ψ de telle manière, 1.° qu'en faisant $y = Ax$, on ait $z = Bx^m$; 2.° qu'en faisant $y = Cx$, on ait $z = Dx^n$.

Je fais dans cet exemple $L = 0$, parce que cette quantité n'empêche pas la solution générale de la question. En effet, si dans l'équation générale $Fz = L + M\varphi U + N\psi V$, on fait $Fz - L = \varpi$, on la transformera en une autre $\varpi = M\varphi U + N\psi V$, dans laquelle le terme L ne se trouve plus.

SOLUTION.

Par les deux conditions, on aura les deux équations ſuivantes,

$$\text{(A)}\quad B^p x^{pm} = x^2 \varphi\, (a - A)\, x + A^2 x^2 \psi\, (b - A)\, x$$

$$\text{(B)}\quad D^p x^{pn} = x^2 \varphi\, (a - C)\, x + C^2 x^2 \psi\, (b - C)\, x.$$

En faiſant $x = \frac{u}{b - A}$ dans la première, & $x = \frac{u}{b - C}$ dans la ſeconde, elles deviendront

$$\text{(C)}\quad \frac{B^p u^{pm-2}}{(b - A)^{pm-2}} = \varphi\, \frac{a - A}{b - A}\, u + A^2 \psi u,$$

$$\text{(D)}\quad \frac{D^p u^{pn-2}}{(b - C)^{pn-2}} = \varphi\, \frac{a - C}{b - C}\, u + C^2 \psi u.$$

Éliminant ψu des deux équations, l'on aura

$$\frac{C^2 B^p u^{pm-2}}{(b - A)^{pm-2}} - \frac{A^2 D^p u^{pn-2}}{(b - C)^{pn-2}} = C^2 \varphi\, \frac{a - A}{b - A}\, u - A^2 \varphi\, \frac{a - C}{b - C}\, u.$$

Actuellement, ſoit fait

$$\frac{a - C}{b - C}\, u = v, \ \& \ \frac{a - A}{b - A}\, u - \frac{a - C}{b - C}\, u = \Delta v,$$

ce qui donnera les deux valeurs ſuivantes de u,

$$u = \frac{b - C}{a - C}\, v,$$

$$u = \frac{(b - A)(b - C)}{(A - C)(a - b)}\, \Delta v.$$

Par conſéquent $\Delta v = \frac{(A - C)(a - b)}{(b - A)(a - C)}\, v = Kv$, & l'équation précédente deviendra

$$\frac{B^p (b - C)^{pm-2}\, v^{pm-2}}{(b - A)^{pm-2}\, (a - C)^{pm-2}} - \frac{A^2 D^p v^{pn-2}}{C^2\, (a - C)^{pn-2}} = \left(1 - \frac{A^2}{C^2}\right) \varphi v + \Delta \varphi v.$$

qu'il faut intégrer pour avoir la forme de la fonction φ.

Pour cela, on la mettra ſous la forme abrégée $G v^{\alpha} + H v^{\beta} = J \varphi v + \Delta \varphi v$, & on transformera le premier membre en un autre qui ſoit de même forme que le ſecond; c'eſt-à-dire que ω étant une variable, on lui donnera la forme de $J \omega + \Delta \omega$; ce qui eſt facile ici. Nous avons vu en effet

dans l'*Exemple II* du *Problème I.er* que K étant constant dans le rapport $\Delta v = Kv$, l'on avoit $\Delta(v^m) = [(1 + K)^m - 1]v^m$; donc, si l'on partage les coëfficiens G & H, chacun en deux parties indéterminées; c'est-à-dire, si l'on fait $G = g + g'$, & $H = h + h'$, le premier membre de l'équation pourra prendre cette forme $gv^\alpha + \frac{g'}{(1 - K)^\alpha - 1} \Delta(v^\alpha) + hv^\beta$ $+ \frac{h'}{(1 + K)^\beta - 1} \Delta(v^\beta)$, qui sera la même que $J\omega + \Delta\omega$, si les quatre indéterminées g, g', h & h' remplissent les deux conditions exprimées par ces équations

$$g = \frac{g'J}{(1 + K)^\alpha - 1}, \quad \& \quad h = \frac{h'J}{(1 + K)^\beta - 1},$$

ce qui donne les valeurs suivantes,

$$g = \frac{GJ}{J + (1 + K)^\alpha - 1},$$

$$g' = \frac{G[(1 + K)^\alpha - 1]}{J + (1 + K)^\alpha - 1},$$

$$h = \frac{HJ}{J + (1 + K)^\beta - 1},$$

$$h' = \frac{H[(1 + K)^\beta - 1]}{J + (1 + K)^\beta - 1};$$

alors le premier membre devient

$$\frac{GJv^\alpha + G\Delta(v^\alpha)}{J + (1 + K)^\alpha - 1} + \frac{HJv^\beta + H\Delta(v^\beta)}{J + (1 + K)^\beta - 1},$$

ou, ce qui revient au même, $\frac{G}{J + (1 + K)^\alpha - 1}[Jv^\alpha + \Delta(v^\alpha)]$

$$+ \frac{H}{J + (1 + K)^\beta - 1}[Jv^\beta + \Delta(v^\beta)] = J\varphi v + \Delta\varphi v;$$

d'où l'on est en droit de conclure

$$\varphi v = \frac{Gv^\alpha}{J + (1 + K)^\alpha - 1} + \frac{Hv^\beta}{J + (1 + K)^\beta - 1} + \text{const.}$$

ou bien mettant pour les lettres G, H, J & K leurs valeurs développées,

$$\left.\begin{aligned}\varphi v = {} & \frac{C^2 B^p (b + C)^\alpha v^\alpha}{C^2 (a - A)^\alpha (b - C)^\alpha - A^2 (b - A)^\alpha (a - C)^\alpha} \\ - {} & \frac{A^2 D^p (b - A)^\beta v^\beta}{C^2 (a - A)^\beta (b - C)^\beta - A^2 (a - C)^\beta (b - A)^\beta}\end{aligned}\right\} + \text{const.}$$

Connoissant la forme de la fonction φ, si on la lui substitue dans l'une ou l'autre des deux équations (C) & (D), on trouvera également

$$\left.\begin{aligned}\psi u = {} & \frac{D^p (a - A)^\beta u^\beta}{C^2 (a - A)^\beta (b - C)^\beta - A^2 (b - A)^\beta (a - C)^\beta} \\ - {} & \frac{B^p (a - C)^\alpha u^\alpha}{C^2 (a - A)^\alpha (b - C)^\alpha - A^2 (b - A)^\alpha (a - C)^\alpha}\end{aligned}\right\} + \text{const.}$$

d'où il suit qu'en substituant pour α & β leurs valeurs $pm - 2$ & $pn - 2$, l'équation demandée sera

$$\begin{aligned}z^p = {} & \frac{x^2 C^2 B^p (b - C)^{pm-2} (ax - y)^{pm-2} - y^2 B^p (a - C)^{pm-2} (bx - y)^{pm-2}}{C^2 (a - A)^{pm-2} (b - C)^{pm-2} - A^2 (b - A)^{pm-2} (a - C)^{pm-2}} \\ + {} & \frac{D^p y^2 (a - A)^{pn-2} (bx - y)^{pn-2} - A^2 x^2 D^p (b - A)^{pn-2} (ax - y)^{pn-2}}{C^2 (a - A)^{pn-2} (b - C)^{pn-2} - A^2 (a - C)^{pn-2} (b - A)^{pn-2}};\end{aligned}$$

en effet, cette équation est de la forme

$$z^p = x^2 \varphi (ax - y) + y^2 \psi (bx - y).$$

& satisfait en même-temps aux deux conditions de la question.

Si l'on a $a = b$, l'on trouve $z = \frac{0}{0} + \frac{0}{0}$, mais alors il faut faire le même raisonnement que nous avons déjà fait pour l'exemple du Problème I.er

COROLLAIRE.

Donc, la détermination des fonctions arbitraires de l'équation

$$Fz = L + M \varphi U + N \psi V$$

ne dépend que de l'intégration d'une équation aux différences finies de cette forme

$$W = \pi \phi v + \omega \Delta \phi v,$$

dans laquelle les quantités W, π & ω sont données en v, & où la variable v a un rapport déterminé avec sa différence Δv.

PROBLÈME III.

Déterminer les fonctions arbitraires dans l'équation

$$z = \phi(U + \psi V),$$

pour qu'elle satisfasse à ces deux conditions,

1.° qu'en faisant $y = Fx$, *on ait* $z = f.x$,

2.° qu'en faisant $y = F'x$, *on ait* $z = f'.x$.

SOLUTION.

Avant de résoudre le Problème, il faut convenir d'une notation que je serai obligé d'employer. Soit Φ une fonction de forme connue, & que l'on ait l'équation $\Pi = \Phi\omega$, en supposant la perfection de l'analyse, il sera possible de trouver la valeur de ω en Π, & cette valeur sera une certaine fonction de Π que l'on pourroit représenter par un caractère particulier; néanmoins comme elle dépend de la fonction Φ, il convient d'employer le même caractère distingué par un accent, de cette manière $`\Phi$; dans cette hypothèse, si l'on a donc $\Pi = \Phi\omega$, on aura aussi $\omega = `\Phi\Pi$, & réciproquement. Il est évident que cette notation pourra avoir lieu de même lorsque la forme de la fonction sera inconnue; ainsi la proposée pourra se mettre sous cette forme

$$`\phi z = U + \psi V.$$

Cela posé, soient $'U$ & $'V$ ce que deviennent les quantités U & V lorsqu'on y met à la place de y sa valeur Fx; soient de même $''U$ & $''V$, ce que deviennent les mêmes quantités, en substituant à y sa valeur $F'.x$, les deux conditions donneront

$$\text{(A)} \quad `\phi(f x) = {}'U + \psi\, {}'V,$$

$$\text{(B)} \quad `\phi(f' x) = {}''U + \psi\, {}''V.$$

Or, ces deux équations ſont de même nature que les équations (A) & (B) du Problème I.er on les traitera par conſéquent de la même manière, & l'on parviendra à connoître les fonctions $\grave{\varphi}$ & ψ; enfin renverſant la fonction $\grave{\varphi}$, on connoîtra la valeur de z.

EXEMPLE.

Soit propoſé de déterminer les fonctions arbitraires φ & ψ dans l'équation

$$z = \varphi\,[ax - y + \psi\,(bx - y)]$$

pour qu'elle ſatisfaſſe à ces deux conditions en même-temps;

1.° qu'en faiſant $y = Ax$, on ait $z = Bx^m$;
2.° qu'en faiſant $y = Cx$, on ait $z = Dx^n$.

Ayant converti la propoſée en celle-ci

$$\grave{\varphi}\,z = ax - y + \psi\,(bx - y),$$

il eſt évident qu'on aura par les deux conditions de la queſtion

$$\text{(A)} \quad \grave{\varphi}\,(Bx^m) = x\,(a - A) + \psi\,(b - A)\,x,$$
$$\text{(B)} \quad \grave{\varphi}\,(Dx^n) = x\,(a - C) + \psi\,(b - C)\,x.$$

Soit fait dans la première de ces équations $x = \frac{u}{b - A}$, & dans la ſeconde $x = \frac{u}{a - C}$, elles deviendront

$$\text{(C)} \quad \grave{\varphi}\left(\frac{Bu^m}{(b - A)^m}\right) = u\,\frac{a - A}{b - A} + \psi\,u,$$
$$\text{\& (D)} \quad \grave{\varphi}\left(\frac{Du^m}{(b - C)^m}\right) = u\,\frac{a - C}{b - C} + \psi\,u,$$

& éliminant $\psi\,u$, l'on aura $\grave{\varphi}\left(\frac{Bu^m}{(b - A)^m}\right) - \grave{\varphi}\left(\frac{Du^m}{(b - C)^m}\right)$ $= u\,\frac{a - A}{b - A} - u\,\frac{a - C}{b - C}$.

Actuellement ſoit fait

$$\frac{Du^m}{(b - C)^m} = v, \;\&\; \frac{Bu^m}{(b - A)^m} - \frac{Du^m}{(b - C)^m} = \Delta v,$$

d'où

d'où l'on tire,

$$u^m = \frac{(b-C)^m}{D}\, v,$$

$$u^m = \frac{(b-A)^m (b-C)^m}{B(b-C)^m - D(b-A)^m}\, \Delta v,$$

& par conséquent $\Delta v = \frac{B(b-C)^m - D(b-A)^m}{D(b-A)^m}\, v = Kv$, & l'équation précédente deviendra

$$\Delta' \varphi v = \frac{(A-C)(a-b)}{D^{\frac{1}{m}}(b-A)}\, v^{\frac{1}{m}}$$

dont l'intégrale donnera la forme de la fonction $'\varphi$.

Or, j'ai déjà fait voir que lorſque le rapport de la variable principale avec ſa différence finie eſt conſtant, c'eſt-à-dire lorſque l'on a $\Delta v = Kv$, l'intégrale de la formule Gv^m eſt $\frac{Gv^m}{(1+K)^m - 1}$ + conſt. Donc l'intégrale de l'équation $\Delta' \varphi v = \frac{(A-C)(a-b)}{D^{\frac{1}{m}}(b-A)}\, v^{\frac{1}{m}}$ ſera, toute réduction faite,

$$'\varphi v = \frac{(A-C)(a-b)}{B^{\frac{1}{m}}(b-C) - D^{\frac{1}{m}}(b-A)}\, v^{\frac{1}{m}} + \text{conſt.}$$

ou bien, pour abréger, $'\varphi v = R v^{\frac{1}{m}}$ + conſt. Subſtituant cette forme dans l'équation (C), ou dans l'équation (D), on trouvera également

$$\psi u = \frac{R B^{\frac{1}{m}} u}{(b-A)} - \frac{u(a-A)}{b-A} - \text{conſt.}$$

Donc l'équation demandée ſera

$$R z^{\frac{1}{m}} = ax - y + \frac{R B^{\frac{1}{m}}(bx-y)}{b-A} - \frac{(bx-y)(a-A)}{b-A},$$

ou

$$\text{(E)}\ z = \frac{1}{R^m}\left[ax - y + \frac{R B^{\frac{1}{m}} - (a-A)}{b-A}(bx-y)\right]^m.$$

Enfin, restituant pour R sa valeur, & réduisant, on obtiendra

$$z = \left\{ \frac{(ax-y)[B^{\frac{1}{m}}(b-C) - D^{\frac{1}{m}}(b-A)] + (bx-y)[D^{\frac{1}{m}}(a-A) - B^{\frac{1}{m}}(a-C)]}{(a-A)(b-C)-(a-C)(b-A)} \right\}^m,$$

équation qui est de la forme $z = \varphi\,[ax - y + \psi(bx-y)]$, puisqu'elle est immédiatement tirée de l'équation (E), & qui satisfait aux deux conditions de la question, comme il est facile de s'en apercevoir.

REMARQUES.

I. Si la proposée avoit été $z = M + \varphi[U + N\psi V]$, on seroit parvenu par le même procédé à une équation aux différences finies de cette forme $\Pi\,\varphi\,\nu - \Delta\,\varphi\,\nu = W$. Donc, la détermination des fonctions arbitraires dépend encore dans ce cas-là du calcul intégral des équations aux différences finies à deux variables.

II. L'équation $z = \varphi\,[ax - y + \psi(bx-y)]$ que j'ai prise pour exemple, est l'integrale de l'équation aux différences partielles

$$\frac{\partial z}{dy}\,\frac{\delta\delta z}{dx^2} - \left[\frac{\delta z}{dx} - b\,\frac{\partial z}{dy}\right]\frac{\delta\partial z}{dx\,dy} - b\,\frac{\delta z}{dx}\,\frac{\partial\partial z}{dy^2} = 0,$$

où il faut remarquer cette particularité, que la constante a est arbitraire, puisqu'elle ne se trouve pas dans la différentielle. Ainsi, dans la question qui aura conduit à cette équation, non-seulement il doit se trouver les deux conditions qui servent à déterminer les fonctions arbitraires φ & ψ; mais on doit encore avoir une valeur de z pour un x & un y donnés, afin de déterminer la constante arbitraire a.

III. Il n'y a point d'intégrale d'équation aux différences partielles à trois variables, & du second ordre, c'est-à-dire, il n'y a point d'intégrale d'équation à deux fonctions arbitraires qui ne puisse se ramener à quelqu'une de celles qui sont l'objet des Problèmes précédens, ou qui ne puisse se

traiter par la même méthode. Par exemple, l'équation

$$\left.\begin{array}{l} z\,\frac{\partial\partial z}{dx^2} + A z\,\frac{\partial\partial z}{dx\,dy} + B z\,\frac{\partial\partial z}{\partial y^2} \\ -\,\frac{\partial z^2}{dx^2} - A\,\frac{\partial z\,\partial z}{dx\,\partial y} - B\,\frac{\partial z^2}{dy^2} \end{array}\right\} = 0,$$

a pour intégrale l'équation

$$z = [\varphi(Px - y)] \times [\psi(P'x - y)],$$

les quantités P & P' étant les racines inégales de l'équation $P^2 - AP + B = 0$; & si les racines de cette équation sont égales, l'intégrale est alors

$$z = [\varphi(Px - y)]^x \times [\psi(Px - y)].$$

En effet, soit fait dans cette équation $z = e^{\omega}$, elle se transformera en celle-ci

$$\frac{\partial\partial\omega}{dx^2} + A\,\frac{\partial\partial\omega}{dx\,\partial y} + B\,\frac{\partial\partial\omega}{dy^2} = 0,$$

dont on sait que l'intégrale est généralement

$$\omega = \varphi(Px - y) + \psi(P'x - y),$$

ou $\omega = x\varphi(Px - y) + \psi(Px - y)$, lorsque l'on a $P = P'$. Ainsi, puisque $z = e^{\omega}$ donne $\omega = \log. z$, l'intégrale en z de l'équation, est

$\log. z = \varphi(Px - y) + \psi(P'x - y)$ lorsque les racines sont inégales,
& $\log. z = x\varphi(Px - y) + \psi(Px - y)$ lorsqu'elles sont égales,

ou enfin parce que les fonctions arbitraires φ & ψ peuvent être regardées comme les logarithmes d'autres fonctions,

$z = [\varphi(Px - y)] \times [\psi(P'x - y)]$ pour le premier cas,
& $z = [\varphi(Px - y)]^x \times [\psi(Px - y)]$ pour le second.

Par conséquent les équations $z = [\psi(ax - y)] \times [\varphi(bx - y)]$ & $z = [\varphi(ax - y)]^x \times \psi(ax - y)$ sont renfermées dans celles que j'ai déjà traitées, quoiqu'elles ne soient pas de même forme, parce qu'elles sont les mêmes que celles-ci

$$\log. z = \varphi(ax - y) + \psi(bx - y),$$
$$\&\ \log. z = x\varphi(ax - y) + \psi(ax - y);$$

dont la première rentre dans le cas du Problème précédent, & dont la seconde feroit conftructible, quand même les courbes à doubles courbures données, par lefquelles les conditions de la queftion devroient faire paffer la furface à laquelle elle appartient feroient difcontinues; parce que les fonctions φ & ψ font compofées de la même quantité $ax - y$. On peut voir à ce fujet le Mémoire que j'ai déjà fait fur cette matière.

Ainfi il fera poffible de déterminer les fonctions arbitraires dans l'équation générale $z = (\varphi U) \times (\psi V)$, puifqu'étant la même que log. $z = \varphi U + \psi V$, elle eft comprife dans la propofée du Problème II, ou du moins cette opération ne dépendra que de l'intégration d'une équation logarithmique aux différences finies.

Il en eft de même de l'équation $Fz = M + N(\varphi U) \times (\psi V)$, parce qu'en faifant $\frac{Fz - M}{N} = \omega$, elle devient $\omega = (\varphi U) \times (\psi V)$ & rentre par conféquent dans la précédente.

Paffons actuellement aux équations qui renferment trois fonctions arbitraires.

PROBLÈME IV.

Déterminer les fonctions arbitraires Φ, φ & ψ *dans l'équation générale*

$$Fz = K + L\Phi U + M\varphi V + N\psi W,$$

de manière qu'elle fatisfaffe en même-temps aux trois conditions fuivantes;

1.° qu'en faifant $y = \Gamma x$, *on ait* $z = fx$;

2.° qu'en faifant $y = \Gamma' x$, *on ait* $z = f'.x$;

3.° qu'en faifant $y = \Gamma'' x$, *on ait* $z = f'' x$;

les quantités K, L, M, N, U, V, & W *étant données en* x & y, & *les fonctions* F, Γ, Γ', Γ'', f, f' & f'' *étant données de forme.*

SOLUTION.

Soient ${}^{\prime}K, {}^{\prime}L, {}^{\prime}M, {}^{\prime}N, {}^{\prime}U, {}^{\prime}V$ & ${}^{\prime}W$ les fonctions de x, que deviennent respectivement les quantités K, L, M, N, U, V & W, en mettant à la place de y sa première valeur $\Gamma . x$. Soient ${}^{\prime\prime}K, {}^{\prime\prime}L, {}^{\prime\prime}N, {}^{\prime\prime}U, {}^{\prime\prime}V$ & ${}^{\prime\prime}W$, ce que deviennent les mêmes quantités en substituant à y sa seconde valeur $\Gamma' x$; enfin, soient ${}^{\prime\prime\prime}K, {}^{\prime\prime\prime}L, {}^{\prime\prime\prime}M, {}^{\prime\prime\prime}N, {}^{\prime\prime\prime}U, {}^{\prime\prime\prime}V$ & ${}^{\prime\prime\prime}W$ ce qu'on obtient en mettant dans les mêmes quantités pour y sa troisième valeur $\Gamma'' x$; on aura par les trois conditions du Problème les équations suivantes,

$$F(\mathrm{f} x) = {}^{\prime}K + {}^{\prime}L\Phi{}^{\prime}U + {}^{\prime}M\varphi{}^{\prime}V + {}^{\prime}N\psi{}^{\prime}W,$$
$$F(\mathrm{f}' x) = {}^{\prime\prime}K + {}^{\prime\prime}L\Phi{}^{\prime\prime}U + {}^{\prime\prime}M\varphi{}^{\prime\prime}V + {}^{\prime\prime}N\psi{}^{\prime\prime}W,$$
$$F(\mathrm{f}'' x) = {}^{\prime\prime\prime}K + {}^{\prime\prime\prime}L\Phi{}^{\prime\prime\prime}U + {}^{\prime\prime\prime}M\varphi{}^{\prime\prime\prime}V + {}^{\prime\prime\prime}N\psi{}^{\prime\prime\prime}W.$$

Soit substituée dans la première de ces équations, à la place de x sa valeur fu prise dans l'équation ${}^{\prime}W = u$; dans la seconde, la valeur de $x = f'u$ prise dans ${}^{\prime\prime}W = u$; dans la troisième, la valeur de $x = f''u$ prise dans ${}^{\prime\prime\prime}W = u$. Soient aussi ${}^{\backprime}K, {}^{\backprime}L, {}^{\backprime}M \ldots {}^{\backprime\backprime}K, {}^{\backprime\backprime}L, {}^{\backprime\backprime}M \ldots {}^{\backprime\backprime\backprime}K, {}^{\backprime\backprime\backprime}L, {}^{\backprime\backprime\backprime}M \ldots$ &c. les fonctions de u, que deviennent par cette opération les fonctions correspondantes de x, représentées par ${}^{\prime}K, {}^{\prime}L, {}^{\prime}M \ldots {}^{\prime\prime}K, {}^{\prime\prime}L, {}^{\prime\prime}M \ldots {}^{\prime\prime\prime}K, {}^{\prime\prime\prime}L, {}^{\prime\prime\prime}M \ldots$ &c. & les trois équations se transformeront en celles-ci,

$$F[\mathrm{f}(fu)] = {}^{\backprime}K + {}^{\backprime}L\Phi{}^{\backprime}U + {}^{\backprime}M\varphi{}^{\backprime}V + {}^{\backprime}N\psi u,$$
$$F[\mathrm{f}'(f'u)] = {}^{\backprime\backprime}K + {}^{\backprime\backprime}L\Phi{}^{\backprime\backprime}U + {}^{\backprime\backprime}M\varphi{}^{\backprime\backprime}V + {}^{\backprime\backprime}N\psi u,$$
$$F[\mathrm{f}''(f''u)] = {}^{\backprime\backprime\backprime}K + {}^{\backprime\backprime\backprime}L\Phi{}^{\backprime\backprime\backprime}U + {}^{\backprime\backprime\backprime}M\varphi{}^{\backprime\backprime\backprime}V + {}^{\backprime\backprime\backprime}N\psi u.$$

Éliminant ψu, il restera les deux équations

$${}^{\backprime\backprime}NF[\mathrm{f}(fu)] - {}^{\backprime}NF[\mathrm{f}'(f'u)] = {}^{\backprime\backprime}N{}^{\backprime}K - {}^{\backprime}N{}^{\backprime\backprime}K + {}^{\backprime\backprime}N{}^{\backprime}L\Phi{}^{\backprime}U - {}^{\backprime}N{}^{\backprime\backprime}L\Phi{}^{\backprime\backprime}U + {}^{\backprime}M{}^{\backprime\backprime}N\varphi{}^{\backprime}V - {}^{\backprime\backprime}M{}^{\backprime}N\varphi{}^{\backprime\backprime}V,$$
$${}^{\backprime\backprime\backprime}NF[\mathrm{f}'(f'u)] - {}^{\backprime\backprime}NF[\mathrm{f}''(f''u)] = {}^{\backprime\backprime\backprime}N{}^{\backprime\backprime}K - {}^{\backprime\backprime}N{}^{\backprime\backprime\backprime}K + {}^{\backprime\backprime\backprime}N{}^{\backprime\backprime}L\Phi{}^{\backprime\backprime}U - {}^{\backprime\backprime}N{}^{\backprime\backprime\backprime}L\Phi{}^{\backprime\backprime\backprime}U + {}^{\backprime\backprime}M{}^{\backprime\backprime\backprime}N\varphi{}^{\backprime\backprime}V - {}^{\backprime\backprime\backprime}M{}^{\backprime\backprime}N\varphi{}^{\backprime\backprime\backprime}V,$$

que j'écris, pour abréger, de la manière suivante,

$$A = B\Phi{}^{\backprime}U - C\Phi{}^{\backprime\backprime}U + E\varphi{}^{\backprime}V - G\varphi{}^{\backprime\backprime}V,$$
$$\mathrm{a} = \mathrm{b}\Phi{}^{\backprime\backprime}U - \mathrm{c}\Phi{}^{\backprime\backprime\backprime}U + \mathrm{e}\varphi{}^{\backprime\backprime}V - \mathrm{g}\varphi{}^{\backprime\backprime\backprime}V,$$

dans lesquelles les quantités $A, B, C \ldots$ &c. a, b, c... &c. sont données en u, & où il ne reste plus que les deux fonctions arbitraires Φ & φ.

Soit fait $''U = v$ & $'U - ''U = \Delta v$, ce qui donne $\Phi\, 'U = \Phi v + \Delta \Phi v$, & d'où l'on tire deux valeurs de u, l'une en v, & l'autre en Δv, & par conséquent un rapport de Δv à v. Soit fait aussi $''V = v'$ & $'V - ''V = \Delta' v'$, ce qui donne $\varphi\, 'V = \varphi v' + \Delta' \varphi v'$, & une valeur de $\Delta' v'$ en v'.

Soit fait semblablement dans la seconde équation, $'''U = \omega$ & $''U - '''U = \delta \omega$, ($\delta$ étant ici le caractère d'une différence finie) ce qui donne $\Phi\, ''U = \Phi \omega + \delta \Phi \omega$, & d'où l'on tire deux valeurs de u, l'une en ω, l'autre en $\delta \omega$, & par conséquent un rapport de $\delta \omega$ à ω. Soit fait $'''V = \omega'$ & $''V - '''V = \delta' \omega'$; d'où l'on tire $\varphi\, ''V = \varphi \omega' + \delta' \varphi \omega'$, & un rapport de la différence finie $\delta' \omega$ à ω.

Enfin, soit substituée pour u sa valeur en v dans les coëfficiens de la première équation, & pour u sa valeur en ω dans les coëfficiens de la seconde, elles deviendront

$$A' = (B' - C')\Phi v + B' \Delta \Phi v + (E' - G')\varphi v' + E' \Delta' \varphi v',$$
$$a' = (b' - c')\Phi \omega + b' \delta \Phi \omega + (e' - g')\varphi \omega' + e' \delta' \varphi \omega',$$

dont les intégrales donneront les formes des fonctions φ & Φ, & par conséquent celle de la fonction ψ.

Remarque.

Il y a un grand nombre de cas où il est facile d'éliminer une de ces deux fonctions arbitraires. En effet, il est évident que l'on peut mettre v à la place de ω dans la seconde de ces équations; mais alors il ne faut pas mettre v' à la place de ω', parce que v' n'est pas composé de v comme ω' l'est de ω. Ainsi les deux équations précédentes peuvent se traduire de cette manière,

$$A' = (B' - C')\Phi v + B' \Delta \Phi v + (E' - G')\varphi v' + E' \Delta' \varphi v',$$
$$a' = (b' - c')\Phi v + b' \delta \Phi v + (e' - g')\varphi v'' + e' \delta' \varphi v'',$$

desquelles il sera possible d'éliminer la fonction Φ toutes les fois que les coëfficiens $(B' - C')$, B', $(b' - c')$ & b' seront constans; car on aura

$$(b' - c')A' + b'\delta A' = (b' - c')(B' - C')\Phi\nu + (b' - c')B'\Delta\Phi\nu$$
$$+ b'(B' - C')\delta\Phi\nu + B'b'\delta\Delta\Phi\nu$$
$$+ (b' - c')[(E' - G')\varphi\nu' + E'\Delta'\varphi\nu'] + b'\delta[(E' - G')\varphi\nu' + E'\Delta'\varphi\nu'],$$

&

$$(B' - C')a' + B'\Delta a' = (B' - C')(b' - c')\Phi\nu + (B' - C')b\delta\Phi\nu$$
$$+ (B' - C')B'\Delta\Phi\nu + B'b'\Delta\delta\Phi\nu$$
$$+ (B' - C')[(e' - g')\varphi\nu'' + e'\delta'\varphi\nu''] + B'\Delta[(e' - g')\varphi\nu'' + e'\delta'\varphi\nu''],$$

& retranchant ces deux équations l'une de l'autre, les termes affectés de la fonction Φ ſe détruiront, il ne reſtera dans l'équation que la fonction φ & ſes différences finies & partielles.

Il eſt aiſé d'apercevoir qu'il en ſera de même, quelque nombre de fonctions arbitraires qu'il y ait dans la propoſée: Donc, la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles, dépend du calcul intégral des équations aux différences finies, dans leſquelles le rapport de la variable à ſa différence finie eſt donné, variable ou conſtant.



MÉMOIRE

SUR

LA STRUCTURE DES OS DANS LES OISEAUX,

Et de leurs diversités dans les différentes espèces.

Par M. CAMPER.

TOUTES les fois que j'ai examiné la structure interne des animaux, j'ai admiré l'observation du grand Galilée*. Que l'on y rencontre toujours de nouvelles merveilles! J'en ai déjà donné plusieurs preuves, dans l'exposition de la génération des crapauds de Surinam ou de Dipal; dans celle de l'organe de l'ouïe des poissons ordinaires, des poissons cartilagineux, & du Cachalot que j'ai présentée, en partie, à l'Académie royale des Sciences, en partie à celle de Harlem. Parmi les descriptions que je n'ai pas encore eu le temps d'achever, aucune ne m'a paru plus digne d'attention, que celle des cavités qui se trouvent dans les os des Oiseaux, principalement dans ceux qui environnent leur tronc.

* *Systemat. Cosmic. Dialog. II, p. 210.*

Les os du bras, les clavicules, les os de la poitrine, les vertèbres du dos, les os des îles, & dans plusieurs les os de la cuisse, sont tout-à-fait creux, sans moelle, & reçoivent dans leurs cavités, par la respiration, l'air, qui par ce moyen rend les oiseaux plus légers, & plus capables de s'élever dans l'air.

C'est une découverte tout-à-fait nouvelle, qui sera d'autant plus agréable à l'Académie, qu'elle est purement physique. Je l'ai faite au mois de Février de l'année passée, lorsque j'étois occupé à faire des recherches sur les Oiseaux, pour développer le mécanisme de la respiration qui y est fort singulière.

Je

Je savois, d'après les réflexions de Galilée [a] & de Borelli [b], que les os des oiseaux étoient creux & minces, afin qu'ils puissent plus facilement voler: ces deux grands hommes ont été uniquement attentifs à la substance des os; Galilée surtout, qui a très-évidemment prouvé, en les comparant avec les tuyaux de bois ou de métal, qu'un os de la même longueur & pesanteur étant creux [c], avoit plus de force qu'un os de la même pesanteur & longueur, mais plein; il a même ajouté cette règle admirable: *que la force des os creux est à celle des os solides, dans ce cas, comme leurs diamètres* [d]. Cette réflexion peut non-seulement être appliquée à la structure des os en général, mais aussi à celle des plantes, dans lesquelles nous voyons de pareilles cavités sans moelle, mais remplies d'air.

Borelli [e] a développé dans l'explication du vol des oiseaux & du mécanisme de leurs ailes, la connoissance parfaite qu'il avoit de la composition de leurs os [f], de la cavité de leur poitrine & de leur bas-ventre, & de l'air qui remplit ces deux cavités.

La respiration des oiseaux est aujourd'hui trop connue, pour avoir besoin d'une explication particulière; mais la respiration dans les os du tronc, des ailes & des cuisses, mérite un détail particulier. C'est à cette considération seule que je me bornerai dans ce Mémoire.

Je l'ai appelée une découverte, puisque je ne connois aucun Auteur qui en ait indiqué la moindre chose; il est bien vrai que M. le Comte de Marsigli [g], a su que les os du bras, dans le pélican, étoient creux & sans moelle, & très-légers; mais il n'a pas songé à l'air, ni à la façon dont l'air devoit entrer dans cette cavité.

M. le Comte de Buffon, le plus grand Naturaliste que nous ayons vu depuis Aristote, n'a pas ignoré ce que Galilée & Borelli ont communiqué à ce sujet; il en fait usage dans son excellent Discours sur la nature des Oiseaux [h]; mais il n'a pas su que les cavités de ces os reçoivent de l'air au lieu de moelle, & que ce fluide y entre par la respiration.

[a] *De Mechan. dial. 2, p. 132.*
[b] *De motu animi, propos. 194, p. 156.*
[c] *Ibid.*
[d] *Mechan. dial. 2, p. 132.*
[e] *Prop. 182, p. 146.*
[f] *Prop. 194.*
[g] *Danub. Fran. Mysic. tom. VI, tab. 8, p. 10 & seq.*
[h] *Pages 16, 33, 34.*

On m'apporta le 10 de Février 1771, un grand aigle de mer *, tel que ceux dont on tire annuellement une grande quantité, aux environs de cette Ville, pendant la gelée. Je disséquai les côtes, sur-tout les crochets & leurs muscles, &c. Je préparai un os de la cuisse, principalement pour montrer sa cavité & les fibres qui soutiennent en dedans la lame osseuse dans cet animal. Je croyois y trouver de la moelle, mais je n'y trouvai qu'un périoste, une grande veine *ikl*, qui le tapissoit, & des traces de l'air épanché, comme je l'ai représenté dans la sixième figure.

* *L'orfraie de Buffon, Hist. des Oiseaux, tome I.er, page 112.*

Étonné de cet évènement, j'allai d'abord examiner le squelette d'un aigle, d'un aras & d'un hibou; je trouvai un très-grand trou sous le grand trochanter du squelette de l'aigle, je n'en trouvai aucun vestige dans les autres. Mais je voyois de très-grands trous sous les têtes des os du bras de tous mes squelettes d'oiseaux. J'examinai donc les bras dans l'aigle avec beaucoup d'attention, j'ouvris cet os suivant sa longueur, je n'y rencontrai point de moelle, mais le périoste, comme dans les os de la cuisse, & une ouverture très-grande à la partie intérieure de la tête de l'humerus *fig. 1, a, b, c.* Voilà une analogie. L'air pouvoit entrer par ces trous dans les cavités des os; mais je ne savois pas encore comment il pouvoit pénétrer jusqu'à ces ouvertures? J'avois par hasard un hibou qui étoit mort; je fis un petit trou à l'extrémité de l'os du bras, *fig. 3, idem*; j'appliquai un tuyau de cuivre, & soufflant, je vis avec bien du plaisir que toute la poitrine & le bas-ventre s'enflèrent; l'air sortoit par la trachée-artère à mesure que je soufflois. Je liai donc, pour avoir une contre-épreuve, la trachée-artère autour de mon tuyau, & soufflant, j'eus la satisfaction de voir sortir l'air par le petit trou fait à l'os du bras, lorsque j'y appliquois la flamme d'une bougie ou quelque corps léger, ou une petite plume.

L'os de la cuisse de ce hibou, quoique perforé, ne transmettoit pas l'air, aussi n'y avoit-il pas d'ouverture sous le trochanter.

La poitrine & le bas-ventre de l'aigle étoient trop blessés pour répéter ces expériences; j'ôtai donc les boyaux, je soufflai par l'os de la cuisse, & je vis que la plèvre qui va jusque dans le bas-ventre, formoit un conduit membraneux, qui allant le long des vaisseaux cruraux, aboutissoit à l'ouverture de la cuisse *d, e, f, fig. 6*, & qui donnoit passage à l'air pour entrer librement dans la cavité de cet os. Cela redoubla mon ardeur pour pousser plus loin mes découvertes.

Je me fis donner des magasins à provision, un dindon & quelques poulardes; je perforai de la même façon les extrémités des os du bras, j'y appliquai mon tuyau, & soufflant, je vis avec surprise la poitrine & le bas-ventre s'enfler comme dans le hibou; les fémurs n'admettoient pas l'air, n'étant pas vides, mais remplis de moelle comme dans les hibous. Dans le coq de bruyère, l'expérience réussit comme dans l'aigle, car ils ont des trous sous le trochanter, *fig. 8, d, e, f.*

La cigogne, dont on me montra le squelette, a les os du bras pareillement vides & remplis d'air, & un trou considérable *a, b, c, fig. 2;* elle a aussi les cuisses vides, & un trou manifeste sous le trochanter, *fig. 7, d, e, f.*

J'imaginai dès-lors que je trouverois les os du bras vides dans la plupart des oiseaux; mais que je ne trouverois les cuisses perforées & perméables à l'air que dans ceux qui volent très-haut, comme les aigles, les cigognes, & tous ceux qui ont le corps pesant & beaucoup de muscles, &c.

Cette conjecture fut vérifiée par la dissection d'un moineau, ses cuisses se trouvèrent, aussi-bien que les bras, remplies de moelle; aussi ne vole-t-il pas haut, ni long-temps de suite. L'allouette, par exemple, qui remplit l'air de son chant mélodieux se soutient long-temps sur ses ailes; ses bras sont creux, remplis d'air, & ils ont une ouverture très-considérable.

Je desirois alors ardemment d'avoir des squelettes d'autruche, de casoar & de pingoin, pour savoir si les os des bras étoient remplis d'air! Je formois déjà une conclusion négative; je priai M. le professeur Allemand de Leyde, d'examiner le squelette de l'autruche, il eut la bonté de me répondre,

qu'il n'y avoit aucune ouverture ſous la tête de l'*os humerus* de cet oiſeau. Je ne trouvai nulle part le ſquelette d'un caſoar ni d'un pingoin; j'ai reçu depuis peu deux pingoins du cap de Bonne-eſpérance, dans l'eſprit-de-vin ; je n'ai pas encore eu le temps de pouvoir diſſéquer les parties intéreſſées.

* Prop. 182. Borelli * a déjà fait une très-belle remarque, que les ailes ſont plus grandes à meſure que les oiſeaux volent plus haut; mais la nôtre rend leur mécaniſme plus curieux & plus intéreſſant.

Je reviens de cette digreſſion à l'aigle dont j'examinai très-attentivement les clavicules & les ſoutiens des omoplates, les omoplates même, l'os *ſternum*, les côtes & les vertèbres du dos, j'ai trouvé tous ces os creux, vides, remplis d'air, même l'os *ſacrum*, & les os des îles.

Je fis le 24 Février 1771, les expériences ſuivantes dans un hibou étouffé.

1.° Ayant ôté le grand muſcle pectoral, & perforé l'os du bras près de ſon extrémité, je ſoufflai dans ce trou, & j'aperçus ſur le champ une grande poche membraneuſe, entre les deux pectoraux, qui alloit le long des vaiſſeaux & des nerfs brachiaux, donnant un conduit membraneux vers l'ouverture qui ſe trouve près de la tête de cet os; cette poche s'enfloit auſſi, lorſque je ſoufflois par la trachée-artère.

2.° Je décharnai le ſoutien oſſeux de l'omoplate, qui étoit articulé avec le *ſternum;* j'y fis une ouverture très-petite, j'y ſoufflai, & la même poche s'enfla à pluſieurs repriſes.

3.° Je perforai la lame extérieure du *ſternum*, près de ſon union avec les ſoutiens ci-devant décrits : l'air paſſoit auſſi immédiatement dans la poitrine & dans le bas-ventre. Preſque tous les oiſeaux ont des trous dans l'intérieur de cet os, & la plèvre eſt la continuation du périoſte interne des cellules de cet os.

4.° Je fis la même expérience ſur les clavicules, & je m'aperçus pareillement de leur communication avec la cavité de la poitrine.

5.° Je décharnai la partie poſtérieure de l'os des îles, je perforai la lame oſſeuſe extérieure, & l'air paſſoit par ſes cellules dans la poitrine comme ſi j'avois ſoufflé par la trachée-artère.

6.° L'air paſſoit auſſi par les corps des vertèbres du dos, après avoir décharné leur corps, perforé la lame oſſeuſe, & appliqué un tuyau.

7.° Les côtés ſont auſſi vides, & reçoivent l'air par pluſieurs trous qui ſont viſibles en dedans de la cavité de la poitrine; auſſi peut-on, par la même opération, ſouffler l'air par les côtes dans la poitrine, comme par les autres os ci-devant nommés.

J'ai répété les première, ſeconde, troiſième, quatrième & ſixième Expériences ſur un aigle, le 13 Mars 1771, devant mes auditeurs, au théâtre anatomique, avec le même ſuccès.

8.° J'ai perforé l'os de la cuiſſe de cette orfraie; j'y ai appliqué mon tuyau, & l'air a paſſé facilement dans la poitrine de cet animal. Ayant ſoufflé par la trachée-artère, l'air a ſorti par ce même trou avec tant de violence qu'il m'a été facile, par ce moyen, d'éteindre une chandelle très-promptement.

Je ne ſaurois dire ſi la même ſtructure a lieu dans les autres oiſeaux; cela exige un examen plus particulier: il ſuffit que l'aigle, dont la vélocité & la hauteur du vol ſont les plus grandes, & dont la force, tant pour voler, que pour ſaiſir & pour déchirer ſa proie, doit être néceſſairement plus grande; que l'aigle, dis-je, ſe rende plus léger, non-ſeulement par l'air qui dilate ſes poumons, ſa poitrine & ſon bas-ventre, mais encore par l'air qui remplit les cavités de ſes os.

Il eſt très-probable, par les expériences faites ſur le hibou, que la Nature ſe ſert du même mécaniſme dans tous les oiſeaux de proie.

Il eſt pareillement très-probable que dans l'autruche, le caſoar & les pingoins, on ne trouvera aucun os creux; que dans les cygnes, les oies & les canards les os du bras ſeuls ſeront vides & remplis d'air; & ſeulement en partie dans les

dindons, les poules & les perdrix; car ces dernières ont les os du bras en partie remplis de moelle, en partie de l'air; ou bien, pour parler plus généralement, il y a apparence que les os ſont vides & remplis d'air, à proportion que les oiſeaux portent le vol plus ou moins haut.

Galilée & Borelli ont prouvé que la ſubſtance des os, dans les oiſeaux, étoit concave comme dans les flûtes; mais ils ont ſuppoſé qu'elle étoit remplie d'une moelle huileuſe beaucoup plus légère que l'os. M. de Marſigli a obſervé que l'os du bras dans le pélican étoit vide & rempli d'air. Je me flatte d'avoir découvert que dans beaucoup d'oiſeaux, & dans les oiſeaux de proie, tous les os qui peuvent avoir communication avec la poitrine ou l'*abdomen*, ſont remplis d'air, & j'ai prouvé les ouvertures par leſquelles l'air entre régulièrement, & s'y renouvelle par la reſpiration.

L'air qui entre, & qui remplit ainſi les cavités des os, doit néceſſairement devenir plus léger par la chaleur du corps; moyennant quoi l'animal devenu ſpécifiquement plus léger que l'air même, vole avec plus d'aiſance.

Cette découverte nous fait voir outre cela que la moelle n'eſt pas néceſſaire pour la nourriture, ni pour l'accroiſſement des os, ni pour oindre les articulations, ni pour la formation du cal: car j'ai trouvé très-ſouvent l'os du bras, dans les poules, caſſé & parfaitement guéri. J'ajoute, pour que la démonſtration ſoit plus entière, la figure d'un tel os, *fig. 10.*

L'oſſification reçoit par-là beaucoup d'éclairciſſemens, & paroît devoir être examinée par ce nouveau plan.

Il n'eſt pourtant pas ſans exemple, même dans notre corps, de voir la ſubſtance celluleuſe des os remplie d'air; les apophyſes maſtoïdiennes reçoivent l'air par les trompes d'Euſtache.

La tête de l'hibou fournit un autre exemple auſſi curieux, l'air entre dans le diploë du crâne entier par les trous auditifs; car les oiſeaux n'ont point de trompes d'Euſtache comme les quadrupèdes & les amphibies.

Fig. 2.



Fig. 1.



Fig. 5.



Fig. 3.



Fig. 4.



P. Camper del. *Elth Haussard Sculp.*

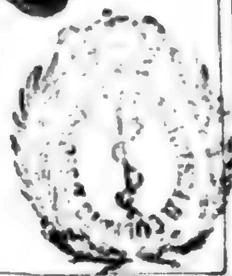












P. Camper del.　　Elth. Haussard Sculp.

La tête de l'éléphant fournit encore une preuve plus frappante: mais il est temps de finir ce Mémoire, après avoir donné une explication courte des figures, sans lesquelles la description auroit été moins instructive & moins claire.

EXPLICATION DES FIGURES.

La *première Figure* représente la partie supérieure de l'os du bras gauche de l'orfraie; *a, b, c*, le trou par où l'air entre.

La *seconde*, la partie supérieure de l'os du bras gauche de la cygogne; *a, b, c*, le trou aërien.

La *troisième*, l'os du bras gauche du hibou; *a, b*, le trou aërien; *p*, le trou fait à la partie inférieure pour appliquer le tuyau.

La *quatrième*, l'os du bras droit d'un dindon; *a, b, c*, le trou aërien.

La *cinquième*, l'os du bras droit d'une poule; *a, b, c*, le trou aërien.

La *sixième*, l'os de la cuisse gauche de l'orfraie; *d, e, f*, le trou aërien sous le trochanter *h*; *g*, la tête de cet os; *i, k, l, m*, les piliers pour donner de la force à l'os, qui d'ailleurs seroit trop mince; *i, l, m, n*, la veine qui tapisse le périoste interne.

La *septième* représente l'os de la cuisse gauche de la cygogne; *d, e, f*, le trou aërien; *h*, le trochanter; *g*, la tête de l'os.

La *huitième*, l'os de la cuisse gauche du coq de bruyère; *d, e, f*, le trou aërien.

La *neuvième*, l'os de la cuisse droite de la poule, sans trou aërien.

La *dixième*, l'os du bras droit d'une poularde; *a, b*, le trou aërien; *q, r*, la fracture parfaitement unie par le cal.



OBSERVATIONS D'UNE TÊTE EXOSTOSÉE.

Par M. RIBELT, Chirurgien à Perpignan.

JEAN Forcade, fils de M. Forcade, Chirurgien à Perpignan, naquit le 10 Décembre 1722. Dans son enfance sa figure étoit agréable : à six ans il eut une petite vérole bénigne : parvenu à l'âge de douze, son père lui ouvrit un dépôt lacrymal au grand canthus de l'œil droit qui suppura pendant assez long-temps; ce fut alors qu'on s'aperçut d'une éminence qui se détachoit de la partie moyenne de l'apophyse nasale de l'os maxillaire du côté droit : cette éminence, qui étoit alors de la grosseur d'une petite amande, résista à différens topiques; elle fit des progrès, & devint en peu de temps une tumeur considérable.

A l'âge de quinze ans, les deux os maxillaires de la face de Jean Forcade étoient égaux, & présentoient deux éminences si considérables, qu'elles tenoient, pour ainsi dire, les cartilages du nez enterrés dans le vide qu'on y observoit, & elles comprimoient ces cartilages au point qu'il ne pouvoit respirer que par la bouche.

Ce jeune homme suivit, comme les autres enfans de son âge, le cours des basses classes; il étoit à charge à ses condisciples, qui ne pouvoient supporter la difformité de son visage, quoique son esprit & son caractère les portassent à l'aimer. Son père qui le chérissoit avec d'autant plus de tendresse qu'il le voyoit malheureux, mit tout en œuvre pour faire disparoître cette difformité, mais tous ses soins furent inutiles, le sieur Jean Forcade étoit condamné à devenir un sujet d'observation.

A l'âge de vingt ans sa figure étoit monstrueuse. Dans le mois de Septembre 1766, il fut attaqué d'une fièvre putride &

& maligne, d'une eſpèce ſi violente, qu'il reſta aveugle pendant ſa convaleſcence qui fut très-longue: à meſure qu'il reprit des forces, il commença à voir de l'œil gauche aſſez pour ſe conduire ſeul; mais il lui ſurvint un rhume, ſuivi d'une ſuppuration dans le poumon, & il mourut le 16 Juin 1767, dans la quarante-cinquième année de ſon âge.

J'ai diſſéqué ſa tête avec le plus grand ſoin. Malgré l'attention la plus exacte, il ne me fut pas poſſible de trouver aucun muſcle de la face; la peau paroiſſoit collée immédiatement ſur le perioſte; les muſcles qui ſervent à lever la mâchoire inférieure, à la porter en avant, & à la baiſſer, étoient moins charnus qu'ils ne le ſont dans l'état naturel; le crâne & la face étoient entièrement exoſtoſés avec des éminences conſidérables qui ſe détachoient de la face & de la mâchoire inférieure.

Les exoſtoſes étoient de la plus grande dureté; le crâne & la face peſoient cinq livres, la mâchoire inférieure ſeule, trois livres trois onces, & le tout enſemble huit livres un quart; tandis qu'une tête, avec la mâchoire inférieure, pèſe ordinairement moins de deux livres.

La taille du ſieur Jean Forcade étoit de quatre pieds onze pouces; ſon corps bien proportionné & dans l'état naturel. Il étoit d'un tempérament chaud & ſec, le viſage très-coloré, & malgré ſa conformation extraordinaire il ne s'étoit jamais plaint d'aucun mal dans aucune partie de la tête ou de la mâchoire.

Deſcription particulière des os du crâne & de la face.

L'os coronal, eſt inégal dans ſa région ſupérieure; il l'eſt auſſi dans ſa région moyenne; il l'eſt ſur-tout dans ſa région inférieure.

Aux boſſes coronales on remarque pluſieurs éminences aſſez ſaillantes, & quantité d'empreintes aſſez profondes.

Les arcades ſourcilières diffèrent de l'état naturel, en ce que celle du côté droit ſe trouve concave & inégale, & celle

du côté gauche fort bourſouflée & aſſez unie, manquant toutes les deux de trou ſurcilier & d'échancrure.

Les apophyſes angulaires internes ſont très-peu marquées, & ſe trouvent ſéparées par une portion de la ſuture ſagittale qui ne va qu'à un travers de doigt en comptant du bas en haut, & le reſte du coronal ſe trouve exactement formé par une ſeule & même pièce.

Les apophyſes angulaires externes ſont auſſi ſaillantes du côté de l'orbite que du côté externe.

La portion du coronal qui forme la portion ſupérieure des orbites eſt inégale, & on y remarque quantité de trous vagues.

Les régions latérales ſont auſſi inégales & ſemblables aux inégalités que nous avons déjà obſervées à la région moyenne.

Les os pariétaux ſe trouvent aſſez unis dans leur partie ſupérieure; dans leur région ſupérieure on trouve des productions oſſeuſes fort ſaillantes & larges; dans leur région inférieure on remarque auſſi une très-grande quantité d'inégalités.

A l'angle antérieur & inférieur de chacun de ces os on trouve des excroiſſances fort larges; on trouve auſſi des inégalités aux angles poſtérieurs & inférieurs.

Les excroiſſances qu'on y remarque ſont encore beaucoup plus larges, inégales & ſaillantes que celles que nous avons obſervées aux angles antérieurs & inférieurs.

Le trou qu'on obſerve à chaque pariétal manque dans ce ſujet.

A l'os occipital, nous n'avons remarqué autre choſe, ſi ce n'eſt que les trous maſtoïdiens ſont très-conſidérables, de même que les trous condyloïdiens antérieurs, qui intérieurement ſe trouvent doubles & ſéparés par une lame oſſeuſe aſſez conſidérable.

Aux os des tempes, la portion écailleuſe du droit eſt convexe & aſſez unie vers ſa ſuture écailleuſe. Supérieurement on y trouve un os ſurnuméraire; ſon apophyſe maſtoïde eſt

fort considérable, elle présente des empreintes tendineuses très-profondes.

Celui du côté gauche est remarquable parce que la portion écailleuse se trouve convexe & unie dans sa partie supérieure. A sa partie antérieure on trouve une production osseuse assez saillante & assez inégale.

L'apophyse mastoïde gauche est semblable à celle du côté droit; l'apophyse zygomatique est assez épaisse, ronde & inégale.

Les parties latérales de l'os etmoïde sont fort épaisses, compactes, inégales & un peu convexes.

Les os propres du nez sont fort épais & très-compactes; à l'extrémité inférieure on remarque une production osseuse qui a pris la figure de l'apophyse coracoïde; elle la surpasse même en dureté.

Les os unguis sont d'une figure très-irrégulière; celui du côté droit est étroit & long, & celui du côté gauche est presque triangulaire: tous les deux sont fort épais & compactes.

Les os maxillaires sont contre nature & comme on n'en a jamais vu. Ils paroissent divisés en quatre portions par des échancrures très-profondes.

La portion antérieure qui est la plus considérable est très-boursouflée & très-inégale, elle couvre antérieurement tout l'orbite.

La portion qui fait partie de l'orbite est très-boursouflée, & occupe la plus grande partie de la fosse orbitaire.

L'apophyse malaire se trouve fort boursouflée, arrondie & séparée de la portion que nous avons nommée antérieure par une fente fort profonde, à la partie inférieure de laquelle on trouve le trou maxillaire supérieur.

Le canal qui donne passage au nerf maxillaire supérieur, pour se porter au sinus maxillaire & à la face, se trouve à ce sujet dans un plan vertical; son orifice interne se trouve à l'entrée de l'orbite; plus antérieurement on remarque deux autres trous qui communiquent dans le susdit canal.

La portion palatine de ces os se trouve plus boursouflée que le bord alvéolaire. Ils paroissent ne former qu'une seule & même pièce avec les os palatins & le vomer.

Ces os se trouvent séparés du côté du palais par une fente fort profonde & large qui va depuis le trou incisif ou gustatif jusqu'à la partie postérieure du palais.

Le bord postérieur du vomer se trouve très-boursouflé, & ne laisse de chaque côté qu'une petite fente fort étroite & fort courte qui communique dans l'intérieur du nez; antérieurement, les os maxillaires remplissent les fosses nazales, & ne laissent qu'une petite fente si étroite qu'à peine on peut apercevoir le bord antérieur du vomer.

Il est à remarquer qu'à l'os maxillaire du côté gauche, la portion que nous avons appelée antérieure se trouve beaucoup plus boursouflée & raboteuse que celle du côté droit.

Ces os sont très-compactes dans toute leur substance.

Les os de la pomette sont également très-compactes, & d'une épaisseur considérable; celui du côté droit ne diffère de l'état naturel qu'en ce qu'on y remarque quelques inégalités & une sinuosité transversale & profonde vers la partie inférieure de sa face externe. A la place du trou qui donne passage aux vaisseaux qui vont se distribuer à l'œil, on trouve à la face externe qui fait partie de la sinuosité zigomatique, un os surnuméraire, figuré comme une olive, qui est joint par suture avec l'os maxillaire, & l'os de la pomette faisant partie de la face sphénomaxillaire.

L'os de la pomette du côté gauche est d'un volume très-considérable & d'une figure singulière, sa face externe est divisée en deux portions par une sinuosité ou gouttière transversale & très-profonde qui se porte depuis l'apophyse zigomatique jusqu'à cette portion de l'os maxillaire qu'on peut appeler *malaire;* la portion supérieure de cette face externe est cinq à six fois plus considérable que la portion inférieure sur laquelle on observe quantité de sillons ou enfoncemens. L'apophyse orbitaire supérieure se trouve fort arrondie & saillante en dehors, & l'apophyse orbitaire

inférieure présente une face longue, assez unie & un peu concave. Ces deux apophyses se trouvent séparées par une gouttière qui se porte depuis l'entrée de l'orbite jusqu'à la fente sphénomaxillaire; on trouve également un os surnuméraire à sa face externe, qui fait partie de la sinuosité zygomatique.

La mâchoire inférieure n'a aucune ressemblance à celle de l'homme dans l'état naturel, on aura de la peine à la décrire, parce qu'on n'a jamais rien vu d'égal. Je la diviserai pourtant en corps & en branches. A la partie antérieure de son corps on peut observer la face quarrée qui ne présente aucune division; à la partie inférieure de cette face quarrée, on remarque une échancrure aussi large que profonde, dans laquelle on voit plusieurs excroissances; entr'autres, une qui est plus considérable qu'une grosse amande; toutes ces éminences se trouvent séparées par des gouttières assez profondes. Latéralement, du côté externe, son corps se trouve plus boursouflé, & forme de chaque côté deux bosses semblables à des œufs de poule; celles du côté droit sont plus considérables que celles du côté gauche.

Les branches ou extrémités se trouvent séparées du reste du corps par une gouttière très-profonde qui forme une espèce d'y-grec renversé; dans le milieu des deux branches qui forme l'y-grec, on voit une excroissance qui se trouve beaucoup plus considérable du côté droit que du côté gauche; celle du côté droit est de la grosseur d'une noix, elle porte elle-même une autre excroissance de la grosseur d'une noisette. Celle du côté gauche ressemble par sa figure à un gland de chêne; à la face interne de son corps, on observe que les apophyses *milo* ressemblent par leur figure à deux marrons d'Inde, & laissent entre elles un espace qui est plus profond que large; celle du côté droit vient presque au niveau de l'extrémité supérieure du corps des dents molaires postérieures.

La gouttière qui fait la séparation du corps d'avec les branches servoit à loger la troisième branche de l'artère carotide

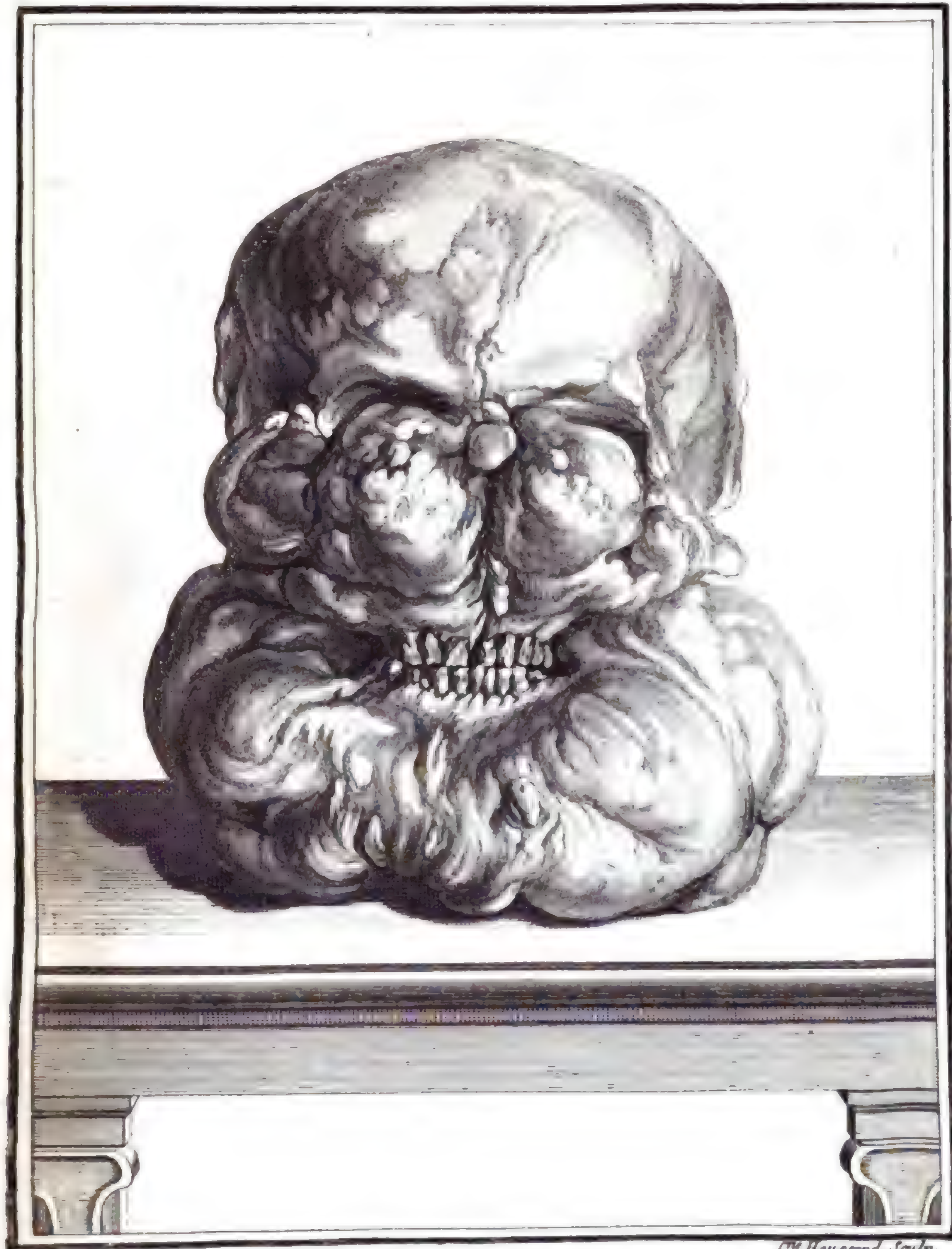
externe appelée *maxillaire*, qui va gagner la commiſſure des lèvres pour ſe porter à la partie latérale du nez, au grand angle de l'œil, & au front.

On remarque à la face externe beaucoup de trous vagues aſſez conſidérables.

Les branches ſont d'une figure extraordinaire & fort bourſouflées; elles ne forment aucun angle à l'extrémité de la baſe; la branche du côté droit eſt plus bourſouflée que celle du côté gauche; elles offrent toutes les deux beaucoup de petites gouttières & une ſinuoſité ou couliſſe au-deſſus des condyles. Les apophyſes coronoïdes n'ont aucune reſſemblance à l'état naturel, mais nous pouvons les appeler avec raiſon des tubéroſités, puiſqu'elles ſe trouvent larges & raboteuſes. Les condyles pourroient être également appelés tubéroſités, ſi on n'y remarquoit les facettes articulaires, qui ſont recouvertes par une couche de ſubſtance cartilagineuſe deſſéchée. L'échancrure qui ſépare le condyle d'avec la tubéroſité ou apophyſe coronoïde ſe trouve fort inégale & raboteuſe, & on y remarque quantité de trous vagues.

À la face interne des branches il n'y a rien de remarquable, ſi ce n'eſt que les attaches des muſcles ptérigoïdiens internes ſont très-conſidérables.





Cl. Haussard Sculp.

ESSAI

Sur une application des règles de Maximis & Minimis *à quelques Problèmes de Statique, relatifs à l'Architecture.*

Par M. COULOMB, Ingénieur du Roi.

INTRODUCTION.

CE Mémoire eſt deſtiné à déterminer, autant que le mélange du Calcul & de la Phyſique peuvent le permettre, l'influence du frottement & de la cohéſion, dans quelques problèmes de Statique. Voici une légère analyſe des différens objets qu'il contient.

Après quelques obſervations préliminaires ſur la cohéſion, & quelques expériences ſur le même objet, l'on détermine la force d'un pilier de maçonnerie; le poids qu'il peut porter, preſſé ſuivant ſa longueur; l'angle ſous lequel il doit ſe rompre. Comme ce problème n'exige que des conſidérations aſſez ſimples, qui ſervent à faire entendre toutes les autres parties de cet Eſſai, tâchons de développer les principes de ſa ſolution.

Si l'on ſuppoſe un pilier de maçonnerie coupé par un plan incliné à l'horizon, en ſorte que les deux parties de ce pilier ſoient unies dans cette ſection, par une cohéſion donnée, tandis que tout le reſte de la maſſe eſt parfaitement ſolide, ou lié par une adhérence infinie; qu'enſuite on charge ce pilier d'un poids: ce poids tendra à faire couler la partie ſupérieure du pilier ſur le plan incliné, par lequel il touche la partie inférieure. Ainſi, dans le cas d'équilibre, la portion de la peſanteur, qui agit parallèlement à la ſection, ſera exactement égale à la cohérence. Si l'on remarque actuellement, dans le cas de l'homogénéité, que l'adhérence du pilier eſt réellement égale

pour toutes les parties; il faut, pour que le pilier puiſſe ſupporter un fardeau, qu'il n'y ait aucune ſection de ce pilier, ſur laquelle l'effort décompoſé de ſa preſſion puiſſe faire couler la partie ſupérieure. Ainſi, pour déterminer le plus grand poids que puiſſe ſupporter un pilier, il faut chercher parmi toutes ſes ſections celle dont la cohéſion eſt en équilibre avec un poids qui ſoit un *minimum:* car, pour lors, toute preſſion, au-deſſus de celle déterminée par cette condition, ſeroit inſuffiſante pour rompre le pilier.

Outre la réſiſtance qui provient de la cohéſion, j'ai eu égard à celle dûe au frottement. Les mêmes principes ſuffiſent pour remplir les deux conditions: l'application de cette recherche peut s'étendre à tous nos édifices, dont la maſſe eſt toujours ſoutenue par des colonnes, ou par quelque moyen équivalent.

L'on détermine enſuite la preſſion des terres, contre les plans verticaux qui les ſoutiennent; la méthode eſt abſolument la même. Si l'on ſuppoſe en effet un triangle-rectangle ſolide, dont un des côtés, ſoit vertical, & dont l'hypothénuſe touche un plan incliné, ſur lequel le triangle tend à gliſſer; ſi ce triangle, ſollicité par ſa peſanteur, eſt ſoutenu par une force horizontale, par ſa cohéſion, & par ſon frottement, qui agiſſent le long de cette hypothénuſe, l'on déterminera facilement, dans le cas d'équilibre, cette force horizontale par les principes de Statique. Si l'on remarque enſuite que les terres étant ſuppoſées homogènes, peuvent ſe ſéparer dans le cas de rupture, non-ſeulement ſuivant une ligne droite, mais ſuivant une ligne courbe quelconque; il s'enſuit que pour avoir la preſſion d'une ſurface de terre contre un plan vertical, il faut trouver parmi toutes les ſurfaces décrites dans un plan indéfini vertical, celle qui, ſollicitée par ſa peſanteur, & retenue par ſon frottement & ſa cohéſion, exigeroit, pour ſon équilibre, d'être ſoutenue par une force horizontale, qui fut un *maximum;* car, pour lors il eſt évident que toute autre figure demandant une moindre force horizontale, dans le cas d'équilibre, la maſſe adhérente ne pourroit ſe

ſe diviſer. Comme l'expérience donne à peu-près une ligne droite pour la ligne de rupture des terres, lorſqu'elles ébranlent leurs revêtemens, il ſuffit, dans la pratique, de chercher dans une ſurface indéfinie, parmi tous les triangles qui preſſent un plan vertical, celui qui demande, pour être ſoutenu, la plus grande force horizontale. Dès que cette force eſt déterminée l'on en déduit avec facilité les dimenſions des revêtemens.

L'on trouvera à la fin de ce même article les moyens de déterminer exactement parmi toutes les ſurfaces courbes que l'on peut tracer dans un fluide indéfini, celle dont la preſſion contre un plan vertical, eſt un *maximum*, en ayant égard au frottement & à la cohéſion. Cette recherche peut ſervir à trouver la preſſion des fluides cohérens, contre les parois des vaſes qui les ſoutiennent.

Enfin on termine ce Mémoire par chercher les dimenſions des voûtes, leurs points de rupture, les limites qui circonſcrivent leur état de repos, lorſque la cohéſion & le frottement contribuent à leur ſolidité. M. Gregori a démontré, je crois le premier, dans les *Tranſactions Philoſophiques*, que dans le ſyſtème de la peſanteur, la chaînette étoit la même courbe que la voûte qui ſeroit formée par une infinité d'élémens d'une épaiſſeur conſtante & infiniment petite. J'ai étendu cette propoſition, & j'ai prouvé que, quel que fût le nombre & la direction des forces qui agiroient ſur une voûte formée d'après les ſuppoſitions précédentes, la figure de cette voûte ſeroit la même que celle d'une chaînette ſollicitée par les mêmes puiſſances. Les mêmes principes ſuffiſent enſuite pour déterminer les joints lorſqu'ils ſont des quantités finies, ou qu'ils doivent former avec la courbe intérieure de la voûte un autre angle que le droit. Cette dernière hypothèſe a lieu dans les plates-bandes; l'on y trouve que ſi l'épaiſſeur eſt donnée, les joints, dans le cas d'équilibre, doivent être dirigés vers un même centre.

Les formules trouvées, en faiſant abſtraction des frottemens & de la cohéſion des joints, ne peuvent être d'aucune utilité

dans la pratique; tous les Géomètres qui se sont occupés de cet objet s'en sont aperçus; ainsi, pour avoir des résultats que l'on peut employer, ils ont été obligés de fonder leurs calculs sur des suppositions qui les rapprochassent de la Nature. Ces suppositions consistent ordinairement à considérer les voûtes comme divisées en plusieurs parties, & à chercher ensuite les conditions d'équilibre de ces différentes parties: mais comme cette division se fait à peu-près d'une manière arbitraire; dans le dessein de l'apprécier, j'ai cherché par les règles *de maximis & minimis*, quels seroient les véritables points de rupture dans les voûtes trop foibles, & les limites des forces que l'on pourroit appliquer à celle dont les dimensions seroient données: j'ai tâché autant qu'il m'a été possible de rendre les principes dont je me suis servi assez clairs pour qu'un Artiste un peu instruit pût les entendre & s'en servir.

Ce Mémoire, composé depuis quelques années, n'étoit d'abord destiné qu'à mon usage particulier, dans les différens travaux dont je suis chargé par mon état; si j'ose le présenter à cette Académie, c'est qu'elle accueille toujours avec bonté le plus foible essai, lorsqu'il a l'utilité pour objet. D'ailleurs, les Sciences sont des monumens consacrés au bien public; chaque citoyen leur doit un tribut proportionné à ses talens. Tandis que les grands hommes, portés au sommet de l'édifice, tracent & élèvent les étages supérieurs, les artistes ordinaires répandus dans les étages inférieurs, ou cachés dans l'obscurité des fondemens, doivent seulement chercher à perfectionner ce que des mains plus habiles ont créé.

PROPOSITIONS PRÉLIMINAIRES.

I.

Fig. 4. Soit le plan *abcde*, sollicité par des forces quelconques situées dans la direction de ce plan, en équilibre sur la ligne *AB*; la résultante de toutes ces forces sera perpendiculaire à la ligne *AB*, & tombera entre les points *a* & *e*.

II.

Si toutes les forces, qui agissent dans ce plan sont décomposées suivant deux directions, l'une parallèle à AB, l'autre qui lui soit perpendiculaire, la somme des forces décomposées, parallèlement à AB, sera nulle, & la somme des forces, perpendiculaires à AB, égalera la pression qu'éprouve la ligne AB.

III.

Si la pression qu'éprouve la ligne AB est exprimée par P, le même plan pourra être supposé sollicité par toutes les forces qui lui sont appliquées, & de plus par la réaction de la pression. Mais si toutes ces forces, ainsi que la réaction de la pression, sont décomposées suivant deux directions quelconques perpendiculaires l'une à l'autre; il suit de l'équilibre & de la perpendicularité des deux directions, que la résultante suivant chaque direction, sera nulle.

IV.

Du Frottement.

Le frottement & la cohésion ne sont point des forces actives comme la gravité, qui exerce toujours son effet en entier, mais seulement des forces coërcitives; l'on estime ces deux forces par les limites de leur résistance. Lorsqu'on dit, par exemple, que dans certains bois polis, le frottement sur un plan horizontal d'un corps pesant neuf livres, est trois livres; c'est dire que toute force au-dessous de trois livres ne troublera point son état de repos.

Je supposerai ici que la résistance dûe au frottement est proportionnelle à la pression, comme l'a trouvé M. Amontons; quoique dans les grosses masses le frottement ne suive pas exactement cette loi. D'après cette supposition, l'on trouve dans les briques le frottement, les trois quarts de la pression. Il sera bon de faire des épreuves sur les matériaux que l'on voudra employer. Il est impossible de fixer ici le frottement

des pierres, les essais faits pour une carrière ne pouvant point servir pour une autre.

V.

De la cohésion.

La cohésion se mesure par la résistance que les corps solides opposent à la désunion directe de leurs parties. Comme chaque élément des solides, lorsqu'ils sont homogènes, est doué de cette même résistance; la cohésion totale est proportionnelle au nombre des parties à désunir, & par conséquent à la surface de rupture des corps. J'ai cherché à déterminer par quelques expériences, la force de cette cohésion; elles m'ont donné les résultats suivans.

Ire Expérience. Fig. 1. J'ai pris un carreau *a b c d*, d'une pierre blanche, d'un grain fin & homogène *; ce carreau étoit d'un pied quarré, avoit un pouce d'épaisseur; je l'ai fait échancrer en *e* & en *f*, en sorte que *ef* formoit une gorge de deux pouces, par laquelle les deux parties du carreau restoient unies. J'ai suspendu ce carreau par cette gorge, en y introduisant deux cordes nouées en fronde; & par deux autres cordes j'ai suspendu un plateau de balance que j'ai chargé d'un poids *P*. Il a fallu augmenter ce poids jusqu'à 430 livres, pour rompre le carreau en *ef*, ce qui donne, pour la force de la cohésion, 215 livres par pouces.

IIme Expérience. J'ai voulu voir si en rompant un solide de pierre, par une force dirigée suivant le plan de rupture, il falloit employer le même poids que pour le rompre, comme dans l'expérience précédente, par un effort perpendiculaire à ce plan. Fig. 2. Pour cela j'ai introduit le petit solide *ABCD* dans une mortoise *AGeg*, j'ai suspendu un bassin à la corde *eP*, qui enveloppoit le solide & qui joignoit la mortoise; le petit solide avoit deux pouces de largeur, un pouce de hauteur, ce qui donne la même surface de rupture que dans l'expérience

* Cette pierre se trouve autour de Bordeaux, & sert à construire les façades des grands édifices de cette ville.

précédente; il n'a rompu que lorſque le baſſin a été chargé de 440 livres. J'ai répété pluſieurs fois cette expérience, de même que la première, & j'ai preſque toujours trouvé qu'il falloit une plus grande force pour rompre le ſolide, lorſque cette force étoit dirigée ſuivant le plan de rupture, que lorſqu'elle étoit perpendiculaire à ce plan. Cependant, comme cette différence n'eſt ici que $\frac{1}{44}$ du poids total, & qu'elle s'eſt trouvée ſouvent plus petite, je l'ai négligée dans la théorie qui ſuit.

J'ai voulu voir comment ſe fait la rupture d'un corps, lorſqu'il eſt rompu par une force qui agit ſur lui avec un bras de levier; en conſéquence, j'ai encaſtré dans une mortoiſe *ACeg* un ſolide de la même pierre que dans l'expérience précédente, ayant 1 pouce de hauteur, 2 pouces de largeur, & 9 pouces de longueur de *g* en *D*, où j'ai ſuſpendu un poids *P*; ce poids s'eſt trouvé de 20 livres lorſque le ſolide a caſſé en *eg*. IIIe Expérience. Fig. 3.

V I.

J'ai répété les mêmes épreuves ſur des briques de Provence d'une excellente cuite & d'un grain très-uni, j'ai trouvé que leur cohéſion, en les rompant par une force perpendiculaire au plan de rupture, conformément à la première expérience, étoit de 280 à 300 livres par pouces. J'ai trouvé encore qu'un mortier compoſé de quatre parties de ſable & trois de chaux, employé depuis deux ans, ſupportoit, perpendiculairement au plan de rupture, 50 livres par pouces. Cette dernière épreuve, faite à la Martinique ne peut point être généraliſée; la force du mortier varie quelquefois du double, & même du triple, ſuivant la nature du pays humide ou ſec, ſuivant les qualités du ſable, de la chaux, de la pierre employée dans le corps de la maçonnerie, ſuivant l'ancienneté de cette maçonnerie; l'on ne peut rien fixer, il faut dans chaque lieu des obſervations particulières.

V I I.

Remarques ſur la rupture des Corps.

Fig. 6. Si l'on ſuppoſe un ſolide *onKL* dont les angles ſoient droits, alongé comme une poutre ordinaire, & fixé en *on*, de manière que les côtés de ce ſolide ſoient horizontaux & verticaux; ſi l'on ſuppoſe enſuite que ce ſolide eſt coupé par un plan vertical repréſenté par *AD*, perpendiculaire au côté *onKL*, & ſollicité par un poids φ, attaché à ſon extrémité en *L;* il eſt évident, en ne conſidérant qu'une face verticale de ce ſolide, les autres étant égales & parallèles, que tous les points de la ligne *AD* réſiſtent pour empêcher le poids φ de rompre le ſolide; que par conſéquent une partie ſupérieure *AC* de cette ligne fait effort par une traction dirigée ſuivant *QP*, tandis que la partie inférieure fait effort, par une preſſion dirigée ſuivant *Q'P'*. Si l'on décompoſe toutes les forces, ſoit de traction, ſoit de preſſion, ſuivant deux directions, l'une verticale & l'autre horizontale, exprimée par *QM* & *PM;* & ſi par tous les points *M* l'on fait paſſer une ligne *BMCe*, cette courbe ſera le lieu géométrique de tous les efforts perpendiculaires qu'éprouve la ligne *AD*. Ainſi, la tranche *ADKL* doit être ſuppoſée ſollicitée par toutes les forces horizontales *PM*, par toutes les forces verticales *MQ*, & par la peſanteur du poids φ; par conſéquent, puiſqu'il y a équilibre, il faut, *art. 3*, que la ſomme des puiſſances horizontales ſoit nulle; que, par conſéquent, l'aire des tenſions *ABC* égale l'aire des preſſions *Ced*. Il faut de plus, par le même article, que la ſomme des forces verticales *QM* ſoit égale au poids φ; mais par les principes de Statique l'on a encore la ſomme des *momentum* autour du point *G* de toutes les forces, ſoit de traction, ſoit de preſſion, égale au *momentum* du poids φ autour du même point; ce qui donne l'équation $\int Pp \,.\, MP \,.\, CP = \varphi LD$. Nous avons donc, quel que ſoit le rapport entre la dilatation des élémens d'un ſolide & leur cohéſion, les trois conditions précédentes à remplir.

Je ſuppoſe, par exemple, que l'on veuille chercher le poids que peut ſupporter une pièce de bois parfaitement élaſtique; c'eſt-à-dire qui ſe comprime ou ſe dilate chargée dans la direction de ſa longueur, proportionnellement à la force qui la comprime ou qui la dilate; que l'élément $ofnh$, qui touche le mur, repréſente une portion très-petite de la pièce de bois dans ſon état naturel; ſi l'on charge cette pièce de bois d'un poids φ, la partie ſupérieure de la ligne fh ſe portera en g, & la partie inférieure ſe portera en m; la ligne fh deviendra gm; mais comme, par hypothèſe, les tenſions, de même que les preſſions, ſont repréſentées par les parties $\pi\mu$ du triangle fge, il ſuit que le triangle de compreſſion emh doit égaler le triangle de dilatation fge. Ainſi, ſi l'on nomme δ la tenſion du point f, repréſentée par fg, fe égalera $\frac{1}{2}fh$; l'on aura, pour le *momentum* du petit triangle de traction, $\frac{\delta ef^2}{3}$, qui, ajouté au *momentum* du petit triangle de compreſſion, doit donner $\frac{\delta (fh)^2}{6} = \varphi n.L$, ou δfh, dans l'inſtant de rupture, exprime la réſiſtance que l'adhérence oppoſeroit à un effort qui agiroit perpendiculairement à la ligne fh, en ſuppoſant cependant que les tractions MQ n'influent que très-peu ſur la réſiſtance des ſolides; ce qui eſt aſſez vrai, lorſque le bras de levier nL du poids φ eſt beaucoup plus grand que l'épaiſſeur fh.

Mais ſi l'on ſuppoſoit le ſolide, prêt à ſe rompre, compoſé de fibres roides, ou qui ne ſoient ſuſceptibles ni de compreſſion, ni d'alongement; ſi l'on ſuppoſoit encore que le corps ſe rompît en tournant autour du point h; pour lors, chaque point de l'épaiſſeur fh feroit un effort égal; le point h éprouveroit une preſſion égale à δfh, & le *momentum* du petit triangle de cohéſion feroit $\frac{\delta (fh)^2}{2}$. Appliquons cette dernière hypothèſe à nos expériences.

J'ai trouvé par la première expérience, qu'une ſurface de

Fig. 2. deux pouces de largeur ſur un pouce de hauteur, oppoſoit une réſiſtance égale à 430 livres. Dans la troiſième expérience j'ai les mêmes dimenſions, & de plus hL égale 9 pouces; par conſéquent, ſi la dernière hypothèſe étoit vraie, j'aurois dû trouver $P = \frac{430}{2.9}$, à peu-près 24 livres; mais l'expérience donne pour P, 20 livres; ainſi l'on ne peut pas ſuppoſer dans la rupture des pierres, ou que la roideur des fibres ſoit parfaite, ou que le point d'appui de rotation ſoit préciſément en h. Une remarque aſſez ſimple auroit fait prévoir ce réſultat, c'eſt qu'en prenant h pour point de rotation, il faudroit que ce point h ſupportât une preſſion finie, ſans que ſa cohéſion fut détruite, ce qui n'eſt pas poſſible, puiſque cette cohéſion eſt une quantité finie, pour une ſurface finie. Il faut donc, dans le cas qui précède celui de rupture, que cette force, porte en un point h', tel que l'adhérence de $h'q$, ſoit en état de ſupporter par ſa réſiſtance la preſſion $\delta f h'$, qu'éprouve la ligne hh', décompoſée ſuivant $h'q$. Nous donnerons dans la ſuite les moyens de déterminer l'angle q du triangle $h'hq$.

M. l'Abbé Boſſut, dans un excellent Mémoire ſur la figure des digues, ouvrage où l'on trouve réunie, à l'eſprit d'invention, la ſagacité du Phyſicien, & l'exactitude du Géomètre, paroît avoir diſtingué & fixé le premier la différence qui ſe trouve entre la rupture des bois & celle des pierres.

VIII.

Réſiſtance des Piliers de Maçonnerie.

Soit un pilier homogène de maçonnerie, que je ſuppoſe
Fig. 5. d'abord quarré, chargé d'un poids P; l'on demande la direction de la ligne CM, ſuivant laquelle ce pilier ſe rompra, & la peſanteur du poids néceſſaire pour cette rupture.

Je ſuppoſe ici que l'adhérence oppoſe une égale réſiſtance, ſoit que la force ſoit dirigée parallèlement ou perpendiculairement au plan de rupture, conformément à la première & deuxième expérience. Je ſuppoſe encore le pilier d'une matière

matière homogène, dont la cohésion soit δ; soit prise une section quelconque *CM*, inclinée à l'horizon, & perpendiculaire au plan vertical *ABDM*, face de ce pilier. Si l'on suppose pour un instant l'adhérence de la partie supérieure *ABCM* infinie, de même que celle de la partie inférieure *CDM*, il est clair que la masse de cette colonne tendroit à glisser le long de *CM*; & par conséquent, si les deux parties étoient unies par une force d'adhérence égale à la cohésion naturelle du pilier, pour rompre cette colonne, suivant *CM*, il faudroit que la pesanteur du poids *P*, décomposée suivant cette direction, fût égale, ou plus grande que l'adhérence de *CM*. Soit l'angle en $M \ldots x$, $DM \ldots a$, *P* le poids dont la pression représentée par φq, se décompose suivant les directions φr & rq, perpendiculaires & parallèles à la ligne de rupture. Si l'on néglige, pour simplifier, la pesanteur de la colonne, l'on aura $\delta CM = \frac{\delta a}{\text{cos. } x}$, & $rq = P \text{ sin. } x$; par conséquent, dans le cas d'équilibre, l'on trouve $P = \frac{\delta a a}{\text{sin. } x . \text{cos. } x}$; mais comme la colonne doit être en état de porter le poids *P* sans se rompre, quelle que soit la section *CM*, il faut que le poids *P* soit toujours plus petit que la quantité $\frac{\delta a a}{\text{sin. } x \text{ cos. } x}$, quelle que soit la valeur de x; ce qui aura lieu lorsque l'on déterminera *P*, tel qu'il soit un *minimum*, d'après l'équation $P = \frac{\delta a^2}{\text{sin. } x . \text{cos. } x}$; ce qui donne $dP = \frac{\delta a a \, [-dx \, (\text{cos. } x)^2 + dx \, (\text{sin. } x)^2]}{(\text{sin. } x . \text{cos. } x)^2}$, & par conséquent sin. $x =$ cos. x. Ainsi le plus grand poids que la colonne puisse supporter sans se rompre, égale $2 \delta a a$, le double de la résistance qu'elle opposeroit à une force de traction, & l'angle de moindre résistance, ou de rupture, sera 45 degrés.

Nous avons supposé dans cette recherche, que la section représentée par *CM* étoit perpendiculaire au côté vertical

ABDM; mais l'on auroit trouvé les mêmes résultats pour une section quelconque, pourvu qu'elle eût eu la même inclinaison sur le plan horizontal; en remarquant que par la théorie des projections, les sections obliques d'un pilier sont à leur projection horizontale comme le rayon est au cosinus d'inclinaison de ces deux plans; ainsi, en nommant x le sinus d'inclinaison de ces deux plans, & A la surface de la base, égale ici à a^2, l'on aura, pour l'adhérence de la section oblique $\frac{\delta aa}{\text{cos}. x}$, & P sin. x, pour la force qui tend à faire couler la partie supérieure de la colonne sur le plan incliné qui lui sert de base, de quelque manière que soit situé le plan de section. Comme ces quantités sont précisément les mêmes que les précédentes, elles doivent, par conséquent, donner les mêmes résultats; d'où l'on peut conclure que, quelle que soit la figure de la base horizontale d'un pilier, si la surface de cette base est constante, sa force sera la même.

IX.

Nous n'avons point fait entrer, dans la solution précédentes, le frottement qui s'oppose à la rupture du pilier. Si l'on vouloit y avoir égard, en conservant les dénominations précédentes, l'on trouveroit, pour la pression du poids sur CM, P cos. x; & comme le frottement est proportionnel à la pression, il sera égal à $\frac{P \text{cos}. x}{n}$, n étant une quantité constante; la masse du pilier $ABCM$, pressé par le poids P, est donc retenue par la cohésion & par le frottement; ainsi, en augmentant le poids jusqu'à ce qu'il soit prêt à rompre le pilier, l'on aura $\frac{aa\delta}{\text{cos}. x} + \frac{P \text{cos}. x}{n} = P \text{ sin}. x$, & $P = \delta aa :$ $[\text{cos}. x \,(\text{sin}. x - \frac{\text{cos}. x}{n})]$. Il faut, par les principes qui précèdent, pour avoir le poids que le pilier peut porter sans se rompre, faire P un *minimum*, ce qui donne

$dx\,[\text{fin.}\,x\,(\text{fin.}\,x - \frac{\text{cof.}\,x}{n})] - dx\,\text{cof.}\,x\,(\text{cof.}\,x + \frac{\text{fin.}\,x}{n}) = 0$,

& par conféquent $(\text{cof.}\,x)^2 + \frac{2\,\text{fin.}\,x\,\text{cof.}\,x}{n} = (\text{fin.}\,x)^2$;

d'où l'on tire $\text{cof.}\,x = \text{fin.}\,x\,[\sqrt{(1 + \frac{1}{nn})} - \frac{1}{n}]$;

d'où $\text{tang.}\,x = \frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{1}{nn})} - \frac{1}{n}}$.

Si le pilier étoit de brique, l'on auroit *(art. 4)* $\frac{1}{n} = \frac{3}{4}$. $\text{tang.}\,x = 2$, $\text{fin.}\,x = 2\,\text{cof.}\,x$; par conféquent, $\text{cof.}\,x = (\frac{1}{5})^{\frac{1}{2}}$, & $P = \frac{\delta aa}{\text{cof.}\,x\,(2\,\text{cof.}\,x - \frac{3}{4}\,\text{cof.}\,x)} = 4\,\delta aa$, l'angle en M fera de $63^d\ 26'$; ainfi, la force qu'il faudroit pour rompre une colonne de brique par une force preffante, feroit quadruple de celle qu'il faudroit pour rompre cette même colonne par une force de traction.

M. Mufſchenbroëk *(Effai de Phyfique, traduction françoife, vol. I, page 354)* a trouvé qu'un pilier quarré de brique, de 11 pouces & demi de longueur fur 5 lignes de côté, a été rompu par un fardeau de 195 livres. Dans l'expérience de M. Mufſchenbroëk, les côtés étant $\frac{5}{12}$ de pouce, la coupe horizontale étoit $\frac{25}{144}$ d'un pouce quarré. Or, par l'*art. 6*, nous avons trouvé qu'un pouce quarré de brique fupporte, perpendiculairement au plan de rupture, 300 livres; ainfi, dans cette expérience $\delta aa = 300^l : \frac{25}{144} = 52^l$, qui exprime la force de traction; mais comme $P = 4\,\delta a^2$, il fuit de notre théorie & de nos épreuves, que ce Phyficien auroit dû trouver 208 livres, quantité peu différente de 195 livres, réfultat de fon expérience.

Au refte, je fuis obligé d'avertir que la manière dont M. Mufſchenbroëk détermine la force d'un pilier de maçonnerie, n'a aucun rapport avec celle que je viens d'employer. Un pilier, preffé par une force dirigée fuivant fa longueur, ne fe rompt, dit ce Phyficien célèbre, que parce qu'il commence à fe courber; autrement il fupporteroit toute

ſorte de poids. En partant de ce principe, il détermine la force des piliers quarrés, en raiſon inverſe du quarré de leur longueur, & triplée de leurs côtés; en ſorte que ſi le pilier dont nous venons de calculer la force n'avoit eu que la moitié de ſa première longueur, il auroit ſupporté un poids quadruple du premier, c'eſt-à-dire, 832 livres; au lieu que je crois avoir démontré qu'il n'auroit guère ſupporté que le même poids de 208 livres.

L'on conclud de la formule, que les forces des piliers homogènes ſont entr'elles comme les ſections horizontales.

L'on détermineroit, par les mêmes principes, l'angle de rupture d'une colonne incompreſſible, qui ſeroit preſſée par une force inclinée à ſa baſe horizontale; pourvu que la direction de cette force tombât dans cette baſe; car ſi elle tomboit en dehors de cette baſe, il y auroit quelques autres conſidérations qui rendroient la ſolution de ce Problème un peu plus difficile.

L'on trouve auſſi, par les principes précédens, la hauteur où l'on peut élever une tour ſans qu'elle s'écraſe ſous ſon propre poids. Suppoſons, pour ſimplifier, que cette hauteur eſt beaucoup plus grande que la largeur; pour pouvoir négliger le petit priſme CDM, il faudra ſubſtituer dans les formules, à la place de la quantité P, la maſſe d'une tour qui auroit le même poids: ſuppoſons-là, par exemple, conſtruite en briques; le pied cube de brique peſant à peu-près 144 livres, un petit priſme, qui auroit un pouce de baſe, ſur un pied de hauteur, pèſeroit une livre; ainſi, comme une baſe d'un pouce peut ſupporter une force de traction égale à 300 livres, & une force de preſſion double, lorſque l'on néglige le frottement, il eſt clair qu'en ſubſtituant à la tour une maſſe de petits priſmes, d'un pouce de baſe, ſur 600 pieds de hauteur, il ſeroit auſſi ſoutenu par la cohérence. Si l'on avoit égard au frottement, l'on pourroit, par les mêmes principes, élever cette tour juſqu'à 1200 pieds de hauteur: ſi à la place de la tour on ſubſtituoit une pyramide, elle pourroit s'élever à une hauteur triple.

Si cette tour étoit portée ſur pluſieurs piliers, la hauteur à laquelle on pourroit l'élever, ſeroit en raiſon directe de la ſection horizontale de ces piliers ; en ſorte que ſi la ſection de ces piliers étoit, par exemple, le ſixième de la ſection horizontale de la tour, elle ne pourroit s'élever au-deſſus des colonnes qu'à 100 pieds de hauteur, en négligeant le frottement, & à 200 pieds en y ayant égard. L'on néglige ici le poids des piliers, il ſeroit facile d'y avoir égard.

Lorſque pluſieurs voûtes prennent leur naiſſance ſur le même pilier, s'arc-boutent & ſe ſoutiennent mutuellement, quant à la preſſion horizontale ; la réſultante de leurs forces étant verticale, & dirigée ſuivant l'axe du pilier, l'on déterminera facilement par cette méthode, la groſſeur d'un pilier. Toutes ces recherches ſont ſimples, d'un uſage journalier ; il ſeroit facile de les étendre, mais je n'ai voulu ici qu'en établir les principes.

I X.

De la preſſion des terres, & des revêtemens.

Si l'on ſuppoſe qu'un triangle CBa rectangle, ſolide & peſant, eſt ſoutenu ſur la ligne Ba par une force A appliquée en F, perpendiculairement à la verticale CB ; qu'en même-temps il eſt ſollicité par ſa peſanteur φ, & retenu ſur la ligne Ba, par ſa cohéſion avec cette ligne, & par le frottement. Fig. 7.

Soit fait $CB \ldots a$, $Ca \ldots x$; $\delta(aa + xx)^{\frac{1}{2}}$ exprimera l'adhérence de la ligne aB ; φ, peſanteur du triangle CBa, égalera $\frac{gax}{2}$, où g exprime la denſité du triangle.

Si l'on décompoſe la force A & la force φ ſuivant deux directions, l'une parallèle à la ligne Ba, l'autre qui lui ſoit perpendiculaire, les triangles $\varphi G\delta$. $F\pi p$, qui expriment ces forces décompoſées, ſeront ſemblables au triangle CaB ; l'on aura donc pour ces forces les expreſſions ſuivantes,

φG force perpendiculaire à aB dépendante de $\varphi \ldots \ldots \varphi x : (aa + xx)^{\frac{1}{2}}$

$G\delta$ force parallèle à aB dépendante de $\varphi \ldots \ldots \ldots \varphi a : (aa + xx)^{\frac{1}{2}}$

$F\pi$ force perpendiculaire à aB dépendante de $A \ldots \ldots Aa : (aa + xx)^{\frac{1}{2}}$

πp force parallèle à aB dépendante de $A \ldots \ldots \ldots Ax : (aa + xx)^{\frac{1}{2}}$.

Si $\frac{1}{n}$ exprime le rapport conſtant du frottement à la preſſion, l'on aura l'effort que fait le triangle pour couler ſur aB, exprimé par $[\varphi a - Ax - \frac{\varphi x - Aa}{n} - \delta(aa + xx)] : (aa + xx)^{\frac{1}{2}}$; dans le cas d'équilibre, cette expreſſion ſera égale à zéro; d'où l'on tire

$$A = [\varphi(a - \tfrac{x}{n}) - \delta(aa + xx)] : (x + \tfrac{a}{n}).$$

Mais ſi l'on ſuppoſe que la force appliquée en F, vienne à augmenter, au point qu'elle ſoit prête à mettre le même triangle en mouvement ſuivant la direction Ba; pour lors, en nommant A' cette force, l'on aura

$$[A'x - \varphi a - \frac{\varphi x - Aa}{n} - \delta(aa + xx)] : (aa + xx)^{\frac{1}{2}},$$

pour l'effort ſuivant Ba; d'où l'on tire, dans le cas d'équilibre,

$$A' = [\varphi(a + \tfrac{x}{n}) + \delta(aa + xx)] : (x - \tfrac{a}{n}),$$

quantité qui ſeroit infinie ſi x égaloit $\frac{a}{n}$.

L'on peut remarquer, d'après les deux expreſſions précédentes, que la force A ſera toujours plus petite que la quantité $\frac{ga^2}{2}$, & que la force A' ſera toujours plus grande que cette quantité qui exprime la preſſion, lorſque l'adhérence & le frottement deviennent nuls, ou lorſque le triangle eſt ſuppoſé fluide.

Il eſt donc démontré que lorſque la cohéſion & le frottement contribuent à l'état de repos du triangle, que les limites de la force que l'on peut appliquer en F, perpendiculairement à CB, ſans mettre le triangle en mouvement, ſeront compriſes entre A & A'.

X.

Mais ſi l'on remarque, comme on l'a déjà fait dans l'introduction, que dans une maſſe de terres homogènes

l'adhérence est égale dans tous les points, il faut, pour soutenir cette masse indéfinie, que non-seulement la force *A* puisse supporter un triangle donné *CBa*, mais même parmi toutes les surfaces *CBeg*, terminées par une ligne courbe quelconque *Beg*, celle qui, soutenue par son adhérence & son frottement, & sollicitée par sa pesanteur, produiroit la plus grande pression; car, d'après cette supposition, il seroit évident que si l'on appliquoit en *F* une force qui ne différât de celle qui seroit suffisante pour soutenir la surface de la plus grande pression, que d'une quantité très-petite, la masse des terres ne pourroit se diviser que suivant cette ligne, toutes les autres parties restant unies par la cohésion & le frottement. Il faut donc, pour avoir une force *A* suffisante pour soutenir toute la masse, chercher parmi toutes les surfaces *CBeg*, celle dont la pression sur la ligne *CB* est un *maximum*. De même, si l'on vouloit déterminer la plus grande force qui puisse agir en *F*, sans troubler l'état de repos, il faudroit chercher une autre courbe *Be'g'*, telle que la force *A'* suffisante pour faire couler la surface *CBe'g* suivant *Be'g'* soit un *minimum*, & les limites de la force horizontale, que l'on peut appliquer en *F*, sans mettre le fluide en mouvement, seront comprises entre les limites *A* & *A'*, où *A* sera un *maximum*, & *A'* un *minimum*.

Ainsi, il résulte que la différence entre la pression des fluides dont le frottement & la cohésion sont nuls, & de ceux où ces quantités ne doivent point être négligées, consiste en ce que dans les premiers, le côté *cB* du vase qui les contient ne peut être soutenu que par une seule force, au lieu que dans les autres, il y a une infinité de forces contenues entre les limites *A* & *A'*, qui ne troubleront point l'état de repos.

Comme il ne s'agit ici que de déterminer la moindre force horizontale que puisse éprouver le revêtement qui soutient une masse de terre, sans que l'équilibre soit rompu, je ne chercherai que la force *A*.

Je supposerai d'abord que la courbe qui produit la plus

grande preſſion eſt une ligne droite ; ce qui eſt conforme à l'expérience, qui donne une ſurface très-approchante de la triangulaire, pour celle qui ſe détache lorſque les revêtemens ſont ébranlés par le poids des terres.

D'après cette ſuppoſition & les remarques précédentes, il faut donc, parmi tous les triangles CBa, qui ont pour côté invariable CB, & l'angle C droit, chercher celui qui demande la plus grande preſſion A pour l'empêcher de gliſſer le long de aB. Ainſi, comme nous avons pour un triangle quelconque, $A = \frac{\frac{ax}{2}\left(a - \frac{x}{n}\right) - \delta(aa + xx)}{\left(x + \frac{a}{n}\right)}$, l'on aura pour le triangle de la plus grande preſſion, par les règles *de maximis & minimis.* $\frac{dA}{dx} = \frac{\left(\frac{ga}{2n} + \delta\right).\left(aa - \frac{2ax}{n} - xx\right)}{\left(x + \frac{a}{n}\right)^2} = 0$, & par conſéquent $x = -\frac{a}{n} + a\sqrt{\left(1 + \frac{1}{nn}\right)}$. Subſtituant cette valeur de x dans l'expreſſion de A, l'on aura $A = ma^2 - \delta la$, m & l étant des coëfficiens conſtans, où il n'entre que des puiſſances de n; cette force A ſera ſuffiſante pour ſoutenir une maſſe indéfinie $CBlg$.

L'on peut conclure de la formule précédente, que l'adhérence n'influe point ſur la valeur de x, ou que les dimenſions du triangle qui produit la plus grande preſſion, dépendent abſolument du frottement.

Si le frottement eſt nul, quelle que ſoit l'adhérence, le triangle de la plus grande preſſion ſera iſoſcèle, ou celui dont l'angle ſera de 45 degrés.

XI.

Dans la formule précédente, $A = ma^2 - \delta la$, ſi l'on fait a variable, l'on aura $dA = da(2ma - \delta l)$ qui exprimera la différence des preſſions des ſurfaces indéterminés CBl, $CB'L$; & puiſque la verticale CB ne peut pas

pas porter une moindre force que A, la ligne BB' ne pourra point être ſuppoſée preſſée d'une moindre force que dA; ainſi le *momentum* élémentaire de la force A autour du point E, baſe du revêtement, en nommant b la hauteur totale CE, ſera $(b - a)(2ma - \delta l)\,da$, & intégrant, l'on aura pour le *momentum* total autour du point $E\ \frac{m - b^3}{3} - \frac{\delta lbb}{2}$. Il faudra égaler cette quantité au *momentum* de la peſanteur du revêtement pour en déterminer les dimenſions.

Quant à la forme & aux dimenſions des revêtemens, l'on n'a rien de mieux à conſulter dans ce genre que *les Recherches ſur la figure des digues*, ouvrage que j'ai déjà cité.

EXEMPLE.

Si l'on ſuppoſe que le frottement ſoit égal à la preſſion, comme dans les terres qui, abandonnées à elles-mêmes, prennent 45 degrés de talus; ſi l'on ſuppoſe l'adhérence nulle; ce qui a lieu dans les terres nouvellement remuées: pour lors on aura $x = -\frac{a}{n} + a\sqrt{(1 + \frac{1}{nn})} = \frac{4}{10}a$, & $A = \frac{3}{35}a^2$; m ſera donc égale à $\frac{3}{35}$, & le *momentum* total autour de G ſera $\frac{mb^3}{3} = \frac{b^3}{35}$ *; ainſi, ſi le mur qui ſoutient les terres étoit ſans talus, que ſon épaiſſeur fut c, & que ſa denſité fut la même que celle des terres, l'on auroit $c = \frac{24b}{100}$, un peu moindre que le quart de la hauteur.

Mais ſi le revêtement avoit $\frac{1}{6}$ de talus, en nommant c ſon épaiſſeur au cordon CD, l'on aura, dans le cas d'équilibre,

* Dans cet exemple, comme dans ceux qui ſuivent, l'on ſuppoſe que le revêtement $DCEG$ eſt ſolide & indiviſible; que ſon frottement, exprimé par une fraction de ſa maſſe, eſt plus grand que la pouſſée horizontale A; l'on cherche donc ſeulement quelles doivent être ſes dimenſions, pour qu'il ne puiſſe point tourner autour de ſon point G.

la formule $\frac{b^3}{35} = cb\left(\frac{c}{2} + \frac{b}{6}\right) + \frac{2b^3}{12.3.6}$; d'où l'on tire à peu-près $c = \frac{b}{10}$. Si l'on vouloit augmenter la masse de la maçonnerie d'un quart en sus de celle qui seroit nécessaire pour l'équilibre, l'on trouveroit $c = \frac{b}{7}$; en sorte que si l'on avoit 35 pieds de hauteur de terres à soutenir, il faudroit faire $CD = 5$ pieds; ce qui donne les dimensions usitées dans ce cas par la pratique. Je crois la quantité $c = \frac{b}{7}$ suffisante dans l'exécution; d'autant plus, qu'outre l'augmentation de solidité, d'un quart en sus de celle qu'exige l'équilibre, l'on a négligé le frottement qu'éprouve le revêtement, lorsque dans l'instant de rupture les terres sont prêtes à couler le long de GE, ce qui diminue en même-temps la force A & augmente le *momentum* du revêtement.

M. le maréchal de Vauban, dans presque toutes les places qu'il a fait construire, a donné 5 pieds de largeur au cordon, sur $\frac{1}{5}$ de talud. Comme les revêtemens construits par cet homme célèbre, passent rarement 40 pieds, sa pratique se trouve dans ce cas assez d'accord avec notre dernière formule. Il est vrai cependant que M. de Vauban ajoute des contre-forts à ses murs; mais cette augmentation de solidité ne doit point être regardée comme superflue dans les fortifications, dont les enveloppes ne doivent point être culbutées par le premier coup de canon.

Il résulte de cette théorie, que dans les terres homogènes, nouvellement remuées, les épaisseurs des murs qui les soutiennent, mesurées au cordon CD, sont comme les hauteurs CE; ce qui paroît devoir diminuer l'épaisseur que l'on donne ordinairement aux revêtemens qui n'ont que quinze à vingt pieds de hauteur.

XII.

Dans les terres dont la cohésion est donnée, l'on tire de

la formule $A = ma^2 - \delta la$, qui exprime la pression des terres, un résultat assez utile dans leur excavation. Je suppose qu'il s'agit de déterminer jusqu'à quelle profondeur l'on peut creuser un fossé, en coupant les terres suivant un plan vertical, sans qu'elles s'éboulent; car, puisque l'on a, en général, $A = maa - \delta la$, si l'on fait $A = 0$, l'on aura $a = \frac{\delta l}{m}$, qui exprimera cette hauteur.

Par des principes analogues, si la hauteur de l'excavation étoit donnée, l'on trouveroit l'angle sous lequel il faudroit couper les terres pour qu'elles se soutinssent par leur propre cohésion.

XIII.

Si la masse de terre caB étoit chargée d'un poids P, il faudroit, dans les formules précédentes, à la place de φ *(art. 10)* substituer $P + \frac{ax}{2}$, & l'on aura

$$A = \frac{\left(\frac{gax}{2} + P\right).\left(a - \frac{x}{n}\right) - \delta(aa + xx)}{\frac{a}{n} + x},$$

d'où il résulte

$$x + \frac{a}{n} = \sqrt{\left[aa\left(1 + \frac{1}{nn}\right) - Pa\left(\frac{1}{nn} + 1\right):\left(\frac{ga}{2n} + \delta\right)\right]}.$$

Pour avoir les dimensions des revêtemens, il faudra substituer d'abord cette valeur de x dans la formule qui exprime A, & faire le reste comme dans l'*article 11*.

XIV.

Jusqu'ici nous n'avons point eu égard au frottement qu'éprouve le triangle CBa, en coulant contre CB dans l'instant de rupture; mais pour peu que l'on y fasse attention l'on voit que ce triangle est non-seulement retenu par son frottement sur Ba, mais encore par le frottement qu'il éprouve en glissant le long de cB, de la part du revêtement; ce dernier frottement pourra être exprimé par $\frac{A}{\nu}$, où $\frac{1}{\nu}$

marque le rapport du frottement & de la preſſion, lorſque les terres font effort pour couler ſur la maçonnerie. Or, dans le cas d'équilibre, le frottement ſur CB, équivaut à une force dirigée ſuivant BC; il faut donc, dans la formule qui donne la valeur de A *(art. 10)*, ſubſtituer à la place de φ la quantité $\left(\frac{ax}{2} - \frac{A}{v}\right)$, ce qui donne

$$A = \frac{\left(\frac{ax}{2} - \frac{A}{v}\right)\left(a - \frac{x}{n}\right) - \delta(aa + xx)}{x + \frac{a}{n}} = \frac{\frac{ax}{2}\left(a - \frac{x}{n}\right) - \delta(aa + xx)}{a\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{v}\right) + x\left(1 - \frac{1}{nv}\right)};$$

d'où l'on tirera, en ſuppoſant que A eſt un *maximum*, & en faiſant $\frac{1}{n} + \frac{1}{v} = m$, & $1 - \frac{1}{nv} = \mu$,

$$x = -\frac{m}{\mu} + \sqrt{\left(\frac{\frac{n}{\mu}\left(\frac{mga^3}{2} + \delta\mu a^2\right)}{\frac{ga}{2} + n\delta} + \frac{mma^2}{\mu\mu}\right)}.$$

Subſtituant cette valeur de x dans l'expreſſion de A, & opérant comme ci-deſſus, l'on déterminera les dimenſions des revêtemens.

EXEMPLE.

Si l'adhérence δ eſt ſuppoſée nulle, comme dans les terres nouvellement remuées; ſi le frottement eſt égal à la preſſion, comme dans toutes celles qui prennent 45^d de talus naturel, abandonnées à elles-mêmes; ſi n eſt ſuppoſé égal à v, l'on trouvera pour lors $A = \frac{gx}{4}(a - x)$, & $x = \frac{a}{2}$, l'angle $CBa = 36^d\ 34'$, & $A = \frac{ga^2}{16}$, le *momentum* total de la preſſion des terres autour du point G ſera $\frac{g^3}{3 \cdot 16}$; d'où l'on tireroit, pour un mur de terraſſe ſans talus, dont l'épaiſſeur ſeroit c, en ayant égard à la réaction du frottement qui contribue à augmenter le *momentum* de la réſiſtance du

revêtement, de la quantité $\frac{cb^2}{16}$, l'équation

$$\frac{b^3}{3.16} = \frac{ccb}{2} + \frac{cb^2}{16};$$

& par conſéquent $C = \frac{15}{100}\,b$, à peu-près ; c'eſt-à-dire qu'un mur de trois pieds de largeur ſeroit, dans cette hypothèſe, en équilibre avec la pouſſée d'une terraſſe de vingt pieds de hauteur.

L'on appliqueroit avec la même facilité les hypothèſes de cet exemple à un revêtement qui auroit $\frac{1}{6}$ de talus, comme on le pratique ordinairement dans les murs de terraſſe; mais les épaiſſeurs que donneroit cette application ſeroient beaucoup plus petites que celle que la pratique ſemble avoir fixé. Pluſieurs cauſes en effet concourent à faire augmenter les dimenſions des revêtemens; en voici quelques-unes.

1.° Le frottement des terres contre la maçonnerie n'eſt pas auſſi fort que celui des terres ſur elles-mêmes.

2.° Souvent les eaux filtrant à travers les terres, ſe raſſemblent entre les terres & la maçonnerie & forment des napes d'eau qui ſubſtituent la preſſion d'un fluide ſans frottement à la preſſion des terres; quoique, pour obvier à cet inconvénient, l'on pratique derrière les revêtemens des tuyaux verticaux & des égouts au pied de ces mêmes revêtemens, pour laiſſer écouler les eaux, ces égouts s'engorgent, ou par les terres que les eaux entraînent, ou par la gelée, & deviennent quelquefois inutiles.

3.° L'humidité change encore non-ſeulement le poids des terres, mais encore leur frottement. Je puis aſſurer avoir vu des terres ſavonneuſes, qui ſe ſoutenant d'elles-mêmes, lorſqu'elles étoient sèches, ſur une inclinaiſon de 45 degrés, avoient de la peine, quand elles étoient mouillées, à ſe ſoutenir ſur une inclinaiſon de 60 à 70 degrés. Enfin, il faut pour que l'on puiſſe compter ſur les dimenſions fixées par les formules, que l'eau ne pénètre point les terres dont on cherche la preſſion, ou qu'en les pénétrant, elle en augmente

peu le volume. Cette augmentation de volume que l'humidité procure aux terres, & dont nous avons un exemple dans les lézardes que la sécheresse occasionne à la surface de nos campagnes, produit contre les revêtemens une pression que l'expérience seule peut déterminer.

Ces remarques sont encore indépendantes de la bonté de la maçonnerie, qu'il faut toujours laisser sécher avec soin avant de la charger: elles sont encore indépendantes de la gelée, ennemi sans contredit le plus dangereux dont les maçonneries aient à craindre les effets; car, outre l'augmentation de pression que la gelée produit dans les terres humides, par l'augmentation de volume, outre les engorgemens des tuyaux d'écoulement, l'on peut être sûr que tout mur qui éprouvera de fortes gelées avant d'être sec, perdra nécessairement la plus grande partie de son adhérence, & sera incapable de résistance.

Malgré toutes ces remarques, qui paroissent conduire à conclure qu'il faut des dimensions particulières aux revêtemens, suivant la nature des remblais dont ils éprouvent la pression; que dans les pays secs & chauds il y a moins d'inconvénient à diminuer les murs de terrasse, que dans les pays humides & froids; je crois cependant que dans toutes les espèces de terres l'on pourra sans danger fixer les revêtemens à $\frac{1}{6}$ de talus, sur le septième de la hauteur, pour l'épaisseur au cordon (conformément à l'*article 11*).

X V.

De la surface de plus grande pression dans les fluides cohérens.

Jusqu'ici nous avons supposé que la surface qui produit la plus grande pression étoit une surface triangulaire; la simplicité des résultats que donne cette supposition, la facilité de leur application à la pratique, le desir d'être utile & entendu des Artistes, sont les raisons qui nous ont décidé; mais si l'on vouloit déterminer d'une manière exacte la surface courbe

qui produit la plus grande preſſion: voici, je crois comme on pourroit s'y prendre.

Que CBg, repréſente la ſurface courbe qui produit la plus grande preſſion ſur CB, le frottement des terres & la cohéſion étant ſuppoſés les mêmes que ceux du fluide indéfini $gCBl$. Si l'on prend un portion de la ſurface CBg, comme PMg, il eſt évident que cette portion PMg ſera de toutes les ſurfaces que l'on peut conſtruire ſur PM, celle qui produiroit ſur cette ligne la plus grande preſſion; mais pour avoir la valeur de cette preſſion l'on verra que dans le moment où l'équilibre eſt prêt à ſe rompre, cette ſurface PGM eſt ſoutenue par ſon frottement & ſa cohéſion ſur gM, ſon frottement & ſa cohéſion ſur PM, & ſollicitée par ſa peſanteur φ. Ce que l'on dit par rapport à la portion PMg, on peut le dire par rapport à la portion $P'M'g$. Or, comme dans l'inſtant de rupture, toute la maſſe eſt en équilibre il s'enſuit qu'une portion $PMP'M'$, ſoit élémentaire ou non, ſollicitée par ſa peſanteur, & retenue par ſes frottemens, ſa cohéſion, & les différentes preſſions qu'elle éprouve de la part du fluide qui l'entoure, doit auſſi être en équilibre; mais pour peu que l'on y faſſe attention l'on remarquera qu'une maſſe PMg ne peut être retenue par ſon adhérence & ſon frottement qui l'empêche de gliſſer le long de PM, ſans que le même frottement & la même adhérence n'agiſſe par ſa réaction ſur la maſſe $CBPM$, dans le ſens contraire. Ainſi en nommant A la preſſion horizontale qu'éprouve la ligne PM, & A' celle qu'éprouve la ligne PM'; un élément quelconque $PMP'M'$, qui doit être en équilibre, ſera retenu ſuivant une ligne horizontale Fe par la preſſion $(A' - A)$, ſera ſollicité ſuivant la ligne verticale PM, par la réaction du frottement exprimé par $\frac{A}{n}$, par la réaction de l'adhérence δPM, & retenu par le frottement & la cohéſion de $P'M'$, par le frottement & la cohéſion de MM'; l'on peut donc regarder cette ſurface élémentaire $PP'MM'$, comme un triangle $MM'q$, chargé du poids de l'élément ſollicité par

Fig. 8.

toutes les forces verticales que nous venons de détailler. Soit fait

gP	 x	PM	.... y,
gP'	.... x'	$P'M'$	.... y',
gP''	.... x''	$P''M''$	.... y''.

Nous avons trouvé *(art. 9 & 10)* qu'une ſurface triangulaire dont a ſeroit le côté vertical & x le côté horizontal, ſollicitée par une puiſſance verticale φ, donneroit la preſſion horizontale $A = \frac{\varphi(a - \frac{x}{n})}{x + \frac{a}{n}} - \frac{\delta(aa + xx)}{x + \frac{a}{n}}$; en comparant cette équation avec celle qui auroit lieu pour l'élément $PP'MM'$, l'on trouvera que A repréſente $(A' - A)$; que $\varphi = y.(x' - x) + \frac{A - A'}{n} + \delta(y - y')$; que $a = (y' - y)$ & $x = (x' - x)$; ainſi l'équation qui exprime l'état d'équilibre deviendra

$$(A' - A) = [y(x' - x) + \frac{A - A'}{n} + \delta(y - y')]\left(\frac{y' - y - (\frac{x' - x}{n})}{x' - x + \frac{y' - y}{n}}\right).$$

Suppoſons, pour ſimplifier, $\delta = 0$, ce qui a lieu pour les terres nouvellement remuées, l'on aura

$$A' - A = \frac{y(x' - x)(y' - y) - (\frac{x' - x}{n})}{\frac{2(y' - y)}{n} + (x' - x)(1 - \frac{1}{nn})}.$$

Par le même raiſonnement, l'on trouvera

$$A'' - A' = \frac{y'(x'' - x')(y'' - y' - \frac{(x'' - x')}{n})}{\frac{2(y'' - y')}{n} + (x'' - x')(1 - \frac{1}{nn})};$$

& par conſéquent, en ajoutant enſemble ces deux équations, l'on aura

$$A'' - A = \frac{y(x' - x)(y' - y - \frac{(x' - x)}{n})}{\frac{2(y' - y)}{n} + (x' - x)(1 - \frac{1}{nn})} + \frac{y'(x'' - x')(y'' - y' - \frac{(x'' - x')}{n})}{\frac{2(y'' - y')}{n} + (x'' - x')(1 - \frac{1}{nn})};$$

mais

mais puiſque la preſſion horizontale de la ſurface PMg doit être un *maximum*, de même que la preſſion horizontale de la ſurface $P''M''g$, il ſuit que les quantités y, y', y'' & x, x'' reſtant conſtantes, x', ſeul variable, doit être tel qu'il rende $A'' - A'$ un *maximum;* ce qui donne, en différentiant & faiſant $y' - y = y'' - y' = dy$,

$$\frac{d(A''-A)}{dx'} = \frac{y(dy - \frac{(x'-x)}{n})}{\frac{2dy}{n} + (x'-x)(1-\frac{1}{nn})} - \frac{\frac{y}{n}(x'-x)}{\frac{2dy}{n} + (x'-x)(1-\frac{nn}{1})} - \frac{(1-\frac{1}{nn})y(x'-x)(dy-\frac{(x'-x)}{n})}{[\frac{2dy}{n} + (x-x')(x-\frac{1}{nn})]^2}$$
$$- \frac{y'(dy - \frac{(x''-x)}{n}}{\frac{2dy}{n} + (x''-x')(1-\frac{1}{nn})} + \frac{\frac{y'}{n}(x''-x')}{\frac{2dy}{n} + (x''-x')(1-\frac{1}{nn})} + \frac{(1-\frac{1}{nn})y'(x''-x')(dy-\frac{(x''-x')}{n}}{[\frac{2dy}{n} + (x''-x)(1-\frac{1}{nn})]^2}$$

mais comme les différentes parties correſpondantes de cette équation ſont des fonctions conſécutives ſemblables, il ſuit, en intégrant & ſubſtituant dx à la place de $x' - x$,

$$B = \frac{y(dy - \frac{dx}{n})}{2(dy + dx(1-\frac{1}{nn})} - \frac{y\frac{dx}{n}}{\frac{2dy}{n} + dx(1-\frac{1}{nn})} - \frac{(1-\frac{1}{nn})y\,dx(dy-\frac{dx}{n})}{[\frac{2dy}{n} + dx(1-\frac{1}{nn})]^2}.$$

Si dans cette équation l'on fait $z\,dy = dx$, l'on trouvera

$$\frac{y(1-\frac{z}{n})}{\frac{2}{n} + z(1-\frac{1}{nn})} - \frac{y\frac{z}{n}}{\frac{2}{n} + z(1-\frac{1}{nn})} - \frac{(1-\frac{1}{nn})yz(1-\frac{z}{n})}{[\frac{2}{n} + z(1-\frac{1}{nn})]^2} = B.$$

Comme dans cette équation réduite, z n'eſt élevé qu'à la deuxième puiſſance, elle aura la forme ſuivante,

$$zz + \frac{F' + G'y}{F + Gy}z + \frac{F'' + G''y}{F + Gy} = 0,$$

& par conſéquent,

$$z + \frac{F' + G'y}{2(F+Gy)} = \pm [(\frac{F' + G'y}{2(F+Gy)})^2 - \frac{F'' + G''y}{F + Gy}]^{\frac{1}{2}}; F, F, F'',$$

de même que GG' & G'' ſont des coëfficiens conſtans.

Si l'on avoit eu égard à l'adhérence, l'on auroit eu préciſément une équation de la même forme, & l'on n'y trouveroit de différence que dans les coëfficiens.

L'on peut conclure de cette dernière recherche, que si un fluide, dont la cohésion & le frottement seroient donnés, étoit contenu dans un vase *CBg'*, la pression contre la paroi *CB* seroit la même, quelle que fût la figure de *Bg;* si l'on pouvoit y inscrire la surface courbe *Beg*, qui produiroit un *maximum* dans une masse de fluide indéfinie; mais si la courbe *Beg*, qui produit la plus grande pression, étoit extérieure au vase; pour lors, il faudroit déterminer, de toutes les surfaces que l'on pouvoit inscrire de ce vase, celle qui produiroit la plus grande pression.

Cependant, il faut remarquer que si l'adhérence & le frottement du vase & du fluide étoient plus petits que ceux du fluide avec lui-même; pour lors, il se pourroit que la pression du fluide contenu dans le vase fut plus grande que celle du fluide indéfini. Le développement de ces remarques, de même que l'application des formules qui précèdent, demandent un travail exprès, & m'éloigneroit de la simplicité que je me suis prescrite dans ce Mémoire; j'espère cependant pouvoir une autre fois traiter cette matière dans la théorie des mines, qui, dépendant en partie des principes que je viens d'expliquer, demande encore la solution de quelques Problèmes assez curieux.

X V I.

Des Voûtes.

Fig. 9. Soit la courbe *FAD*, décrite sur l'axe *FD;* soit une seconde courbe *fad*, décrite extérieurement à la première; soit divisée la courbe *FAM* en une infinité de parties *MM'*, & de chaque point *M*, soit tirée la ligne *MM'*, perpendiculaire à la courbe intérieure en *M*, où formant avec l'élément *MM'* un angle suivant une loi donnée; si l'on suppose les deux lignes *FAD*, *fad*, telles qu'une portion quelconque *AaMm*, sollicitée par la pesanteur, & retenue par la cohésion & le frottement, soit en équilibre, l'on aura formé le profil d'une voûte. Si l'on suppose ensuite que ce profil se meut, parallèlement à lui-même, & forme une enveloppe solide,

comprise entre le tracé du mouvement des deux courbes, l'équilibre, démontré par rapport à ce profil, sera encore vrai, par rapport à cette enveloppe; & la voûte ainsi formée, sera celle que l'on appelle une *voûte en berceau.* C'est celle dont je me suis occupé dans les recherches qui suivent. Les principes que l'on y explique pourront s'appliquer à toutes les autres espèces de voûtes.

XVII.

Des Voûtes dont les joints n'ont ni frottement, ni cohésion.

Soit aB le profil d'une voûte, d'une épaisseur infiniment petite, dont les joints soient perpendiculaires à la courbe aB; l'on demande la figure de cette voûte, sollicitée par des puissances quelconques. Fig. 10.

Que toutes les forces qui agissent sur la portion aM soient décomposées suivant deux directions, l'une verticale, & l'autre horizontale; que la résultante de toutes les forces verticales soit $Q z$, que je nomme φ; que la résultante de toutes les forces horizontales soit $Q\varphi$, que je nomme π; soit de plus $aP \ldots y$, $PM \ldots x$, $Mq \ldots dx$, $qM' \ldots dy$, il est évident (*art. 1.er*) que la résultante de toutes les forces qui agissent sur la portion aM doit être perpendiculaire au joint en M; & par l'*article 3*, que toutes les forces qui sollicitent cette partie de voûte, étant décomposées suivant deux directions, l'une verticale & l'autre horizontale, perpendiculaires l'une à l'autre; la somme des forces, suivant chaque direction doit être nulle; ainsi, si l'on nomme P la pression du joint en M, & que l'on décompose cettte pression en deux forces, l'une horizontale $\frac{P dx}{ds}$, & l'autre verticale $\frac{P dy}{ds}$, l'on aura les deux équations suivantes $\frac{P dx}{ds} = \pi$, & $\frac{P dy}{ds} = \varphi$, & par conséquent, en divisant l'une par l'autre, pour faire disparoître P, l'on aura $\frac{dx}{dy} = \frac{\pi}{\varphi}$;

équation qui exprime la figure d'une voûte, sollicitée par des puissances quelconques.

Cette formule se trouve exactement la même que celle qui a été déterminée par M. Euler *(dans le troisième volume de l'Académie de Péterſbourg)* pour la figure d'une chaine, sollicitée par des puissances quelconques. Ce qui doit effectivement arriver; car, en renversant la courbe, & substituant la tension à la pression, la théorie précédente s'applique également à l'un ou l'autre cas, & donne précisément la même expression. Au reste, la méthode de M. Euler n'a rien de commun avec celle-ci, que le résultat.

COROLLAIRE I.er

Si la puissance horizontale étoit constante & égale à la pression en a, & si la résultante des forces verticales étoit égale à la pesanteur de la portion de la voûte aM; pour lors, l'on auroit $\frac{dx}{dy} = \frac{A}{\int p\,ds}$; d'où l'on tirera la valeur de p, si la courbe est donnée, & de même l'expression de la courbe lorsque la loi de pesanteur p est donnée.

COROLLAIRE II.

Si l'épaisseur de la voûte étoit finie, les mêmes suppositions
Fig. 11. existantes, que dans le Corollaire précédent; soit R le rayon de la développée au point M; soit z le joint Mm, l'on aura $MM'mm' = \frac{ds(2R+z)}{2R}$, & par conséquent $\frac{dx}{dy} = \frac{A}{\int \frac{z\,ds(2R+z)}{2R}}$, d'où $\frac{A\,ddy}{dx} = \frac{z\,ds(2R+z)}{2R}$; mais $R = \frac{ds^3}{ddy.dx}$, & $\frac{ddy}{dx} = \frac{ds^3}{Rdx^2}$; ainsi, l'on aura $\frac{A(ds)^2}{Rdx^2} = \frac{z(2R+z)}{2R}$; ce qui donne

$$R + z = \left(RR + \frac{2A(ds)^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

équation générale pour une voûte quelconque, dans le système de la pesanteur.

EXEMPLE.

Si la courbe intérieure aMB étoit un cercle dont le rayon fut 1, & qu'on cherchât la valeur de z, il est clair que

$$\frac{ds}{dx} = \frac{MM'}{qM'} = \frac{1}{\text{cos. } s}; \text{ ainsi } 1 + z = \left(1 + \frac{2A}{(\text{cos. } s)^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si l'on suppose qu'au sommet de la courbe le joint $Aa = b$, l'on aura pour lors cos. $s = 1$, & $A = \frac{2b + bb}{2}$.

REMARQUE I.[ere]

Par cette théorie, je n'ai cherché qu'à remplir la première condition d'équilibre, qui exige que toutes les forces qui agissent sur une portion de voûte $GaMm$, aient leur résultante perpendiculaire au joint Mm; mais il est facile de prouver que l'on a satisfait en même-temps à la deuxième condition, qui demande que cette résultante tombe entre les points M & m; car, puisque la force constante A agit perpendiculairement au joint vertical Ga, en un point quelconque S, il s'ensuit que puisque par la condition d'équilibre que l'on vient de remplir, la ligne des résultantes doit couper tous les joints perpendiculairement, elle formera une courbe parallèle à la ligne intérieure aB; ainsi, dans le cas où la force A seroit appliquée en a, la ligne des pressions seroit exactement la même que aMb.

M. Jacques Bernoulli *(Op. vol. II, p. 1119)* en cherchant la figure d'une voûte dont les voussoirs seroient égaux & très-petits, trouve, par les différentes conditions d'équilibre, deux expressions différentes; mais une fausse estimation dans les angles de cotangente, a donné lieu à l'erreur de M. Bernoulli, & la remarque en a été déjà faite dans les notes par les Éditeurs de ses Ouvrages.

REMARQUE II.

Il suit encore de la formule générale

$$R + z = \left(RR + \frac{2A(ds)^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

que toutes les fois que la voûte aB forme au point B un angle droit avec son axe EB, parallèle à l'horizon, le joint, dans ce point, devient infini ; ou que ce joint est l'asymptote de la courbe extérieure CD ; car, puisque dans l'équation fondamentale, ds devient infini par rapport à dx, il suit que $R + z$ devient aussi une quantité infinie. Ce résultat se trouve peu conforme avec ce que nous voyons exécuter tous les jours, puisque dans la pratique, les joints horizontaux, au lieu d'être infinis, sont souvent assez petits. Dans la théorie, en outre, la courbe intérieure étant donnée, la longueur du joint est toujours une quantité donnée; quantité cependant que les Architectes varient à l'infini dans l'exécution. Mais le frottement & l'adhérence conservent par leur résistance l'équilibre, que la force de la gravité tend à détruire. Nous chercherons dans la suite la manière de faire entrer dans l'expression des voûtes ces nouvelles forces coërcitives; mais l'on peut en attendant inférer de cette remarque, que dans l'exécution, la théorie qui précède, ne peut être, comme nous l'avons déjà dit dans le Discours préliminaire, que d'une foible utilité.

COROLLAIRE III.

Si la courbe extérieure, de même que la courbe intérieure étoient données, l'on pourroit déterminer, dans le cas d'équilibre, la direction des joints de la manière suivante.

Fig. 12. Soit supposé, comme plus haut, le joint aG vertical, prolongé indéfiniment en l; soit qM le joint en M, qui, prolongé, rencontre la verticale al en G; soit φ le centre de gravité de la partie $aGMq$; soit Sp la direction de la force horizontale constante A qui rencontre en p une verticale passant par le centre de gravité φ; la résultante de

toutes les forces sera exprimée par une ligne pn, qui (*art. 1*) doit être perpendiculaire au joint Mq, & passer entre les points M & q; soit tiré PM, parallèle à l'axe AB, & soit nommé h l'angle PMC. La courbe aMB étant donnée, de même que la courbe GqD, la pesanteur de la masse $GaMq$ sera exprimée par une fonction de PM & de h; mais les deux triangles semblables prn, PCM, dont les côtés du premier sont proportionnels aux forces qui agissent sur la portion de voûte $GaMq$, donnent l'analogie suivante: P pesanteur de la portion de la voûte $GaMq$: A :: cos. h : sin. h, ou $P = \frac{A \text{ cos. } h}{\text{sin. } h}$. Nous verrons dans la suite quels sont les points S entre a & G, où l'on peut appliquer la pression A, quantité déterminée par l'équation précédente, pour satisfaire à la deuxième condition d'équilibre; c'est-à-dire, pour que la résultante pn passe toujours entre les points M & q.

EXEMPLE.

Si l'on vouloit déterminer la direction des joints d'une plate-bande d'une épaisseur constante & donnée; que $aGBb$ Fig. 13. représente cette voûte comprise entre deux lignes droites parallèles. La direction du joint vertical aG, de même que la direction du dernier joint Bb, par lequel la voûte s'appuie sur le mur $BLKo$, étant données, l'on cherche la direction de tous les autres joints MM'; soit $aG = a$, $aM = x$, que la direction du joint MM' rencontre la verticale aG en G, l'on aura $GaMM' = P = ax + \frac{a^2 \text{ cos. } h}{2 \text{ sin. } h}$. Substituant cette valeur de P dans l'équation fondamentale $\frac{A \text{ cos. } h}{\text{sin. } h} = P$, il en résulte $ax = (A - \frac{a^2}{2}) \frac{\text{cos. } h}{\text{sin. } h}$. Pour avoir la valeur de la constante A, soit supposé que lorsque $x = aB = b$, $\frac{\text{cos. } h}{\text{sin. } h}$ égale C. L'on trouvera

$A = \frac{2ab + a^2 C}{2C}$; & par conféquent $x = \frac{b \text{ cof. } h}{C \text{ fin. } h}$; d'où l'on conclud que tous les joints d'une plate-bande paffent par le même point C; ce qui donne une conftruction très-facile.

Pour fatisfaire, dans cet exemple, à la deuxième condition de l'*article I.er*, qui exige que la réfultante des forces qui tiennent en équilibre la portion de voûte $GaMM'$, paffe entre les points M & M'; foit φr une ligne verticale paffant par le centre de gravité de la maffe totale $GaBb$. Si fur le joint bB l'on élève au point B une perpendiculaire Bn, qui rencontre la verticale φr en n, & fi, par ce point n on tire une ligne horizontale ns, le point S, où le joint vertical Ga fera rencontré par cette ligne, fera le point le plus bas fur le joint Ga, où l'on puiffe appliquer la force A, fans que la plate-bande fe rompe. Ainfi, fi la direction du joint Bb étoit telle, que la ligne Bn rencontrât la verticale φr, en un point n, au-deffus de la ligne Gb, il n'y auroit aucun point fur le joint Ga, où l'on pût appliquer la force A, pour conferver l'équilibre, & la plate-bande fe briferoit néceffairement. Il eft très-facile, d'après ces remarques, de déterminer la limite de l'inclinaifon Bb, lorfque l'épaiffeur Ga eft donnée.

Je crois inutile d'avertir que fi la réfultante Bn, pour la maffe totale, paffe par le point B, la réfultante, pour une maffe particulière $GaMM'$, paffera néceffairement entre M & M', puifque la quantité A reftant conftante, les maffes $GaMM'$ diminuent. Ainfi, dès que l'on a fatisfait à la deuxième condition d'équilibre pour le point B, l'on a néceffairement fatisfait à cette même condition pour un point quelconque M.

XVIII.

XVIII.

De l'équilibre des voûtes, en ayant égard au frottement & à la cohésion.

PROBLÈME.

Dans une voûte, la courbe intérieure aB, *la courbe extérieure* Gb *étant données, les joints* Mm, *perpendiculaires aux élémens de la courbe intérieure, seront aussi donnés: l'on demande les limites de la pression horizontale en* f, *qui soutiendra cette voûte, en supposant qu'elle soit sollicitée par sa propre pesanteur, & retenue par la cohésion & le frottement des joints.* Fig. 14.

Soit prise une portion de cette voûte, telle que $GaMm$, soit prolongé mM jusqu'en R; soit nommé l'angle R, h; soit la force de pression appliquée en f sur le joint vertical aG, exprimé par A.

Je suppose d'abord la portion $GaMm$ solide, en sorte qu'elle ne puisse se diviser que suivant Mm. Il faut donc, pour que cette portion de voûte soit en équilibre, que la force A soit telle qu'elle l'empêche de glisser suivant mM; mais la force dépendante de A, décomposée suivant Mm, & dirigée suivant cette même ligne, est......... A sin. h.

La force parallèle à mM, dépendante de φ........... φ cos. h.

La force perpendiculaire à mM, dépendante de A....... A cos. h.

La force perpendiculaire à mM, dépendante de φ....... φ sin. h.

Ainsi, l'on aura, en ayant égard au frottement & à l'adhérence, $\varphi \text{ cos. } h - A \text{ sin. } h \frac{-\varphi \text{ sin.} h - A \text{ cos.} h}{n} - \delta . Mm$, pour exprimer l'effort que fait cette portion de voûte pour glisser selon mM; & dans le cas que A sera seulement suffisant pour la soutenir, l'on aura

$$A = \frac{\varphi \left(\text{cos. } h - \frac{\text{sin. } h}{n}\right) - \delta\, Mm}{\text{sin. } h + \frac{\text{cos. } h}{n}}.$$

Or, comme par sa construction, la voûte peut non-seulement

gliſſer ſur le joint mM, mais même ſur tout autre, il ſuit que pour que la voûte ne ſe rompe point, A ne doit jamais être moindre que la quantité $\dfrac{\varphi\,(\text{coſ.}\,h - \frac{\text{ſin.}\,h}{n}) - \delta\,Mm}{\text{ſin.}\,h + \frac{\text{coſ.}\,h}{n}}$, quelle que ſoit la valeur de h. Ainſi, ſi l'on prend la valeur de h, telle qu'elle donne pour A un *maximum*, pour lors la conſtante A, ainſi déterminée, ſera ſuffiſante pour ſoutenir toute la voûte.

Je ſuppoſe que $A_{,}$ exprime ce *maximum*.

Si l'on cherchoit à déterminer la force en f, de manière qu'elle fût prête à faire couler la portion de voûte qui oppoſeroit la moindre réſiſtance, ſuivant Mm, pour lors, l'on auroit, dans le cas d'équilibre, pour une portion quelconque $A = \dfrac{\varphi\,(\text{coſ.}\,h + \frac{\text{ſin.}\,h}{n}) + \delta\,Mm}{\text{ſin.}\,h - \frac{\text{coſ.}\,h}{n}}$; mais comme aucune portion de voûte ne doit gliſſer ſur un joint quelconque Mm, il faut que A ſoit toujours plus petit que cette dernière quantité. Ainſi il faut chercher le *minimum* de A qui exprimera la plus grande force que l'on puiſſe appliquer en f, ſans rompre la voûte, ſuivant un joint Mm; je ſuppoſe que A' ſoit ce *minimum*.

Ainſi, comme dans le cas de repos, qui eſt celui que nous cherchons à fixer, la voûte, en tout ou en partie, ne doit point gliſſer ſur ſes joints dans aucun ſens, il ſuit que les limites des forces que l'on peut appliquer en f, ſont compriſes entre $A_{,}$ & A', ou $A_{,}$ exprime la moindre force qui puiſſe preſſer le point f, & A' la plus grande force qui puiſſe preſſer ce même point; d'où l'on peut conclure que ſi $A_{,}$ eſt plus grand que A', il ne peut y avoir d'équilibre, puiſque la preſſion en f ne pouvant point être plus grande que A', ne peut point être non plus plus petite que $A_{,}$, que nous ſuppoſons plus grand que A'.

Pour ſatisfaire à préſent à la deuxième condition d'équilibre,

il faut que la résultante gv, de toutes les forces qui agissent sur la portion de voûte $GaMm$, passe au-dessus du point M, & au-dessous du point m. Il faut, par conséquent, en nommant B la force qui agit en f, que BMQ soit toujours égal ou plus grand que $\varphi gM - \delta' zz$ (δ' étant une fraction constante de la cohésion du mortier, *art. 7*); & dans le cas où la résultante passeroit par le point M, l'on auroit $B = \frac{\varphi gM - \delta' zz}{MQ}$. Si la quantité B étoit supposée plus petite que $\frac{\varphi gM - \delta' zz}{MQ}$, pour lors la résultante gv passeroit au-dessous du point M, & la voûte se romproit. Ainsi, pour avoir la force B, suffisante pour soutenir toute la voûte, il faut chercher le *maximum* de B d'après l'équation précédente, & ce *maximum* exprimera la plus petite force que l'on puisse appliquer en f; que $A_{,}$ exprime ce *maximum*.

Comme il faut encore, pour satisfaire à la deuxième condition, que la résultante Lv passe au-dessous du point m, il suit que Bmq doit être plus petit, ou tout au plus égal à $\varphi Lq + \delta' zz$. Ainsi, d'après l'équation $B = \frac{\varphi . gq + \delta' zz}{mq}$, il faut déterminer la constante B, telle qu'elle représente le *minimum* de $\frac{\varphi gq + \delta' zz}{mq}$; & B', déterminé d'après cette considération, donnera pour Bmq une quantité égale à $\varphi qg + \delta' zz$, dans un point seulement, & plus petite dans tous les autres points m, & par conséquent B' exprimera la plus grande force que l'on puisse supposer agir en f; d'où l'on conclud que pour remplir la deuxième condition, la force appliquée en f ne peut point être plus petite que B, ni plus grande que B'. Par conséquent, pour joindre les deux conditions ensemble, si $A_{,}$ ou $B_{,}$ étoient plus grands que A' ou B', l'équilibre ne pourroit point avoir lieu, & la voûte, dont les dimensions seroient données, se romproit nécessairement.

Pour avoir actuellement les vraies limites, il suffit de prendre entre $A_{,}$ & $B_{,}$ la quantité la plus grande, & entre

A' & B' la quantité la plus petite, en ſorte que ſi $B_{,}$ étoit plus grand que $A_{,}$, & B' plus petit que A', $B_{,}$ & B' ſeroient les véritables limites des forces que l'on pourroit appliquer en f ſans rompre la voûte.

REMARQUE I.

Le frottement eſt ſouvent aſſez conſidérable dans les matériaux que l'on emploie à la conſtruction des voûtes, pour que les différens vouſſoirs ne puiſſent point gliſſer l'un contre l'autre; en ce cas, l'on peut négliger la première condition d'équilibre; & il n'eſt plus néceſſaire que la réſultante des forces qui agit ſur une portion quelconque de voûte ſoit perpendiculaire aux joints qui la terminent; mais ſeulement qu'elle tombe ſur ces joints. Ainſi, en négligeant la cohéſion des joints, ce qui doit ſe faire dans les voûtes nouvellement conſtruites; il ſuffit de chercher le *maximum* de $\frac{\varphi g M}{MQ}$, pour déterminer la force $B_{,}$, & le *minimum* de $\frac{\varphi q g}{mq}$, pour déterminer B'; l'on doit en outre ſuppoſer que la force B agit en G, ſommet du joint, pour rendre la force $B_{,}$ auſſi petite qu'elle puiſſe être. Il faut cependant remarquer que lorſqu'on cherche à fixer l'état d'équilibre par cette ſeconde condition, en ſuppoſant les forces paſſant par les points G & M, il faut ſuppoſer que ces points ſont aſſez éloignés de l'extrémité des joints, pour que l'adhérence des vouſſoirs ne permette pas à ces forces d'en rompre les angles; ce qui ſe détermine par les méthodes que nous avons employées en cherchant la force d'un pilier.

REMARQUE II.

Dans la pratique, il ſera toujours plus ſimple de déterminer les limites de la force B par tâtonnement, que par des moyens exacts. Je ſuppoſe, par exemple, que l'on prenne la portion GaM de la voûte, telle que le joint Mm faſſe un angle de 45 degrés avec une ligne horizontale; l'on calculera la

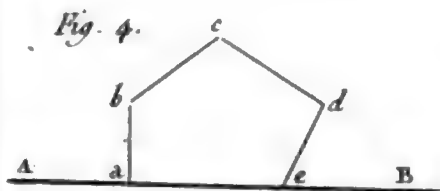
force $B_,$ dans cette supposition; l'on cherchera ensuite cette même force par rapport à un second joint, peu distant du premier, en s'approchant de la clef; si cette deuxième force est plus grande que la première, l'on sera sûr que l'angle de rupture de la voûte est entre la clef & le premier joint; ainsi, en remontant, par cette même opération, vers cette clef, l'on déterminera facilement la vraie force $B_,$. Ce calcul ne sauroit jamais être bien long, parce que par la propriété *de maximis & minimis*, il y aura, vers un point M, où l'on trouve la limite cherchée $B_,$, très-peu de variations sur un assez grand développement de la courbe; & qu'ainsi, pour déterminer cette force $B_,$, il ne sera nécessaire que d'avoir à peu-près le point de rupture M; l'on déterminera par les mêmes moyens la plus grande force B' que puisse soutenir une voûte sans se rompre. Par conséquent, si les dimensions de la voûte étoient données, comme nous le supposons ici, de même que la hauteur du pied-droit BE, sur lequel elle porte, l'on déterminera facilement quelle doit être l'épaisseur Bb de ce pied-droit, pour que la résultante de la force $B_,$, qui agit en G, & de la pesanteur totale de la voûte & de son pied droit passe entre E & e, ou passe par le point e; ce qui satisfera à la deuxième condition de solidité.

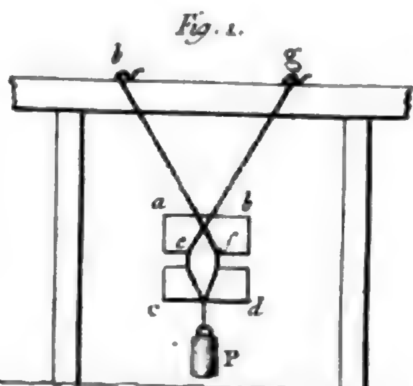
La destination de ce Mémoire, peut-être déjà trop long, ne me permet pas d'étendre cette théorie, ni de l'appliquer à toutes les espèces de voûtes; ainsi, je me contenterai d'avoir essayé de donner des moyens exacts, & tels que je les crois absolument nécessaires pour constater l'état de solidité.

En comparant les principes qui précèdent avec les différentes méthodes d'approximation usitées dans la pratique, l'on s'apercevra facilement que leurs auteurs n'ont point assez distingué les deux conditions d'équilibre nécessaires pour l'état de repos. Dans celle, par exemple, que l'on attribue à M. de la Hire, rapportée par M. Bélidor, & pratiquée par presque tous les Artistes, l'on divise la voûte en trois parties, & l'on calcule la pression de la partie supérieure,

en ſe conformant à la première condition d'équilibre, & l'on détermine enſuite les dimenſions des pieds-droits, par la deuxième condition d'équilibre. Or, pour peu que l'on y faſſe attention, l'on verra que ſi l'on diviſe la partie ſupérieure vers la clef, & que l'on ſuppoſe que cette voûte ſe rompe en quatre parties, au lieu de ſe rompre en trois, la force de preſſion des parties ſupérieures ſera ſouvent, dans les voûtes plates, beaucoup plus grande que celle qui ſe détermine par la méthode de M. de la Hire, & que les dimenſions des pieds-droits, fixés par cette méthode, ſeront ſouvent inſuffiſantes.




Fig. 4.
c
b
d
A
a
e
B


Fig. 1.
b
g
a
b
c
d
P

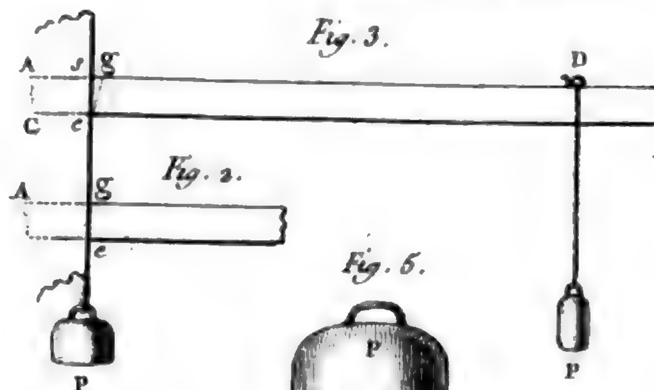
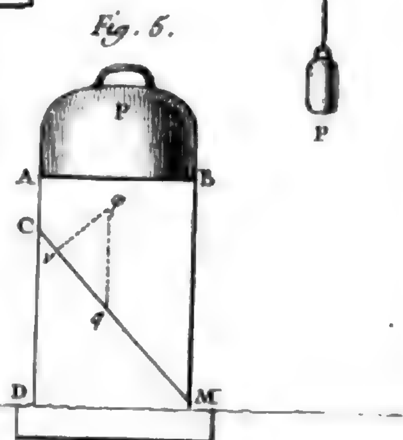
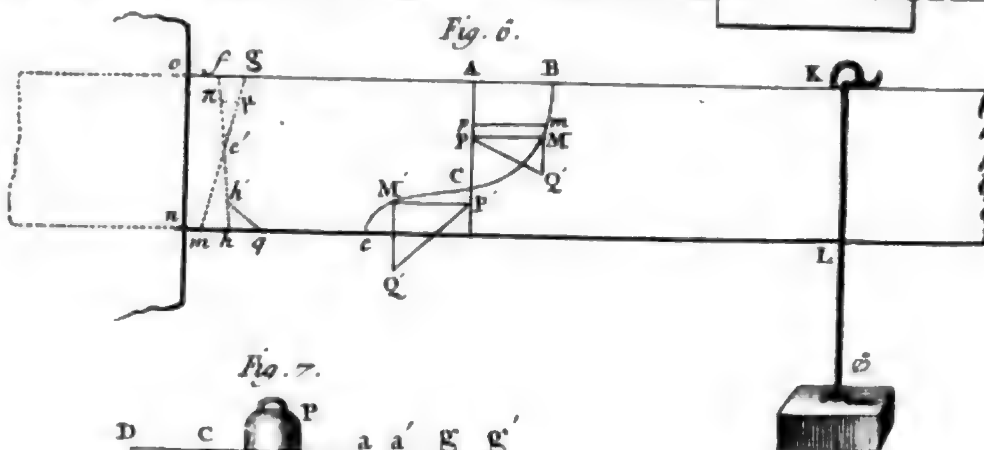
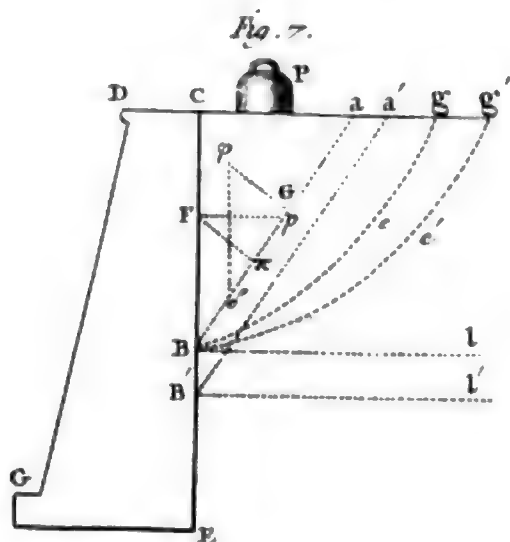
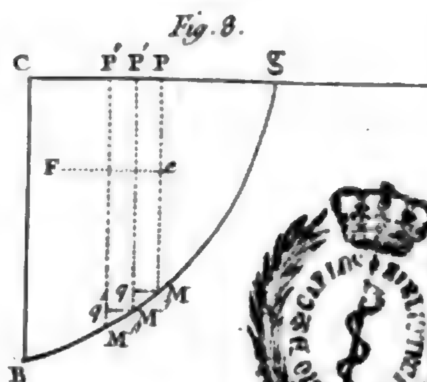

Fig. 3.
A
g
D
C
e
P
P


Fig. 2.
A
g
e

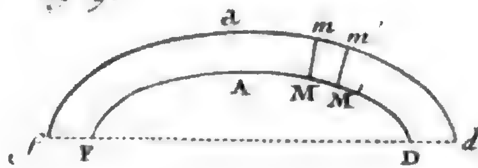

Fig. 5.
P
A
B
C
q
D
M

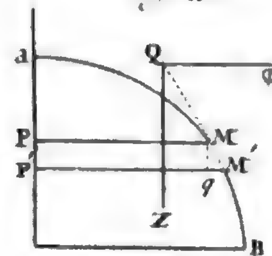

Fig. 6.
o
f
g
A
B
K
π
μ
p
m
M
C
Q
M
P
n
m
h
q
e
Q
L

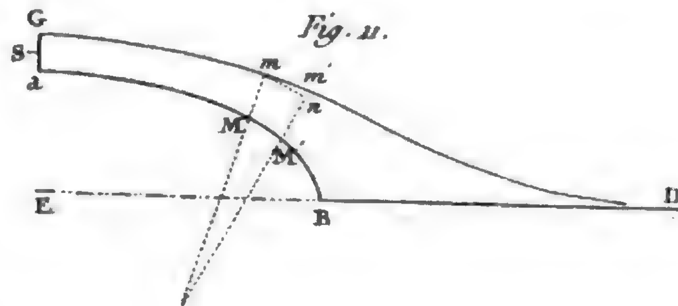

Fig. 7.
P
D
C
a
a'
g
g'
φ
G
F
p
e
e'
B
l
B'
l'
G
E

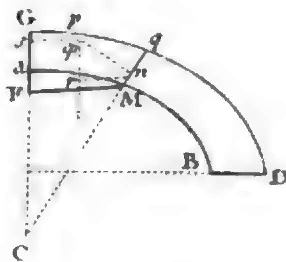

Fig. 8.
C
P
P
P
g
F
e
q
M
M
M
B

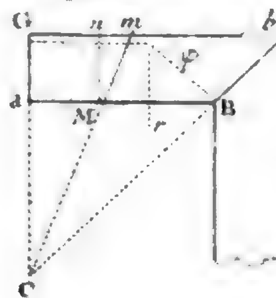


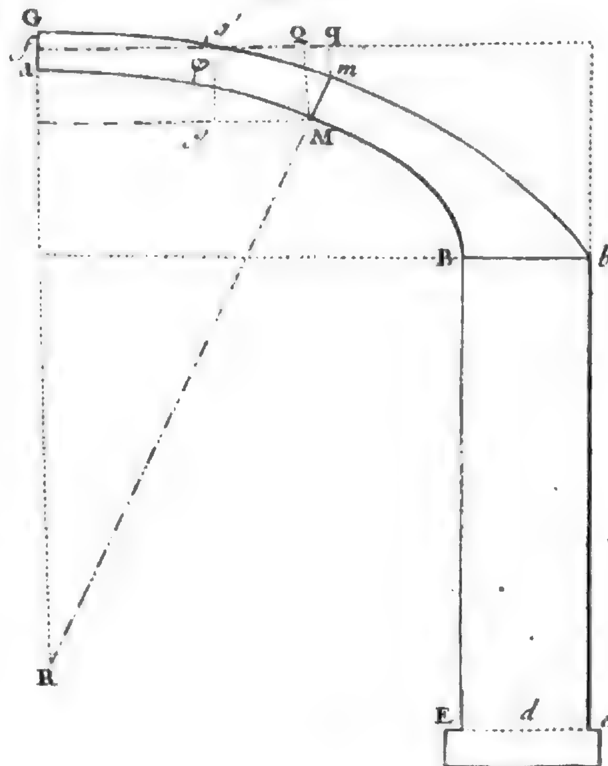












Elis. Haussard Sculp.

MÉMOIRE
SUR LA
THÉORIE DU JAUGEAGE,

Par M. Dez, Professeur royal de Mathématiques
à l'École Royale Militaire.

I.

Quoique l'objet de ce Mémoire ne demande que les principes les plus simples de la Géométrie, il mérite cependant l'attention des Géomètres par le choix des données dont on doit faire usage dans les calculs, & sur-tout par son importance dans la vie civile. On ne peut s'empêcher en effet, de convenir que les Jauges dont on se sert communément sont très-imparfaites: appliquées indistinctement à tous les vaisseaux, elles donneroient des erreurs considérables, parce qu'elles sont construites d'après une théorie inexacte. On a donc été obligé de les corriger par l'expérience, & de les modifier suivant les différentes espèces de vaisseaux que l'on s'est proposé de mesurer, ce qui a surchargé la pratique du Jaugeage d'un grand nombre de règles qui l'ont rendue difficile au point d'exiger un très-long apprentissage. Un inconvénient plus grand encore, est leur défaut de précision; les corrections que l'on a tirées de l'expérience supposent aux tonneaux une forme déterminée, & pour peu que ceux que l'on doit mesurer s'en écartent, on est exposé à se tromper; or, on sent combien les erreurs en ce genre peuvent être préjudiciables. Une méthode générale, simple & précise, d'avoir la capacité des vaisseaux, seroit donc fort utile. Depuis long-temps les Géomètres en ont fait l'objet de leurs recherches; mais leurs résultats diffèrent sensiblement entr'eux à cause de la différence des courbures qu'ils supposent aux douves des tonneaux; il seroit très-difficile de trouver cette courbure par l'expérience; il paroît même

impoſſible d'aſſujettir à une même équation celle de toutes les eſpèces de tonneaux : il ne reſte ainſi d'autre parti à prendre, que de choiſir parmi toutes les figures poſſibles, celle qui convient le mieux à la forme que les tonneaux affectent, d'en tirer une formule ſimple & commode dans la pratique, & de la comparer enſuite à l'obſervation ; car, ſi elle s'en écarte fort peu, en ſorte que ces écarts ſoient du même ordre que les erreurs légères qu'il eſt impoſſible d'éviter dans la pratique, elle donnera une ſolution auſſi complète qu'on puiſſe la deſirer du Problème dont il eſt ici queſtion. J'oſe croire, d'après un grand nombre d'expériences, que la formule que je vais donner remplit ces conditions.

I I.

Parmi toutes les figures que l'on a ſuppoſées juſqu'ici aux douves des tonneaux, celle que leur a donnée M. Camus me paroît s'éloigner le moins de la véritable. Cet Auteur *(Mém. de l'Acad. des Sc. ann. 1741, p. 385)* conſidère les tonneaux comme engendrés par la révolution *(fig. 1)* d'un arc de parabole mBM, terminé par les tangentes MF, mK, autour de l'axe Hh, les droites perpendiculaires MQ, mq, diviſant les lignes HC & hC en deux parties égales : de-là, ſi l'on nomme b le diamètre BD du bouge ou du milieu ; f le diamètre FN du fond ou du bout ; l la longueur Hh, & m le rapport de la circonférence au diamètre, M. Camus trouve pour la ſolidité du tonneau, ou, ce qui revient au même, pour la quantité de fluide qu'il contient, l'expreſſion *(C)*, $ml\left(\frac{64b^2 + 37bf + 34f^2}{540}\right)$; ayant comparé cette formule aux réſultats d'un grand nombre d'expériences faites ſur des vaiſſeaux de toutes les eſpèces conuues, elle y a toujours répondu avec la plus grande préciſion : mais comme le calcul en eſt aſſez compliqué, & qu'il eſt abſolument impraticable pour les perſonnes chargées ordinairement de jauger les tonneaux, j'ai cherché à la rendre d'un uſage très-facile, & c'eſt à quoi je ſuis parvenu de la manière ſuivante.

J'obſerve

J'obſerve pour cela que la différence du diamètre du bouge à celui du fond eſt ordinairement très-petite; nommons donc α cette différence, en ſorte que l'on ait

$$\alpha = b - f, \text{ ou } f = b - \alpha.$$

En ſubſtituant donc cette valeur de f dans l'expreſſion *(C)*, j'ai trouvé qu'elle pouvoit ſe réduire, ſans erreur ſenſible, à la ſuivante

$$\tfrac{1}{4} ml.(b - \tfrac{3}{8}\alpha)^2, \text{ ou } (D), \tfrac{1}{4} ml.[\tfrac{b+f}{2} + \tfrac{1}{8}(b-f)]^2.$$

En effet, on trouvera facilement que la différence des deux formules *(C)* & *(D)* eſt ſeulement

$$\tfrac{1}{4} ml.(0{,}11122.\alpha - 0{,}02777.b).\alpha.$$

Si l'on ſuppoſe $\alpha = \frac{3}{10} b$, ce qui eſt le cas le plus déſavorable que l'on puiſſe craindre, & ce qui eſt extrêmement rare, on trouvera que la différence eſt à peine $\frac{1}{500}$ de la capacité entière du tonneau, & comme la formule de M. Camus n'eſt pas rigoureuſe, il pourroit arriver que la nôtre approchât autant & même plus, de la vérité.

La formule *(D)* eſt très-ſimple & facile à calculer; mais il faut la réduire en pratique, & conſtruire une jauge par ſon moyen; c'eſt ce que l'on fera de cette manière.

III.

Conſtruction d'une nouvelle Jauge.

Pour conſtruire une jauge d'après la formule *(D)* ci-deſſus, il faut néceſſairement avoir deux échelles, dont l'une *(L)* *(fig. 2)* que je nomme *échelle des longueurs*, ſerve à meſurer l; l'autre *(d)* *(fig. 3)* que je nomme *échelle des diamètres*, ſerve à meſurer le facteur $\frac{1}{4} m.[\frac{b+f}{2} + \frac{1}{8}(b-f)]^2$, parce qu'alors, pour avoir le nombre de meſures que renferme un vaiſſeau, il ſuffira de multiplier l'un par l'autre les nombres donnés par les deux échelles. Or, b & f étant donnés (par les dimenſions d'un vaiſſeau quelconque) en pouces & lignes,

il s'agit de construire une échelle qui représente

$$\frac{1}{4} m . [\frac{b+f}{2} + \frac{1}{8} . (b - f)]^2.$$

Considérons pour cela *(fig. 4)* le cylindre APC d'une mesure quelconque S, prise pour unité de mesure, & supposant le diamètre $AP = a$, & la hauteur $NC = h$, on aura $S = \frac{1}{4} m h . a^2$. Présentement, si l'on veut construire une échelle, au moyen de laquelle le diamètre d'un cylindre quelconque dont la hauteur est h, étant donnée, on puisse déterminer sur le champ le rapport de sa solidité à S, il est plus simple de résoudre le Problème inverse; c'est-à-dire de supposer la solidité connue, & de construire une échelle au moyen de laquelle on puisse conclure le diamètre. Pour cela on formera *(fig. 3)* un angle droit APZ, tel que l'on ait $AP = a$. Soit $P\,1.^o = a = AP$, $P\,1.^o$ sera le diamètre du cylindre dont la hauteur étant h, la solidité est S. Pour avoir le diamètre du cylindre, qui ayant une même hauteur, ait une solidité double, on tirera l'hypothénuse $A\,1.^o$ & l'on prendra $P\,2.^o$ égal à $A\,1.^o$; alors $P\,2.^o$ sera le diamètre de ce cylindre; ce qui est visible; car les cylindres de même hauteur sont comme les quarrés de leurs diamètres; or, $(P\,2.^o)^2 : (P\,1.^o)^2 :: 2 : 1$; pareillement, si l'on tire l'hypothénuse $A\,2.^o$, & que l'on prenne $P\,3.^o = A\,2.^o$; alors $P\,3^o$ sera le diamètre du cylindre triple; si l'on tire de même l'hypothénuse $A\,3.^o$, & que l'on prenne $P\,4.^o = A\,3.^o$, $P\,4.^o$ sera le diamètre d'un cylindre quadruple, &c. & ainsi de suite.

Pour trouver maintenant les diamètres des cylindres égaux à un nombre fractionnaire de mesure S, plus grand ou moindre que l'unité, on s'y prendra de la manière suivante. Je suppose qu'il s'agisse de trouver le diamètre du cylindre égal à $(n + \frac{1}{q}) . S$; n & q étant des nombres entiers, sur la droite $n^o\,(n+1)^o$ *(fig. 3)* comme diamètre, je décris la demi-circonférence $n^o M\,(n+1)^o$; je fais ensuite $n^o H$ égal à la $q.^{ième}$ partie de la droite $n^o\,(n+1)^o$, &

menant l'ordonnée HM, du point P comme centre, & du rayon PM, je décris un arc de cercle Mq, la droite Pq sera le diamètre du cylindre égal à $(n + \frac{1}{q}) . S$; j'omets ici la démonstration de cette construction, parce que les Géomètres la suppléeront aisément. Au reste, il me paroît plus commode, dans la pratique, de faire usage du calcul arithmétique, en observant que le diamètre d'un cylindre égal à $(n + \frac{1}{q}) . S$, est $a \sqrt{(n + \frac{1}{q})}$; c'est-à-dire (*fig. 3*), qu'on a en général

$$Pn^{o} = a \sqrt{(n)}, \; \& \; Pq = a . \sqrt{(n + \frac{1}{q})}.$$

IV.

Si l'on suppose $a = 14$ pouces, & $h = 2$ pouces & demi, on aura $S = 385$ pouces cubes, ce qui n'excède que d'un pouce cube le setier de Paris qui renferme huit pintes dont chacune est de 48 pouces cubes.

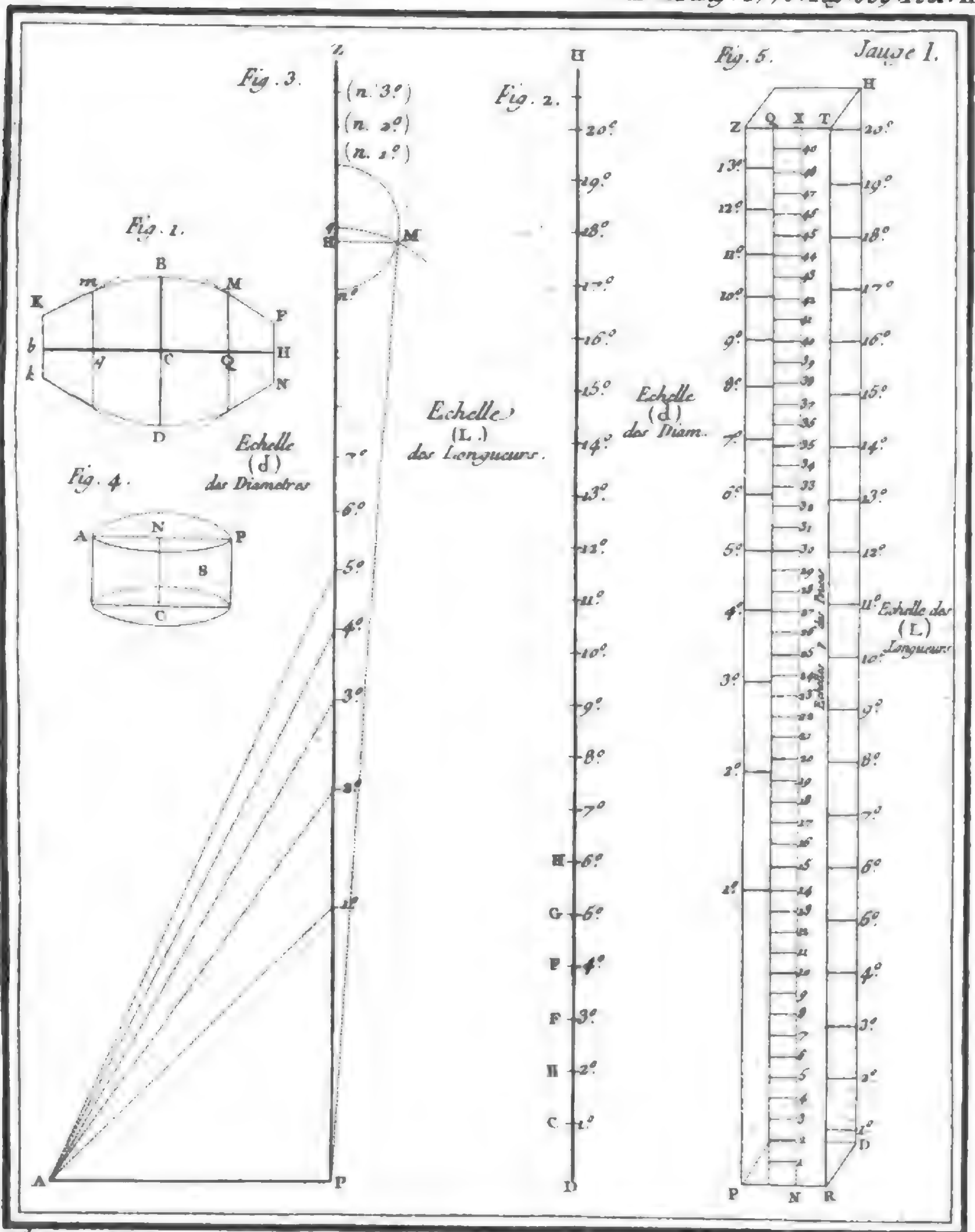
On peut donc, sans erreur sensible, en prenant le setier pour unité de mesure, faire $a = 14$ pouces, & $h = 2$ pouces & demi; ces dimensions m'ont paru plus commodes que toute autre pour construire une jauge conforme à l'usage reçu de compter par setiers dans la pratique.

Cela posé, on divisera un bâton $PZHD$, (*fig. 5*) de forme parallélipipède, de manière que sur une moitié RQ d'une de ses faces on marque des divisions égales d'un pouce, que je nomme *échelle* (p) *des pouces*, & on les subdivisera chacune en quatre, ou en un plus grand nombre de parties égales, si l'on veut une plus grande précision. On divisera l'autre moitié PQ de cette face suivant la méthode de l'*article précédent*, en sorte que la première $P\,1.^{o}$ soit de 14 pouces; les autres divisions $P\,2.^{o}$, $P\,3.^{o}$, $P\,4.^{o}$, &c. étant formées suivant la règle donnée dans cet article. On divisera $P\,1.^{o}$, $1.^{o}\,2.^{o}$, $2.^{o}\,3.^{o}$, $3.^{o}\,4.^{o}$ &c. en autant de parties que l'on desirera, suivant le degré d'exactitude que l'on veut avoir. Au

Jauge I.

moyen de cette échelle, que je nomme *échelle* (d) *des diamètres*; le diamètre d'un cylindre dont la longueur eſt de 2 pouces & demi, étant donné, on connoîtra facilement combien il renferme de ſetiers; puiſqu'il ſuffira de regarder à quelle diviſion de la droite *PZ* répond la longueur du diamètre meſuré ſur la droite *NX;* mais ſi le cylindre propoſé, au lieu d'avoir 2 pouces & demi de longueur, en a une quelconque, il faut, dans ce cas, conſtruire ſur la face *RH* de la jauge I *(fig. 5)* une échelle que je nomme *échelle* (L) *des longueurs*, dont chaque diviſion ſoit de 2 pouces & demi: chacune de ces diviſions étant elle-même ſubdiviſée en autant de parties égales qu'on le deſirera. Alors, pour meſurer un cylindre quelconque, il faudra, ſur l'échelle des diamètres, voir à quel numéro répond celui du cylindre, & ſur l'échelle des longueurs, voir à quel numéro répond celle de ce cylindre; on multipliera enſuite ces deux nombres l'un par l'autre, & le produit ſera le nombre de ſetiers que renferme le cylindre. Il eſt facile, cela poſé, de meſurer la ſolidité d'un tonneau quelconque, puiſque la formule *(D)* de l'*article II*, réduit cette meſure à celle d'un cylindre qui a pour longueur celle du tonneau, & pour diamètre la moitié de la ſomme des diamètres du bouge & du fond, plus la huitième partie de leur différence.

Pour donner un exemple de cette méthode, je ſuppoſe que dans un tonneau le diamètre du bouge ſoit de 33 pouces & demi, que celui du fond ſoit de 28 pouces & demi, & que ſa longueur ſoit de 42 pouces & demi, ou de 17° parties de l'échelle des longueurs, on ajoutera 33 pouces & demi, & 28 pouces & demi; on prendra la moitié de la ſomme qui eſt 31, & ſi on y ajoute $\frac{5}{8}$, qui eſt $\frac{1}{8}$ de la différence de $33\frac{1}{2}$ à $28\frac{1}{2}$, on aura 31 pouces $\frac{5}{8}$; cherchant enſuite ſur la jauge le numéro de l'échelle des diamètres, auquel 31 pouces $\frac{5}{8}$ (pris ſur l'échelle des pouces) répond, on trouvera que ce numéro eſt $5\frac{1}{10}$; multipliant donc $5\frac{1}{10}$ par 17, on aura $86\frac{7}{10}$ ſetiers, ou 693 pintes & demie, pour la quantité de liqueur contenue dans le tonneau.



E.th Haussard Sculp.

Telle est la nouvelle méthode de jauger les vaisseaux, que je propose de substituer à celles qui sont en usage : elle est, si je ne me trompe, beaucoup plus générale & plus simple ; puisqu'elle ne demande à être modifiée dans aucun cas. J'ose croire, d'ailleurs, qu'elle est infiniment plus exacte, comme je m'en suis assuré par un grand nombre d'expériences, dont plusieurs ont été faites sous les yeux de M.[rs] les Commissaires de l'Académie : du reste, l'importance de la matière exige qu'on vérifie encore cette jauge sur un plus grand nombre de vaisseaux, & si elle ne se dément sur aucuns, comme j'ai très-lieu de le présumer, je me saurai gré de m'être livré à cette recherche, peu brillante en elle-même, mais utile à la société.



RÉFLEXIONS SUR UN TOUR DE CARTES.

Par M. MONGE, Professeur royal de Mathématique & de Physique, à l'École du Génie.

UN des tours de cartes les plus usités est celui dans lequel on vous présente un jeu composé d'un certain nombre de cartes, en vous proposant d'en prendre une, de la remarquer, & de la remettre dans le jeu; on mêle alors les cartes, & après un certain nombre de permutations, celui qui fait le tour devine la carte remarquée. Il y a différens moyens d'y parvenir, mais tous consistent à mêler les cartes de manière que l'on puisse facilement trouver la place de celle qu'il s'agit de deviner. Parmi ces moyens, il y en a qui demandent de l'adresse, d'autres sont fondés sur des tromperies à peu-près du genre de celle-ci; on peut, par exemple, avoir une carte dans le jeu qui soit un peu plus longue, ou un peu plus large que les autres, présenter le jeu, lorsqu'on y remet la carte remarquée, de manière qu'elle se trouve immédiatement avant ou après celle qui est la plus grande, & qui sert d'indice, & mêler assez peu les cartes pour que celle que l'on veut deviner ne quitte pas l'indice qui servira à la faire connoître; mais ces artifices sont grossiers & ne méritent pas qu'on s'en occupe.

On peut avoir remarqué, d'après l'expérience (& nous nous proposons de démontrer cette propriété des changemens d'ordre) que si l'on mêle un jeu, composé d'un nombre quelconque de cartes, de manière que la seconde se place sur la première, la troisième dessous, la quatrième dessus, la cinquième dessous, la sixième dessus, &c. & ainsi de suite; qu'après avoir achevé ce battement, on en recommence un pareil, après celui-ci un troisième, & ainsi de suite, on parvient à remettre les cartes dans le même ordre qu'elles

étoient auparavant. Cette réflexion faite, il eſt facile de reconnoître que ſi l'on ſait quel rang tenoit dans le jeu la carte remarquée, & le nombre de permutations qu'il faut faire pour que les cartes ſe retrouvent dans le même ordre, il ſera très-aiſé de deviner la carte, & s'il ſe trouve alors quelque difficulté dans le tour, elle ne conſiſtera que dans la manière adroite de compter promptement, lorſqu'on remet la carte dans le jeu, quel rang elle y tient.

Il s'agit donc de démontrer ici, 1.° qu'après un certain nombre de permutations, comme celles que nous venons de définir, un jeu, composé d'un nombre quelconque de cartes, doit ſe retrouver dans le même ordre qu'il étoit auparavant; 2.° de trouver combien on doit battre de fois un jeu compoſé d'un nombre quelconque de cartes, pour qu'elles ſe retrouvent dans le même ordre.

Pour cela, ſoit un nombre quelconque de cartes, par exemple 14, & placées dans le jeu ſuivant l'ordre

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14;

on reconnoîtra aiſément qu'après la première permutation elles ſeront dans l'ordre ſuivant

A 14. 12. 10. 8. 6. 4. 2. 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13;

après la ſeconde permutation, dans l'ordre

B 13. 9. 5. 1. 4. 8. 12. 14. 10. 6. 2. 3. 7. 11;

après la troiſième permutation, dans l'ordre

C 11. 3. 6. 14. 8. 1. 9. 13. 5. 4. 12. 10. 2. 7,

& ainſi de ſuite.

Cela poſé, je dis que ſi l'on met les uns ſous les autres, les ordres dans leſquels doivent ſe trouver les cartes après toutes les permutations ſucceſſives, les nombres qui ſe trouvent dans chaque colonne verticale, ſeront les mêmes, & dans le même ordre, avec cette différence cependant que les colonnes ne commenceront pas par le même numéro: voici, en effet, toutes les permutations poſſibles d'un jeu compoſé de 14 cartes:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
A	14.	12.	10.	8.	6.	4.	2.	1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.
B	13.	9.	5.	1.	4.	8.	12.	14.	10.	6.	2.	3.	7.	11.
C	11.	3.	6.	14.	8.	1.	9.	13.	5.	4.	12.	10.	2.	7.
D	7.	10.	4.	13.	1.	14.	3.	11.	6.	8.	9.	5.	12.	2.
E	2.	5.	8.	11.	14.	13.	10.	7.	4.	1.	3.	6.	9.	12.
F	12.	6.	1.	7.	13.	11.	5.	2.	8.	14.	10.	4.	3.	9.
G	9.	4.	14.	2.	11.	7.	6.	12.	1.	13.	5.	8.	10.	3.
&c.	3.	8.	13.	12.	7.	2.	4.	9.	14.	11.	6.	1.	5.	10.
	10.	1.	11.	9.	2.	12.	8.	3.	13.	7.	4.	14.	6.	5.
	5.	14.	7.	3.	12.	9.	1.	10.	11.	2.	8.	13.	4.	6.
	6.	13.	2.	10.	9.	3.	14.	5.	7.	12.	1.	11.	8.	4.
	4.	11.	12.	5.	3.	10.	13.	6.	2.	9.	14.	7.	1.	8.
	8.	7.	9.	6.	10.	5.	11.	4.	12.	3.	13.	2.	14.	1.
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.

Or, un numéro quelconque de la permutation *B*, ne ſe trouve ſous celui qui eſt dans la même colonne verticale dans la permutation *A*, que parce que le même numéro, dans la permutation *A*, ſe trouve ſous le même, dans le premier ordre; le n.° 5, par exemple, ne ſe trouve ſous 10 dans *A*, que parce que 5 dans *A*, ſe trouve ſous 10 dans le premier ordre; de même, le n.° 11, dans *E*, ſe trouve ſous 13 dans *D*, parce 11 dans *D*, ſe trouve ſous 13 dans *C*; en effet, ſi une carte du premier ordre prend un certain rang dans la permutation *A*, il faut néceſſairement que celle qui occupe dans la permutation *A*, le même rang qu'elle occupoit dans le premier ordre, tienne dans la permutation *C*, le même rang qu'elle occupe dans *A*. Ainſi, dans toutes les colonnes verticales, le même numéro ſe trouve précédé & ſuivi par les mêmes numéros; donc, les nombres qui compoſent chaque colonne ſont les mêmes, & dans le même ordre. Par conſéquent, lorſqu'après un certain nombre de permutations, on ſera parvenu à avoir le n.° 1 dans la première colonne verticale, on aura 2 dans la ſeconde, 3 dans la troiſième, 4 dans la quatrième, &c. c'eſt-à-dire, que les cartes ſe retrouveront dans le même ordre qu'en commençant.

Il ne

Il ne s'agit donc plus que de démontrer que le n.° 1 doit revenir dans la première classe : or, cela est évident, puisqu'il est en tête de la colonne, & qu'il est, par conséquent, un des numéros de la suite qui compose chaque colonne.

COROLLAIRES.

I. Donc, après un certain nombre de permutations, comme celles que nous avons définies, de quelque nombre de cartes qu'un jeu soit composé, il doit se reproduire dans le même ordre qu'il étoit auparavant.

II. Le nombre des permutations qu'il faut faire pour qu'un jeu de cartes se reproduise dans le même ordre, ne peut pas excéder le nombre des cartes qui composent le jeu; car, ce nombre est le même que celui des numéros différens qui composent une colonne verticale; & le nombre de ces numéros ne peut pas excéder celui des cartes.

REMARQUES.

Lorsque le nombre des cartes est impair, la dernière ne change pas de rang, après quelque nombre de permutations que ce soit; c'est-à-dire, que dans chaque permutation elle reste toujours la dernière. Qu'on examine, en effet, le rang qu'occupent les cartes après la permutation *A*, & on remarquera que toutes celles dont le rang étoit pair se trouvent les premières, & celles dont le rang étoit impair, les dernières; mais de manière que celles-ci forment la suite des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c. & que la dernière carte de chaque permutation est toujours celle qui occupoit le dernier rang impair dans la permutation précédente.

Donc, lorsque le nombre des cartes qui composent le jeu est impair, la dernière carte ne fait aucun effet dans le changement d'ordre qui arrive parmi les autres, après chaque permutation; ainsi, le nombre des permutations qu'il faut faire, pour qu'un jeu composé d'un nombre impair de cartes se reproduise tel qu'il étoit, est le même que celui qui convient à un jeu composé du nombre pair, immédiatement

inférieur. Par conſéquent, toutes les recherches qu'on peut faire là-deſſus ſe réduiſent à trouver les nombres de permutations qui conviennent à tous les jeux compoſés de nombres pairs de cartes.

Nous avons vu que le nombre de permutations étoit égal au nombre des numéros qui compoſent chaque colonne, ou, plus ſimplement, la première; donc, ſi l'on parvient à compoſer la ſuite de ces numéros, on connoîtra aiſément le nombre de permutations demandées : or, ſoit la ſuite des cartes dans le premier ordre, & après la première permutation

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14.
A 14. 12. 10. 8. 6. 4. 2. 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13.

13. On trouvera que le nombre 13 doit être le ſecond terme
11. de la ſuite, parce qu'il ſe trouve ſous 14, dans *A;* que de
7. même, 11 doit être le troiſième, parce qu'il ſe trouve ſous
2. 13, dans *A;* Pareillement, 7 le quatrième, parce qu'il ſe
12. trouve ſous 11 dans *A;* Par la même raiſon, 2 le cinquième,
9. parce qu'il eſt ſous 7 dans *A*, & ainſi de ſuite, continuant
3.
10. juſqu'à ce qu'on parvienne au n.° 1, & le nombre des
5. termes de la ſuite ſera celui des permutations. Or, *m* étant
6. le nombre des cartes du jeu, il eſt facile de remarquer que
4. ſous un numéro dont le rang, dans le premier eſt $\frac{m}{2} + 1$,
8.
1. eſt 1 ; ſous celui dont le rang eſt $\frac{m}{2} + 2$, eſt 3 ; ſous celui dont le rang eſt $\frac{m}{2} + 3$, eſt 5 ; ou que l'on aura les ſuites correſpondantes

$$\frac{m}{2} + 1,\ \frac{m}{2} + 2,\ \frac{m}{2} + 3,\ \frac{m}{2} + 4,\ \frac{m}{2} + 5, \text{\&c.}$$
$$1 \qquad 3 \qquad 5 \qquad 7 \qquad 9, \text{\&c.}$$

d'où l'on conclura facilement que le numéro qui doit ſe trouver dans *A*, ſous un rang quelconque $\frac{m}{2} + n$, (*n* étant un nombre quelconque) doit être le n.[ième] terme de la progreſſion arithmétique 1, 3, 5, 7, 9, &c. ou $1 + 2(n - 1)$,

ou $2n - 1$; donc, dans la première colonne, après un numéro $= \frac{m}{2} + n$, doit ſuivre le numéro $= 2n - 1$. Cette formule ne peut ſervir que pour les numéros qui ſurpaſſent la moitié du nombre des cartes; mais on obſervera que ſous un numéro, dont le rang dans le premier ordre eſt $\frac{m}{2} - 1$, ſe trouve le n.° 4; ſous celui dont le rang eſt $\frac{m}{2} - 2$, eſt 6; ſous celui dont le rang eſt $\frac{m}{2} - 3$, ſe trouve 8 . . . &c. ce qui donne des ſuites correſpondantes

$$\ldots \frac{m}{2} - 4 . \frac{m}{2} - 3 . \frac{m}{2} - 2 . \frac{m}{2} - 1 . \frac{m}{2} - 0 .$$

$$\ldots\ldots 10 \ldots\ldots 8 \ldots\ldots 6 \ldots\ldots 4 \ldots\ldots 2 .$$

d'où l'on conclura que le n.° qui doit ſe trouver dans A, ſous un rang $\frac{m}{2} - n$, doit être le n.ième terme de la progreſſion 4, 6, 8, 10, &c. & par conſéquent

$$= 4 + 2(n - 1) = 2(n + 1).$$

Donc, dans la première colonne, après un numéro $\frac{m}{2} - n$, doit ſuivre le n.° $2(n + 1)$. Donc, en général, ſous un n.° $= \frac{m}{2} \pm n$ doit ſe trouver le numéro $\begin{cases} 2n - 1. \\ 2(n+1); \end{cases}$ d'où il ſuit qu'il ſera facile de compoſer la première ſuite, & par conſéquent de déterminer le nombre des permutations.

EXEMPLE.

Soit propoſé de trouver le nombre de fois qu'on doit mêler un jeu compoſé de 20 cartes, pour que les cartes ſe retrouvent dans le même ordre qu'elles étoient. On compoſera la ſuite dont le premier terme doit être 20 (nombre des cartes); n dans 20 étant $= 10$, le ſecond terme ſera $20 - 1 = 19$; dans 19, n étant $= 9$, le troiſième terme ſera $18 = 1 + 17$; dans 17, n étant $= 7$, le

quatrième terme ſera 13; de la même manière on trouvera que la ſuite qui doit, par le nombre de ſes termes, indiquer celui des permutations, ſera

20, 19, 17, 13, 5, 12, 3, 16, 11, 1;

le nombre des permutations demandées ſera donc 10.

C'eſt par cette méthode qu'on a calculé la table ſuivante.

Nombre des cartes.	Nombre des permutations.	Nombre des cartes.	Nombre des permutations.
2	2.	28	9.
4	3.	30	30.
6	6.	32	6.
8	4.	34	22.
10	6.	36	9.
12	10.	38	30.
14	14.	40	27.
16	5.	42	8.
18	18.	44	11.
20	10.	46	10.
22	12.	48	24.
24	21.	50	50.
26	26.	52	12.

Il faut obſerver qu'il y a tel nombre de cartes, d'où il réſulte qu'une certaine d'entre elles conſerve le même rang dans toutes les permutations : ſoient par exemple, écrits de ſuite le premier ordre, & les permutations ſucceſſives d'un jeu compoſé de dix cartes, on aura

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.
10. 8. 6. 4. 2. 1. 3. 5. 7. 9.
9. 5. 1. 4. 8. 10. 6. 2. 3. 7.
&c. &c.

On voit que la quatrième carte ne change pas d'ordre dans tous les battemens; cette propriété peut être d'un grand uſage dans le tour, parce que ſi la carte remarquée ſe trouve être la quatrième du jeu elle reſtera toujours la quatrième, apres un nombre quelconque de battemens (on ſuppoſe

toujours ici que le nombre total des cartes soit 10). Le nombre 10 n'est peut-être pas le seul qui jouisse de cet avantage; pour le découvrir, & reconnoître en même-temps tous ceux qui peuvent en jouir de même; soit m le nombre des cartes, & x le numéro de la carte fixe dans le jeu, & supposons 1.° que cette carte se trouve dans la première moitié du jeu, on aura $x = \frac{m}{2} - n$, & parce que le numéro inférieur doit être égal au supérieur, on aura

$$\frac{m}{2} - n = 2(n + 1);$$

d'où l'on tirera $x = \frac{m + 2}{3}$.

Comme le numéro de la carte ne peut pas être un nombre rompu, il suit que la propriété dont nous venons de parler aura lieu toutes les fois que le nombre m des cartes sera tel qu'en y ajoutant 2 il devienne multiple de 3, & le numéro de la carte sera égal au nombre de fois qu'il sera multiple. Or il est aisé de remarquer (les nombres impairs ne pouvant d'ailleurs pas convenir à m) que les différens nombres qu'on doit trouver pour m doivent être en progression arithmétique, ayant 6 pour différence; de plus, 4 est une des valeurs de m; car $\frac{4 + 2}{3} = 2$: donc, tous les termes de la suite

4. 10. 16. 22. 28 34. 40. 46.... &c.

dont la différence est 6, sont tels que si l'un d'entr'eux est le nombre des cartes d'un jeu, la carte dont le rang dans le jeu est exprimé par le terme correspondant de la suite

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16.... &c.

ne changera pas de place après un nombre quelconque de permutations.

Mais ceci suppose, comme nous l'avons dit, que la carte fixe doit se trouver dans la première moitié du jeu; voyons s'il seroit possible qu'elle se trouvât dans la seconde; x seroit pour lors $= \frac{m}{2} + n$, & parce que dans deux permutations

conſécutives les numéros de la carte doivent être égaux, on aura

$$\frac{m}{2} + n = 2n - 1;$$

ce qui donne

$$x = m + 1;$$

c'eſt-à-dire que ſi l'on ajoute une carte au jeu, ou que le nombre des cartes ſoit impair, cette dernière carte occupera toujours le dernier rang, après un nombre quelconque de battemens; ce que nous avions déjà remarqué.

Il eſt encore une autre ſingularité dans le jeu: ſoient écrites de ſuite toutes les permutations conſécutives d'un jeu de douze cartes,

		*					*				
1...	2...	3...	4...	5...	6...	7...	8...	9...	10...	11...	12.
12...	10...	8...	6...	4...	2...	1...	3...	5...	7...	9...	11.
11...	7...	3...	2...	6...	10...	12...	8...	4...	1...	5...	9.
9...	1...	8...	10...	2...	7...	11...	3...	6...	12...	4...	5.
&c.										&c.	

On remarquera que dans chaque permutation les cartes indiquées par 8 & 3 prennent alternativement la même place; c'eſt-à-dire la troiſième celle de la huitième, & la huitième celle de la troiſième. Cette propriété peut encore avoir ſon uſage dans le jeu; car ſi la carte remarquée ſe trouve être à la troiſième ou huitième place, elle ſe trouvera toujours, après un nombre quelconque de permutations, à la troiſième ou huitième place, & pour la reconnoître il ſuffira de ſavoir ſi le nombre des permutations eſt pair ou impair. Or, voici comment nous allons découvrir quels ſont avec 12 les nombres de cartes qui donneront la même ſingularité.

Soient x & x' les numéros des cartes qui ſe ſuccèdent alternativement, & ſuppoſons que de ces deux cartes l'une ſoit dans la première moitié du jeu, ce ſera x, & l'autre x' dans la ſeconde moitié. Nous aurons, en raiſonnant comme ci-devant, les deux équations

$$x' = 2\left(\frac{m}{2} - x + 1\right) = m - 2x + 2$$

$$x = 2\left(x' - \frac{m}{2}\right) - 1 = 2x' - m - 1;$$

d'où l'on tirera

$$x = \frac{m+3}{5},$$

&

$$x' = \frac{3m+4}{5};$$

mais les valeurs de x & x' qui indiquent les rangs des cartes qui se succèdent mutuellement ne peuvent pas être des nombres rompus; donc, toutes les fois que m sera tel que les quantités $\frac{m+3}{5}$ & $\frac{3m+4}{5}$ seront des nombres entiers; ces nombres indiqueront les rangs de deux cartes qui se succèderont dans chaque permutation. Or, tous les nombres compris dans la formule $\frac{m+3}{5}$ sont

2. 12. 22. 32. 42. 52... &c.

& tous les nombres compris dans la formule $\frac{3m+4}{5}$ sont

2. 12. 22. 32. 42. 52... &c.

Donc, tous les nombres compris dans cette suite jouissent de la même propriété, & les numéros des cartes qui se succèdent pour chaque nombre, & qui sont indiqués par les quotiens des quantités $m + 3$ & $3m + 4$, divisé par 5, sont exprimés dans la table suivante:

Nombre des cartes du jeu.	*Numéros des cartes qui se succèdent.*
2	1 & 2.
12	3 & 8.
22	5 & 14.
32	7 & 20.
42	9 & 26.
52	11 & 32.
&c.	&c. &c.

Il eſt aiſé de continuer cette Table, parce que les deux ſuites ſont en progreſſions arithmétiques, dont la différence eſt 2 pour la première & 6 pour la ſeconde; ce qui eſt évident par les formules.

Nous avons ſuppoſé que les cartes qui devoient ſe ſuccéder fuſſent dans chaque moitié du jeu; voyons s'il ſeroit poſſible qu'elles ſe trouvaſſent dans la même moitié, & 1.° dans la première, on auroit

$$x' = 2\left(\frac{m}{2} - x + 1\right) = m - 2x + 2,$$

&

$$x = 2\left(\frac{m}{2} - x' + 1\right) = m - 2x' + 2,$$

ce qui donneroit

$$x = \frac{m+2}{3},$$

&

$$x' = \frac{m+2}{3}, \text{ \& par conſéquent } x = x';$$

d'où il ſuit qu'il n'eſt pas poſſible que les deux cartes puiſſent être différentes dans la première moitié, mais que la même carte peut ſe ſuccéder ; ce que nous ſavions déjà. La formule $\frac{m+2}{3}$ eſt d'ailleurs la même que celle que nous avons déjà trouvée.

On trouveroit de même qu'il n'eſt pas poſſible que deux cartes priſes dans la ſeconde moitié du jeu, puiſſent ſe ſuccéder.

De même que nous avons trouvé qu'il y a certains nombres de cartes, tels qu'une d'entre elles occupe toujours le même rang, ou que deux ſe ſuccèdent toujours après un nombre quelconque de permutations, dans certains jeux trois cartes ſe ſuccèdent continuellement, de même 4, 5, 6, &c. Nous allons en donner un exemple. Soient écrits de ſuite les différentes permutations d'un jeu composé de 22 cartes:

1. 2.

* * * * * * * * * *

1... 2... 3... 4... 5... 6... 7...8... 9...10...11...12...13...14...15...16...17...18...19...20...21...22.
22...20...18...16...14...12...10...8... 6... 4... 2... 1... 3... 5... 7... 9...11...13...15...17...19...21.
21...17...13... 9... 5... 1... 4...8...12...16...20...22...18...14...10... 6... 2... 3... 7...11...15...19.
19...11... 3... 6...14...22...16...8... 1... 9...17...21...13... 5... 4...12...20...18...10... 2... 7...15.
15... 2...18...12... 5...21... 9...8...22... 6...11...19... 3...14...16... 1...17...13... 4...20...10... 7.
7...20...13... 1...14...19... 6...8...21...12... 2...15...18... 5... 9...22...11... 3...16...17... 4...10.
10...17... 3...22... 5...15...12...8...19... 1...20... 7...13...14... 6...21... 2...18... 9...11...16... 4.
&c. &c.

On remarquera 1.° que parce que le nombre 22 eſt compris dans chacune des ſuites

4. 10. 16. 22. 28. 34. 40. 46.... &c.

&

2. 12. 22. 32. 42. 52............. &c.

2.° Une des cartes, ſavoir la huitième, ne doit pas changer de place; 3.° les deux cartes 5 & 14 doivent ſe ſuccéder mutuellement, mais de plus, les trois cartes 3, 18 & 13 ſe ſuccèdent, il en eſt de même des quatre cartes 2, 20, 17, 11; & comme les cartes qui ſe ſuccèdent ne doivent pas entrer dans la première colonne, il eſt évident que leur nombre retranché de celui des cartes du jeu, doit indiquer le nombre des permutations qu'il faut faire pour que le jeu ſe reproduiſe dans le même ordre; il ne ſera donc pas inutile, pour l'intelligence de la matière, de trouver les nombres de cartes qui doivent donner ſucceſſivement 2, 3, 4, 5, &c. cartes qui ſe ſuccèdent mutuellement. Cherchons premièrement quels ſont ceux dans leſquels trois cartes ſe ſuccèdent. Pour cela ſoient écrits de ſuite les trois premiers ordres d'un nombre quelconque (22 par exemple)

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. | 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22.
22. 20. 18. 16. 14. 12. 10. 8. 6. 4. 2. | 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21.
21. 17. 13. 9. 5. 1. | 4. 8. 12. 16. 20. | 22. 18. 14. 10. 6. 2. | 3. 7. 11. 15. 19.

Cela poſé, cherchons comment les termes de la troiſième ſuite dépendent de ceux de la première; & pour y parvenir, remarquons qu'elle eſt elle-même compoſée de quatre ſuites de nombres, de deux de pairs & de deux d'impairs, & que ces

ſuites partielles ſont autant de progreſſions arithmétiques dont la différence eſt 4; on aura donc un terme quelconque de la première (qui commence par 21) le rang de ce terme étant n, ou le nombre qui lui répond dans le premier ordre étant n, par cette formule $m - 1 - 4(n - 1)$. De même on aura un terme quelconque de la ſecònde ſuite partielle, n étant le nombre qui lui répond, dans le premier ordre par cette formule

$$m - 2 - 4\left(\frac{m}{2} - n\right),$$

pour la troiſième ſuite partielle

$$m - 4\left(n - \frac{m}{2} - 1\right),$$

& pour la quatrième

$$m - 3 - 4(m - n).$$

Après le troiſième battement le jeu ſe trouve donc partagé en quatre caſes, compoſées chacune d'une des ſuites dont nous venons de parler: or, il peut arriver que l'un des rangs que doivent occuper continuellement les trois cartes qui ſe ſuccèdent, ſoit, ou ne ſoit pas compris dans la première caſe; s'il y eſt compris, dans leurs trois numéros il y en aura néceſſairement un pair & un impair, comme on peut le voir par l'inſpection des colonnes verticales; mais le troiſième pourra être pair ou impair. 1.° Suppoſons qu'il doive être impair, & ſoient x, x' & x'', ces trois numéros x & x'' feront donc des nombres impairs, & les trois arrangemens de ces numéros feront

$$x \quad x' \quad \& \quad x''$$
$$x' \quad x'' \quad \& \quad x$$
$$x'' \quad x \quad \& \quad x';$$

or le ſecond arrangement finiſſant par un impair, ne pourra ſe trouver que dans la quatrième caſe, & le troiſième ayant au milieu un nombre impair ne pourra être compris que dans la troiſième; on aura donc par les formules que nous venons de trouver les trois équations ſuivantes,

$$x'' = m - 1 - 4(x - 1) = m \quad - 4x + 3$$
$$x = m - 3 - 4(m - x') = 4x' - 3m - 3$$
$$\& \; x' = m - 4\left(x'' - \frac{m}{2} - 1\right) = 3m + 4 - 4x'';$$

d'où l'on tirera $x = \frac{7m + 35}{63} = \frac{m + 5}{9}$

$$x' = \frac{49m + 56}{63} = \frac{7m + 8}{9},$$

& $x'' = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{5m + 7}{9}.$

Donc (puisque m ne peut être qu'un nombre entier & pair, & que x, x' & x'' ne peuvent être que pairs) toutes les fois que m sera un nombre entier & pair, tel que les quantités $m + 5$, $7m + 8$, & $5m + 7$ soient multiples de 9, trois cartes se succéderont mutuellement, & deux de ces trois cartes occuperont dans le premier ordre un rang impair. Or les nombres compris dans les formules

$\left.\begin{matrix}\frac{m+5}{9} \\ \frac{5m+7}{9} \\ \frac{7m+8}{9}\end{matrix}\right\}$ sont $\left\{\begin{matrix}4.\ 13.\ 22.\ 31.\ 40.\ 49.\ 58.\ 67.\ 76.\ 85.\ 94.\ 103\ldots \&c. \\ 4.\ 13.\ 22.\ 31.\ 40.\ 49.\ 58.\ 67.\ldots\ldots\ldots \&c. \\ 4.\ 13.\ 22.\ 31.\ 40.\ldots\ldots\ldots\ldots \&c.\end{matrix}\right.$

Donc, tous les termes pairs de cette suite jouissent de la propriété demandée, & les quotiens des quantités $m + 5$, $5m + 7$, $7m + 8$, divisées par 9, indiquent les numéros des cartes qui se succèdent; c'est sur ce principe qu'a été calculée la Table suivante.

Nombre des cartes du jeu.	*Nombres des cartes qui se succèdent 3 à 3, (2 étant impairs).*		
4	1	3	4.
22	3	13	18.
40	5	23	32.
58	7	33	46.
76.	9	43	60.
94	11	53	74.
&c.	&c.	&c.	&c.

Il est facile de continuer cette Table, parce que les suites qui la composent sont des progressions arithmétiques, comme il est aisé de le reconnoître par l'inspection des formules.

Nous avons vu que des trois numéros qui se succèdent, il doit y en avoir nécessairement un pair & l'autre impair, mais que le troisième peut être pair ou impair; nous venons d'examiner le cas où ce troisième est impair, traitons maintenant celui où il est pair. Conservons toujours aux trois numéros leurs caractères x, x' & x'', (x & x' étant des nombres pairs) leurs trois arrangemens seront

$$\begin{array}{cccc} x & x' & \& & x'' \\ x' & x'' & \& & x \\ x'' & x & \& & x'; \end{array}$$

or, le second arrangement finissant par un nombre pair, mais ayant un impair dans le milieu, ne peut se trouver que dans la troisième case, & le troisième arrangement finissant par deux pairs, ne peut se trouver que dans la seconde case. On aura donc, par le moyen des formules que nous avons trouvées plus haut,

$$x'' = m - 1 - 4\ (x - 1) = m - 4x + 3,$$

$$x = m - 4\ (x' - \tfrac{m}{2} - 1) = 3m - 4x' + 4,$$

&

$$x' = m - 2 - 4\ (\tfrac{m}{2} - x'') = 4x'' - m - 2;$$

ce qui donne

$$x = \frac{m+4}{7},$$

$$x' = \frac{5m+6}{7},$$

&

$$x'' = \frac{3m+5}{7}.$$

Donc, lorsque m sera un nombre pair, tel que les quantités $m + 4$, $5m + 6$, $3m + 5$ seront des multiples de 7,

trois cartes se succèderont mutuellement, & deux d'entre elles seront paires. Les différentes valeurs de m & les numéros des cartes qui se succèdent sont compris dans la Table suivante.

Nombre des cartes du jeu.	*Numéros des cartes qui se succèdent (un seul devant être impair).*
10	2..... 5..... 8.
24	4.....11.....18.
38	6.....17.....28.
52	8.....23.....38.
66	10.....29.....48.
80	12.....35.....58.
94	14.....41.....68.
108	16.....47.....78.

Tout ce que nous avons dit jusqu'à présent sur la succession de trois cartes, suppose qu'un de leurs arrangemens soit compris dans la première case; voyons maintenant s'il est possible que le premier arrangement soit dans la seconde case. Que l'on jette les yeux sur les différentes permutations pour le nombre 22 que nous avons données plus haut, & l'on verra que l'arrangement compris dans la seconde case doit nécessairement comprendre deux nombres pairs, le troisième pouvant être pair ou impair. Dans le premier cas, il est facile de reconnoître à l'inspection, que pour que la succession eût lieu, il faudroit que les trois arrangemens se trouvassent dans la même case, puisqu'il n'y a qu'elle qui puisse avoir trois nombres pairs dans la même colonne verticale, ce qui donneroit $x = x' = x''$.

Dans le second cas, où un des numéros est impair, il faut observer qu'aucun de leurs arrangemens ne peut être compris dans la quatrième case, puisque toutes les colonnes verticales contiennent deux impairs. Il faudroit donc que deux, au moins, se trouvassent dans la seconde ou la troisième case, ce qui donneroit deux des quantités x, x' & x'' égales; or, deux de ces quantités (par la nature de la chose) ne peuvent pas être égales sans que la troisième ne le soit aussi, ce qui est impossible, puisqu'un nombre positif pair ne peut pas égaler un impair.

COROLLAIRE.

Il suit de-là que la carte qui se succède continuellement est toujours renfermée dans la seconde des quatre cases dans lesquelles le jeu se trouve partagé après la seconde permutation.

Nous allons trouver, de la même manière, les nombres de cartes qui permettront que quatre d'entre elles se succèdent; pour cela, jetons les yeux sur les quatre premiers ordres d'un jeu composé de 22 cartes;

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
21	17	13	9	5	1	4	8	12	16	20	22	18	14	10	6	2	3	7	11	15	19
19	11	3	6	14	22	16	8	1	9	17	21	13	5	4	12	20	18	10	2	7	15

& remarquons 1.° que le quatrième ordre se trouve composé de huit parties, qui sont chacune une progression arithmétique, dont la différence est 8; 2.° que les plus grands termes des progressions quatrième & cinquième seront constamment pour toutes les valeurs de m, $m - 5$ pour la première, & $m - 1$ pour la seconde; 3.° que lorsque la valeur de m ne sera pas de cette forme $(4p)$ les plus grands termes des seconde, troisième, sixième & septième progressions seront (par ordre)

$$m, m - 6, m - 2 \text{ \& } m - 4;$$

mais que lorsque l'on aura $m = 4p$, ces termes seront

$$m - 4, m - 2, m - 6 \text{ \& } m;$$

4.° que les plus grands termes des deux progressions extrêmes seront $m - 3$ pour la première, & $m - 7$ pour la dernière; d'où nous conclurons que la valeur d'un terme quelconque de la quatrième ligne, n étant celui qui lui répond dans la première, sera, s'il se trouve dans la première suite (ou case).

Pour la 1.ere case $m - 3 - 8\,(n - 1)$

Pour la 2.e ..... $m - 8\left(\frac{m+2}{4} - n\right)$ (& si $m = 4p$) $= m - 4 - 8\left(\frac{m}{4} - n\right)$

Pour la 3.e .....$m - 6 - 8\left(\frac{m+2}{4} + n - 1\right)$... $= m - 2 - 8\left(n - \frac{m}{4} - 1\right)$

Pour la 4.ᵉ case $m - 5 - 8(\frac{m}{2} - n)$

Pour la 5.ᵉ... $m - 1 - 8(n - \frac{m}{2} - 1)$

Pour la 6.ᵉ... $m - 2 - 8(\frac{3(m+2)}{4} - n - 1)$ (& si $m = 4p$) $= m - 6 - 8(\frac{3m}{4} - n)$

Pour la 7.ᵉ... $m - 4 - 8(n - \frac{3(m+2)}{4})$............ $= m - 8(n - \frac{3m}{4} - 1)$

Et pour la 8.ᵉ $m - 7 = 8(m - n)$.

Cela posé, supposons que le premier rang que doivent occuper les quatre cartes qui se succèdent, soit compris dans la première case, les numéros des deux dernières de ce rang seront nécessairement impairs, celui de la seconde sera pair, il n'y aura que le premier qui pourra être pair ou impair. 1.ᵉ Supposons qu'il soit pair, & représentons les quatre numéros par x, x', x'', & x''', les quatre arrangemens seront

$$\begin{matrix} x & x' & x'' & x''' \\ x' & x'' & x''' & x \\ x'' & x''' & x & x' \\ x''' & x & x' & x'' \end{matrix} \quad (x \text{ \& } x' \text{ sont pairs}).$$

L'on voit aisément que le second arrangement ne peut avoir lieu que dans la septième case, le troisième dans la sixième case, & le quatrième dans la quatrième case; ce qui donnera les quatre équations suivantes, si $m = 4p$; c'est-à-dire si m est multiple de 4.

$$x''' = m - 3 - 8(x - 1)...... = m - 8x + 5$$

$$x = m - 8(x' - \frac{3m}{4} - 1).... = 7m - 8x' + 8$$

&

$$x' = m - 6 - 8(\frac{3m}{4} - x'' - 0) = 8x'' - 6 - 5m$$

$$x'' = m - 5 - 8(\frac{m}{2} - x''')...... = 8x''' - 5 - 3m,$$

& si m n'est pas $= 4p$,

$$x''' = m - 3 - 8\,(x - 1) \ldots\ldots\ldots\ldots = m - 8x + 5$$

$$x = m - 4 - 8\left(x' - \frac{3(m+2)}{4}\right) \ldots = 7m - 8x' + 8$$

$$x' = m - 2 - 8\left(\frac{3(m+2)}{4} - x'' - 1\right) = 8x'' - 5m - 6$$

$$x'' = m - 5 - 8\left(\frac{m}{2} - x'''\right) \ldots\ldots\ldots = 8x''' - 5 - 3m,$$

ce qui donne, pour les deux cas,

$$x = \frac{m + 8}{15}$$

$$x' = \frac{13m + 14}{15}$$

$$x'' = \frac{11m + 13}{15}$$

&

$$x''' = \frac{7m + 11}{15};$$

Donc, quel que ſoit le nombre des cartes, pourvu qu'il ſoit pair, & de la forme $\frac{m+8}{15}$, quatre cartes ſe ſuccéderont, elles auront un de leurs rangs dans la première caſe, & deux de leurs numéros ſeront impairs.

Nombre des cartes.	Numéros des cartes qui ſe ſuccèdent 4 à 4.
22	2...11... 17... 20.
52	4...25... 39... 46.
82	6...39... 61... 72.
112	8...53... 83... 98.
142	10...67...105...124.
172	12...81...127...156.
202	14...95...149...176.

2.° Suppoſons que la carte dont le numéro pouvoit être pair ou impair, & que nous avons déjà ſuppoſé pair, ſoit, ou doive être impair, alors, des quatre nombres x, x', x'', x''', il n'y aura que x' de pair; le ſecond arrangement qui commence par un pair ne pourra avoir lieu que dans la huitième caſe; la troiſième, qui finit par un nombre pair, ne pourra être

être que dans la septième case; enfin le quatrième arrangement sera nécessairement dans la cinquième case. On aura donc les quatre équations suivantes,

$$x''' = m - 3 - 8(x - 1) \ldots\ldots = m - 8x + 5$$

$$x = m - 7 - 8(m - x) \ldots\ldots = 8x' - 7m - 7$$

$$x' = m - 8\left(x'' - \frac{3m}{4} - 1\right) \ldots = 7m + 8 - 8x''$$

$$x'' = m - 1 - 8\left(x''' - \frac{m}{2} - 1\right) = 5m - 8x''' + 7.$$

(de même que dans le cas précédent, les différentes espèces de parité ne changent rien à ces équations) & l'on aura

$$x = \frac{m + 9}{17}$$

$$x''' = \frac{9m + 13}{17}$$

$$x'' = \frac{13m + 15}{17}$$

$$x' = \frac{15m + 16}{17},$$

Donc, tous les nombres pairs de la forme $\frac{m+9}{17}$ donneront des successions de quatre cartes, le numéro de la première étant impair.

Nombre des cartes.	*Numéros des cartes qui se succèdent 4 à 4.*
8	1 ... 5 ... 7 ... 8.
42	3 ... 23 ... 33 ... 38.
76	5 ... 41 ... 59 ... 68.
110	7 ... 59 ... 85 ... 98.
144	9 ... 77 ... 111 ... 128.
178	11 ... 95 ... 137 ... 158.
212	13 ... 113 ... 163 ... 188.

Tout ce que nous avons dit jusqu'à présent sur les successions quatre à quatre, suppose qu'un des rangs ou colonnes soit dans la première des huit cases; supposons maintenant qu'il n'y en ait pas dans la première, & que ce soit dans la seconde, on remarquera que le second & le quatrième de la

colonne verticale feront néceffairement pairs, le troifième impair; mais le premier pourra être ou l'un ou l'autre. Suppofons 1.° qu'il doive être pair, il y aura trois nombres pairs, & x'' fera feul impair; par conféquent le fecond arrangement ne pourra avoir lieu que dans la fixième cafe, le troifième dans la troifième, & le quatrième dans la quatrième cafe; on aura donc

$$x''' = m - 4 - 8\left(\frac{m}{4} - x\right) \ldots = 8x - m - 4$$

$$x = m - 6 - 8\left(\frac{3m}{4} - x'\right) \ldots = 8x' - 5m - 6$$

$$x' = m - 2 - 8\left(x'' - \frac{m}{4} - 1\right) = 3m + 6 - 8x''$$

$$x'' = m - 5 - 8\left(\frac{m}{2} - x'''\right) \ldots = 8x''' - 3m - 5,$$

ce qui donne $x = \frac{3m + 10}{17}$

$$x' = \frac{11m + 14}{17}$$

& $x'' = \frac{5m + 11}{17}$;

$$x''' = \frac{7m + 12}{17};$$

d'où l'on conclura que lorfque m fera de telle forme, que $\frac{3m + 10}{17}$ fera un nombre entier, quatre cartes, dont la première fera paire, fe fuccèderont, fans qu'aucun de leurs rangs fe trouve dans la première huitième partie du jeu. Les nombres qui fatisfont à cette condition font dans cette Table.

Nombre des cartes.	*Numéros des cartes qui fe fuccèdent 4 à 4.*
8	2 ... 3 ... 4 ... 6.
42	8 ... 13 ... 18 ... 28.
76	14 ... 23 ... 32 ... 50.
110	20 ... 33 ... 46 ... 72.
144	26 ... 43 ... 66 ... 94.
178	32 ... 53 ... 74 ... 116.
&c.	&c. ... &c. ... &c. ... &c.

De ce que cette ſuite eſt la même que la précédente, on peut conclure que toutes les fois qu'un nombre de cartes ſera tel, qu'étant mêlées comme nous l'avons indiqué, quatre d'entre elles ſe ſuccéderont, à commencer par un nombre impair, compris dans la première huitième partie du jeu, quatre autres différentes ſe ſuccèderont, en commençant par un nombre pair dans la ſeconde huitième partie du jeu.

En faiſant de ſemblables raiſonnemens, on connoîtra, 1.° qu'il n'eſt pas poſſible que quatre cartes ſe ſuccèdent, de manière que leur premier rang ſoit impair & dans la ſeconde huitième partie du jeu; 2.° qu'il ne ſe peut pas faire de même que quatre cartes ſe ſuccèdent, de manière que leur premier rang ne ſoit pas dans le premier quart du jeu.

En continuant ces opérations, on trouveroit des formules pour déterminer les nombres des cartes dans leſquelles cinq, ſix, ſept & un plus grand nombre de cartes ſe ſuccèdent.

Il ſuit, de ce que nous avons dit ſur la ſucceſſion mutuelle des mêmes cartes, d'autres méthodes de déterminer le nombre de permutations qui convient à un jeu, pour qu'il ſe reproduiſe dans le même ordre.

1.° Il eſt évident que toutes les cartes qui ſe ſuccèdent dans un rang qui ne commence pas par 1, ne peuvent pas ſe trouver dans la première colonne verticale; donc, ſi du nombre des cartes du jeu on retranche la ſomme des nombres de cartes qui ſe ſuccèdent, on aura le nombre de permutations demandées.

EXEMPLE.

Soit propoſé le nombre 22, en jetant les yeux ſur les Tables que nous venons de donner, on remarquera que 1, 2, 3 & 4 cartes ſe ſuccèdent; comme la ſomme de ces nombres eſt 10, il ſuit que 22 — 10, ou 12, ſera le nombre des permutations.

2.° Il n'eſt pas moins clair que lorſque deux cartes doivent ſe ſuccéder, le nombre des permutations qu'on doit faire pour que le jeu ſe reproduiſe, doit être pair ou multiple

de 2, lorſque le nombre des cartes ſucceſſives eſt 3, celui des permutations doit être multiple de 3, & en général, le nombre des permutations doit être multiple de tous les nombres de cartes qui ſe ſuccèdent; avec cette différence cependant, qu'il peut être un multiple quelconque; c'eſt-à-dire, pair ou impair, des nombres pairs de cartes qui ſe ſuccèdent, & qu'il ne peut être que multiple pair des nombres impairs plus grands que l'unité (cela eſt trop clair pour le démontrer). Donc, pour déterminer le nombre des permutations, il faudra choiſir un nombre qui ſoit en même-temps multiple quelconque des nombres pairs de cartes ſucceſſives, & multiple pair des nombres impairs.

Soit propoſé, par exemple, le nombre 22, les nombres de cartes ſucceſſives dans ce jeu, ſont 1, 2, 3 & 4; comme 4 eſt multiple de 2 & de 1, on n'a à conſidérer que les nombres 3 ou 4, le nombre des permutations eſt donc le nombre moindre que 22, multiple de 4, & pairement multiple de 3; il n'y a que 12 qui ſoit dans ce cas-là; donc 12 eſt le nombre des permutations.

Quoique ces méthodes ſoient moins abrégées que celle que nous avons donnée dans le commencement; elles peuvent néanmoins jeter un jour ſur cette matière, & ſervir à concevoir les raiſons des inégalités qu'on obſerve dans le nombre des permutations.



OBSERVATION
ET
CALCUL DE L'OPPOSITION DE JUPITER,
du 19 Août 1772,
FAITE À ROUEN,

Par M. le Chevalier d'ANGOS, Officier au régiment de Navarre, & Membre de l'Académie des Sciences de Rouen.

LE 17 Août, je comparai Jupiter avec une étoile de sixième grandeur, qui est la dernière de la page 27 du Catalogue de Séligny, par le moyen d'un réticule rhomboïde, fixé dans une lunette achromatique de Dollond, de six pieds de foyer; le 21 Août je répétai les mêmes observations, & je vais avoir l'honneur d'en présenter à l'Académie les détails & les résultats, qui fixent l'instant de l'opposition de Jupiter au Soleil, pour le 19 Août, à $18^h\ 47'\ 56'',6$.

Le 18 Août, je pris avec un quart-de-cercle d'un pied de rayon, dix-neuf hauteurs correspondantes du Soleil, & le 19 Août j'en pris vingt-une; je trouvai que ma pendule étoit en retard de quelques secondes sur le temps moyen, & qu'elle avançoit de $4'',4$; j'ai corrigé en conséquence mes observations.

La longitude moyenne de l'Étoile, pour 1755, prise dans le Catalogue, est $10^s\ 28^d\ 1'\ 45'',0$; la latitude, $1^d\ 59'\ 2'',0$ *A;* en calculant par les méthodes connues le changement produit dans sa position par la précession des Équinoxes, la nutation & l'aberration, l'on trouve pour la longitude apparente de l'Étoile, le 17 Août 1772, $10^s\ 28^d\ 16'\ 59'',9$, & pour la latitude apparente $1^d\ 59'\ 8'',97$, d'où je déduis (par la Trigonométrie sphérique) son ascension

droite apparente = 331^d 9′ 27″,7, & sa déclinaison apparente = 13^d 56′ 36″,5 *A*.

La longitude apparente de l'Étoile, calculée de même pour le 21 Août = 10^s 28^d 17′ 0″,4; la latitude apparente = 1^d 59′ 2″,01; d'où je déduis l'ascension droite apparente du 21 = 331^d 9′ 37″,3, & la déclinaison apparente = 13^d 56′ 36″,8 *A*.

Par un milieu pris entre plusieurs observations le 17 Août à 11^d 39′ 19″,4, temps moyen à Paris, Jupiter (dans la partie nord du réticule) précédoit l'Étoile (dans la partie Sud du réticule) de 2′ 14″,1 de temps = 33′ 37″,1 de degrés.

Ascension droite apparente de l'Étoile le 17 Août	331^d 9′ 27″,7.
Différence d'ascension droite entre Jupiter & l'Étoile.	− 33′ 37″,1.
Ascension droite de Jupiter................	330^d 35′ 50″,6.

La somme des durées de Jupiter & de l'Étoile dans le réticule = 2′ 28″ de temps = 37′ de degrés.

Logarithme..............................	3,3463530.
Log. cos. décl. moyenne entre Jup. & l'Ét. 13^d 38′ 48″	9,9875631.
Logarithme de 35′ 57″,3..................	3,3339161.
Grand axe du réticule en temps 5′ 47″,4 = en degrés.	1^d 11′ 51″,0.
Différence de déclinaison..................	− 35′ 53″,7.
Déclinaison apparente de l'Étoile.............	13^d 56′ 36″,5.
Déclinaison apparente de Jupiter.............	13^d 20′ 42″,8.

Par le moyen de cette ascension droite & de cette déclinaison de Jupiter, je trouve sa longitude apparente = 327^d 58′ 48″,0, & sa latitude apparente = 1^d 14′ 1″,0.

Le 21 Août à 11^h 8′ 45″, temps moyen à Paris,

Jupiter, sur le fil, précédoit l'Étoile de 4′ 13″,8 de temps = en degrés.....................	1^d 3′ 37″,6.
Ascension droite apparente de l'Étoile le 21.....	331^d 9′ 27″,3.
Ascension droite de Jupiter..................	330^d 5′ 49″,7.

Différence des durées 1′ 38″,9 = en degrés 24′ 43″,5.

Logarithme		3,1712876.
Logarithme cosin. déclin. moyenne	13^d 43′ 18″,4.	9,9874245.
Logarithme différence de déclinaison.	24′ 1″,2.	3,1587121.
Déclinaison apparente de l'Étoile.	13^d 56′ 36″,8.	
Déclinaison apparente de Jupiter.	13^d 32′ 35″,6.	

d'où je déduis la longitude apparente de Jupiter le 21 Août $= 327^d\ 27'\ 18'',8$, & sa latitude apparente $= 1^d\ 15'\ 2'',5$ *A*.

La long. ap. de Jupiter le 17 à 11^h 39′ 19″,4 étoit	10^f 27^d 58′ 48″,0.
Celle du Soleil pour le même instant	4^f 25^d 27′ 28″,4.
Donc Jupiter étoit plus avancé que le point opposé au Soleil, de	2^d 31′ 19″,4.

Longitude appar. de Jupiter le	17^j 11^h 39′ 19″,4.	327^d 58′ 48″,0.	du Soleil	4^f 25^d 27′ 28″,4.
	21 11 8 45 ,0.	327 27 17 ,8.		4 29 17 38 ,3.
Diff. des temps & des longit.	3^j 23^h 29′ 25″,6	0^d 31′ 30″,2		0^f 3^d 50′ 9″,9.

Donc, 3^j 23^h 29′ 25″,6, ou 3^j,978757 : 3^d 50′ 9″,9 :: 1^j : 57′ 50″,9, mouvement diurne du Soleil.

Et 3^j,978757 : 31′ 30″,2 :: 1^j · 7′ 55″,8, mouvement diurne de Jupiter.

Donc le mouvement relatif en 24 heures $=$ 1^d 5′ 46″,7.

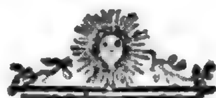
Donc, enfin 1^d 5′ 46″,7 : 86400″ :: 2^d 31′ 19″,6 : 2^j 7^h 12′ 5″.

Temps moyen de l'obs. du 17, 11^h 39′ 19″,4 =	17^j 11^h 35′ 56″,6 de temps vrai.
	+ 2 7 12′ 5 ,0.
Temps vrai de l'oppos. vraie de Jupiter à Paris.	19^f 18^h 47′ 56″,6.

Si je calcule maintenant par le mouvement diurne de chacun des deux astres leurs longitudes apparentes, pour l'instant de l'opposition, partant des longitudes déterminées pour l'instant de l'observation du 17 Août, je trouve,

Pour Jupiter	10^f 27^d 40′ 34″,9.
Pour le Soleil	4 27 40 34 ,9.

Ce qui s'accorde parfaitement, & sert de vérification à ces derniers calculs.



OBSERVATIONS ET CALCULS DES OPPOSITIONS DE MARS ET DE SATURNE DE 1773, FAITES À GENÈVE.

Par M. MALLET, Correſpondant de l'Académie.

L'OBSERVATOIRE que je deſirois de faire conſtruire déjà depuis pluſieurs années, ayant enfin été achevé & en état de recevoir mes inſtrumens au commencement de cette année, le premier uſage que j'en ai fait, a été pour obſerver les Oppoſitions de Mars & de Saturne qui ont eu lieu à la fin des mois de Janvier & de Février: c'eſt le réſultat de ces premiers travaux que j'ai l'honneur de préſenter à l'Académie, comme un foible témoignage de mon dévouement & du deſir que j'ai de mériter ſon approbation.

Les inſtrumens dont je me ſuis ſervi, ſont 1.° un inſtrument des paſſages dont la lunette achromatique a 4 *pieds*; les ſupports de l'axe ſont fixés à deux très-groſſes pierres de roche, aſſiſes ſur de bons fondemens, & dont la maſſe en aſſure la ſolidité: cette lunette a la commodité de pouvoir parcourir tout le Méridien du nord au midi, & on la place facilement à la hauteur convenable au moyen d'un index & d'un demi-cercle diviſé, où un nonius fait diſtinguer un angle de 3 minutes.

2.° Un quart-de-cercle anglois de 2 pieds & demi de rayon, fait par Siſſon, diviſé de 10 en 10 minutes; la lunette achromatique, mobile autour du centre, porte un nonnius qui ſubdiviſe juſqu'à 30 ſecondes, & une vis extérieure, garnie d'un index & d'un cadran, fait apercevoir très-ſenſiblement ſur le limbe un mouvement de la lunette de 3 à 4 ſecondes. Pluſieurs vérifications m'ayant convaincu de quelques

quelques erreurs dans les divisions du nonius, j'ai renoncé totalement à en faire usage, & je me sers uniquement de la vis, après m'être bien assuré de son exactitude. Quoique ce quart-de-cercle soit fait pour être mobile, & soit muni de tout ce qui peut le rendre extrêmement commode pour prendre des hauteurs correspondantes, je m'en suis servi cependant pour prendre les hauteurs méridiennes, en attendant un mural qui n'est pas encore placé: je mets facilement le limbe dans le plan du Méridien, au moyen d'une méridienne filaire très-exacte, & chaque jour d'observation j'ai eu soin de revérifier sa position.

3.° Une pendule de Lepaute, avec la verge composée; elle est réglée de temps en temps par les hauteurs correspondantes du Soleil, & je me suis assuré de la régularité de sa marche par l'observation que je fais du passage du Soleil à la lunette méridienne toutes les fois que le temps le permet: je tiens encore une note exacte des degrés d'un thermomètre placé dans la caisse de la pendule, pour comparer sa marche à celle de l'horloge.

Mars a été observé les 20, 21 & 26 Janvier, & comparé aux étoiles α, β, δ, ζ des Gemeaux & γ de l'Écrevisse. Ce que j'ai appelé *Hauteurs méridiennes non corrigées,* sont les hauteurs données immédiatement par le quart-de-cercle, sans égard à l'erreur de l'instrument ni aux réfractions.

Saturne a été comparé le 27 Février, le 1.er & le 2 Mars, aux étoiles α, β de l'Écrevisse, Régulus, ο & ρ du Lion. Les ascensions droites apparentes des Étoiles ont été prises par un milieu entre celles de M. de la Caille & celles de M. Bradley.

J'ai eu pour aide dans ces observations M. Marc Pictet, jeune homme plein de zèle & de talens pour l'Astronomie.

OBSERVATIONS pour

La pendule retarde de 11",6 par jour sur le temps moyen, & le

1773. Janv.	NOMS des ASTRES	PASSAGE à la Lunette mérid. en temps de la Pendule.	DIFFÉR. des Passages, réduites en T. moy.	DIFFÉRENCES en Ascension dr.	ASCENSIONS droites des Étoiles.	ASCENSIONS droites appar. de Mars, observées.
		H. M. S.	*H. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*
20.	♂	12. 14. 40,5 }	1. 26. 19,2	21. 38. 20,8	102. 39. 53,8	124. 18. 14,6
	ζ ♊	10. 48. 22,0 }				
	δ ♊ ...	11. 4. 15,0	1. 10. 26,1	17. 39. 25,6	106. 38. 41,8	124. 18. 7,4
	α ♊ ...	11. 17. 44,8	0. 56. 56,2	14. 16. 23,3	110. 1. 48,6	124. 18. 11,9
	β ♊ ...	11. 29. 1,5	0. 45. 39,4	11. 26. 43,6	112. 51. 41,5	124. 18. 25,1
21.	♂	12. 8. 51,5 }	1. 24. 37,7	21. 12. 54,0	*Voyez ci-dessus.*	123. 52. 47,8
	ζ ♊	10. 44. 14,5 }				
	δ ♊ ...	11. 0. 7,0	1. 8. 45,1	17. 14. 6,3	*Idem*.........	123. 52. 48,1
	α ♊ ...	11. 13. 37,2	0. 55. 14,8	13. 50. 58,6	*Idem*.........	123. 52. 47,2
	β ♊ ...	11. 24. 54,0	0. 43. 57,9	11. 1. 16,9	*Idem*.........	123. 52. 58,4
	γ ♋ ...	12. 23. 26,5	0. 14. 35,1	3. 39. 21,9	127. 32. 19,1	123. 52. 57,2
26.	♂	11. 40. 6,0 }	1. 16. 16,6	19. 7. 16,7	*Voyez ci-dessus.*	121. 47. 10,5
	ζ ♊	10. 23. 48,0 }				
	δ ♊ ...	10. 39. 41,0	1. 0. 23,9	15. 8. 27,5	*Idem*.........	121. 47. 9,3
	α ♊ ...	10. 53. 11,5	0. 46. 53,6	11. 45. 19,2	*Idem*.........	121. 47. 7,8
	β ♊ ...	11. 4. 28,2	0. 35. 37,2	8. 55. 45,5	*Idem*.........	121. 47. 27,0

Résultat des Observations

	TEMPS vrai à Genève.	TEMPS vrai à Paris.	TEMPS moyen à Paris.	ASCENSION dr. apparente de Mars, observée.	DÉCLIN. bor. appar. de Mars, observée.	LONGITUDE géocent. appar. de Mars, observée.
	H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	S. D. M. S.
Janv. 20	12. 2. 51,4	11. 48. 11,4	12. 0. 1,0	124. 18. 15	24. 16. 26	IV. 1. 1. 3
21	11. 56. 53,3	11. 42. 13,3	11. 54. 18,3	123. 52. 52	24. 22. 2	IV. 0. 37. 10
26	11. 27. 48,0	11. 13. 8,0	11. 26. 22,6	121. 47. 14	24. 47. 43	III. 28. 39. 45
20	6. 15. 40,0	6. 1. 0,0	6. 12. 45,0	Longitude vraie de Mars en opposition Latitude boréale géocentrique.........		

l'Opposition de MARS.

20 Janvier à midi, elle est en avance de 11′ 46″,6 sur le temps vrai.

NOMS des ASTRES.	HAUTEURS méridiennes non corrigées.	DIFFÉRENCES	DIFFÉRENCES des Haut. corrigées de la Réfraction & de la Parallaxe	DÉCLINAISON boréale appar. des Étoiles, tirée de M. de la Caille	DÉCLINAISON apparente de Mars, observée.
	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.
♂	68. 29. 21,9	1. 53. 34,6	1. 53. 42,2	22. 22. 34,7	24. 16. 16,9
δ ♊	66. 35. 47,3				
α ♊	76. 34. 33,0	8. 5. 11,1	8. 5. 16,4	32. 21. 50,2	24. 16. 33,8
β ♊	72. 46. 7,3	4. 16. 45,4	4. 16. 45,0	28. 33. 13,8	24. 16. 27,9
♂	68. 34. 59,1	3. 28. 58,8	3. 29. 8,8	20. 52. 56,2	24. 22. 5,0
ζ ♊	65. 6. 0,3				
δ ♊	66. 35. 43,3	1. 59. 15,8	1. 59. 23,6	*Voyez ci-dessus.*	24. 21. 58,3
α ♊	76. 34. 39,1	7. 59. 40,0	7. 59. 45,1	*Idem*	24. 22. 5,1
β ♊	72. 46. 20,4	4. 11. 21,3	4. 11. 21,6	*Idem*	24. 21. 52,2
γ ♋	66. 29. 3,8	2. 5. 55,3	2. 6. 3,3	22. 16. 5,8	24. 22. 9,1
♂	69. 0. 35,0	3. 54. 37,8	3. 54. 48,4	*Voyez ci-dessus*	24. 47. 44,6
ζ ♊	65. 5. 57,2				
δ ♊	66. 35. 44,2	2. 24. 50,8	2. 24. 59,2	*Idem*	24. 47. 33,9
α ♊	76. 34. 28,9	7. 33. 53,9	7. 33. 58,4	*Idem*	24. 47. 51,8
β ♊	72. 46. 14,3	3. 45. 39,3	3. 45. 39,0	*Idem*	24. 47. 34,8
γ ♋	66. 28. 59,8	2. 31. 35,2	2. 31. 43,8	*Idem*	24. 47. 49,6

de MARS.

LONGITUDE géocentr. appar. calculée par les Tables de Halley.	ERREUR des Tabl. en longitude	LATITUDE géocentrique observée.	LATITUDE géocentrique calculée suivant les T. de Halley	ERREUR des Tabl. en latitude.	VRAI LIEU du Soleil, par les Tables de la Caille.	ERREUR des Tables de Cassini en longitude.
S. D. M. S.	M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	S. H. M. S.	M. S.
IV. 1. 1. 0	—0. 3	4. 25. 47	4. 25. 1	—0. 46	X. 1. 21. 47,0	
IV. 0. 37. 1	—0. 9	4. 26. 3	4. 25. 22	—0. 41	X. 2. 22. 35,0	—17. 20
III. 28. 39. 27	—0. 16	4. 26. 23	4. 25. 53	—0. 30	X. 7. 26. 32,0	

IV. 1. 7. 4 calculée sur les Tables de Halley, corrigées de l'erreur moyenne 9″.

4. 25. 20 .... 39.

OBSERVATIONS pour

On a raccourci la verge de la pendule; elle avance chaque jour de 2",6 sur le temps.

1773. Févr.	NOMS des ASTRES	PASSAGE à la Lunette mérid. en temps de la Pendule.	DIFFÉR. des Passages, réduites en T. moy.	DIFFÉRENCES en Ascension dr.	ASCENSIONS droites des Étoiles.	ASCENSIONS droites app. de Saturne, observées.
		H. M. S.	*H. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*
27.	♄	12. 16. 46,0	2. 43. 37,5	41. 1. 6,0	121. 3. 21,0	162. 4. 27,0
	β ♋ ...	9. 33. 8,2				
	α ♋....	10. 14. 53,2	2. 1. 52,6	30. 33. 10,2	131. 31. 19,4	162. 4. 29,6
	ο ♌....	10. 57. 44,0	1. 19. 1,9	19. 48. 43,6	142. 15. 48,3	162. 4. 31,9
	Régulus.	11. 24. 54,2	0. 51. 51,7	13. 0. 3,6	149. 4. 27,7	162. 4. 31,3
Mars. 1.	♄.....	12. 8. 24,0	1. 18. 25,9	19. 39. 41,6	*Voyez ci-dessus.*	161. 55. 29,9
	ο ♌....	10. 49. 58,0				
	Régulus.	11. 17. 8,5	0. 51. 15,4	12. 50. 57,6	*Idem*	161. 55. 25,3
	ρ ♌....	11. 41. 39,2	0. 26. 44,8	6. 42. 17,8	155. 13. 3,7	161. 55. 21,5
2.	♄.....	12. 4. 12,5	2. 42. 43,5	40. 47. 33,3	*Voyez ci-dessus.*	161. 50. 54,3
	β ♋. .	9. 21. 28,7				
	α ♋...	10. 3. 13,5	2. 0. 58,8	30. 19. 40,4	*Idem*	161. 50. 59,8
	ο ♌....	10. 46. 4,7	1. 18. 7,7	19. 35. 7,8	*Idem*.........	161. 50. 56,1
	Régulus.	11. 13. 15,0	0. 50. 57,4	12. 46. 26,3	*Idem*.........	161. 50. 54,0
	ρ ♌....	11. 37. 45,2	0. 26. 27,3	6. 37. 54,6	*Idem*.........	161. 50. 58,3

Résultat des Observations

	TEMPS vrai à Genève.	TEMPS vrai à Paris.	TEMPS moyen à Paris.	ASCENSION dr. apparente de Saturne, observée.	DÉCLIN. bor. app. de Saturne, observée.	LONGITUDE géocentr. app. de Saturne, observée.
	H. M. S.	*H. M. S.*	*H. M. S.*	*D. M. S*	*D. M. S.*	*S. D M. S.*
Févr. 27	12. 3. 1,0	11. 48. 21,0	12. 1. 12,9	162. 4. 30	9. 5.. 26	V. 9. 43. 25
Mars 1	11. 54. 57,9	11. 40. 17,9	11. 52. 45,9	161. 55. 26	9. 55. 3	V. 9. 33. 46
2	11. 50. 56,7	11. 36. 16,7	11. 48. 31,9	161. 50. 56	9. 56. 50	V. 9. 28. 56
Févr. 27	11. 0. 48,0	10. 46. 8,0	10. 59. 0,0	Longitude vraie de Saturne en opposition Latitude boréale géocentrique..........		

l'Opposition de SATURNE.

moyen, & le 27 Février à midi, elle est en avance de 13′ 49″,5 sur le temps vrai.

NOMS des ASTRES.	HAUTEURS méridiennes non corrigées.	DIFFÉRENCES	DIFFÉRENCES des Haut. corrigées de la Réfraction & de la Parallaxe	DÉCLINAISON boréale appar. des Etoiles, tirée de M. de la Caille	DÉCLINAISON apparente de Saturne, observée.
	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.
♄	54. 4. 31,0	0. 0. 35,0	0. 0. 35,0	9. 51. 57,4	9. 51. 22,4
β♋	54. 5. 6,0				
α♋	56. 56. 21,3	2. 51. 50,3	2. 51. 55,2	12. 43. 17,5	9. 51. 22,3
ο♌	55. 7. 49,7	1. 3. 18,7	1. 3. 20,4	10. 54. 44,5	9. 51. 24,1
Régulus	57. 16. 57,4	3. 12. 26,4	3. 12. 31,8	13. 4. 2,5	9. 51. 30,7
ρ♌	54. 41. 1,2	0. 36. 30,2	0. 36. 31,3	10. 28. 0,7	9. 51. 29,4
♄	54. 8. 9,7	0. 59. 43,0	0. 59. 44,6	*Voyez ci-dessus.*	9. 55. 0,0
ο♌	55. 7. 52,7				
Régulus	57. 17. 1,4	3. 8. 51,7	3. 8. 57,0	*Idem.*	9. 55. 5,5
ρ♌	54. 41. 5,2	0. 32. 55,5	0. 32. 56,5	*Idem.*	9. 55. 4,2
♄	54. 10. 4,0	0. 5. 1,0	0. 5. 1,1	*Voyez ci-dessus.*	9. 56. 58,5
β♋	54. 5. 3,0				
α♋	56. 56. 17,2	2. 46. 13,2	2. 46. 18,0	*Idem.*	9. 56. 59,5
ο♌	55. 7. 48,7	0. 57. 44,7	0. 57. 46,1	*Idem.*	9. 56. 58,2
Régulus	57. 17. 0,4	3. 6. 56,4	3. 7. 1,7	*Idem.*	9. 57. 0,8
ρ♌	54. 41. 3,2	0. 30. 59,2	0. 31. 0,2	*Idem.*	9. 57. 0,5

de SATURNE.

LONGITUDE géocentr. appar calculée par les Tables de Halley.	ERREUR des Tabl. en longitude	LATITUDE géocentrique observée.	LATITUDE géocentrique calculée suivant les T. de Halley	ERREUR des Tabl. en latitude.	VRAI LIEU du Soleil, par les Tables de la Caille.	ERREUR des Tables de Cassini en longitude.
S. D. M. S.	M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	S. H. M. S.	M. S.
V. 9. 41. 7	−1. 18	2. 4. 46	2. 5. 23	+0. 37	XI. 9. 46. 13,8	+22. 13
V. 9. 32. 32	−1. 14	2. 4. 44	2. 5. 33	+0. 49	XI. 11. 46. 7,6	
V. 9. 27. 45	−1. 11	2. 4. 50	2. 5. 37	+0. 47	XI. 11. 46. 1,1	

V. 9. 43. 38 calculée sur les Tables de Halley, corrigées de l'erreur moyenne 1′ 14″.

2. 4. 39 .... 0. 44.

OBSERVATIONS DE LA COMÈTE

Découverte par M. MESSIER le 1.er Avril 1771, Faites à l'Observatoire de Saint-Lô, à Rouen.

Par M. DULAGUE.

CES observations ont été faites avec un réticule rhomboïde, adapté à une lunette achromatique de 5 pieds, de la façon de Dollond.

Les 12, 13 & 14 Avril, la Comète a été comparée avec la 101.e Étoile du catalogue des Éphémérides de M. de la Caille; savoir:

	Temps vrai.			
Le 12 à	9h 3′ 12″	La Comète étoit à l'occident de l'Étoile de...	2d 39′ 11″	& au Sud de.. 0′ 27″
Le 13 à	8. 26. 49		1. 24. 55	& plus N. de. 22. 38
Le 14 à	8. 15. 37		0. 8. 41	& plus N. de. 45. 34

En supposant l'ascension droite apparente de l'Étoile pour le 13, de 54d 8′ 57″, & sa déclinaison boréale de 24d 52′ 14″, on aura l'ascension droite apparente de la Comète,

Le 12, à	9h 3′ 12″	de 51d 29′ 46″	& sa déclin. boréale de	24d 51′ 47″
Le 13, à	8. 26. 49	de 52. 44. 2		25. 14. 52
Le 14, à	8. 15. 37	de 54. 0. 16		25. 37. 48

Le 15 à 8h 26′ 58″ la Comète étoit à l'Occident de *p*♉, qui est la 109.e des Éphémérides, de 3d 55′ 37″, & plus nord de 7′ 26″; l'ascension droite apparente de l'Étoile étant de 59d 14′ 6″, & sa déclinaison boréale 25d 51′ 49″, celle de la Comète sera 55d 18′ 29″, & sa déclinaison boréale 25d 59′ 15″.

Le 16, à 8^h 32′ 54″, la Comète étoit à l'occident de la précédente du quadrilatère du col du Taureau de 1^d 31′ 26″, & au Sud de 0^d 36′ 59″.

Le 17, à 8^h 15′ 19″, elle étoit à l'Oueſt de 0^d 12′ 9″ $\frac{1}{2}$, & au Sud de 0^d 17′ 53″.

Le 18, à 8^h 11′ 25″ elle étoit à l'Eſt de 1^d 9′ 6″, & au Nord de 0^d 2′ 46″; l'aſcenſion droite apparente de l'Étoile étant de 58^d 8′ 39″, & ſa déclinaiſon boréale 26^d 56′ 31″, celle de la Comète ſera,

Le 16, à 8^h 32′ 54″	de 56^d 37′ 13″	& ſa déclin. boréale de	26^d 19′ 32″
Le 17, à 8. 15. 19	de 57. 56. 29 $\frac{1}{2}$		26. 38. 38
Le 18, à 8. 11. 25	de 59. 17. 45		26. 59. 17

Le 22, à 8^h 31′ 5″ la Comète étoit à l'Oueſt d'une petite étoile de 7.e grandeur, qui n'eſt point dans les Catalogues, de 0^d 11′ 44″, & au Sud de 0^d 12′ 43″.

Le 23, à 8^h 23′ 26″ elle étoit à l'Eſt de 1^d 14′ 24″, & plus Nord de 0^d 3′ 30″ $\frac{1}{2}$.

En ſuppoſant l'aſcenſion droite apparente de l'étoile de 65^d 4′ 21″, & ſa déclinaiſon boréale de 28^d 26′ 20″; celle de la Comète ſera,

Le 22 à 8^h 31′ 5″	de 64^d 52′ 37″	& ſa déclin. boréale de	28^d 13′ 37″
Le 23 à 8. 23. 36	de 66. 18. 45		28. 29. 50 $\frac{1}{2}$

On a trouvé la poſition de cette étoile en la comparant le 23 avec une de 7.e grandeur, qui eſt la ſeptième de la *page 8* du Catalogue du Zodiaque, gravé par d'Heulland, elle précédoit celle du catalogue de 12^d 8′ 59″, & étoit au Sud de 14′ 34″; l'aſcenſion droite apparente de l'étoile du Catalogue étant de 77^d 13′ 20″, & ſa déclinaiſon boréale de 28^d 40′ 54″, celle de notre étoile eſt de 65^d 4′ 21″, & ſa déclinaiſon boréale de 28^d 26′ 20″.

Le 28, à 8^h 54′ 32″, la Comète étoit à l'Oueſt de la 22.e étoile de la *page 8* du Catalogue du Zodiaque, de 7^d 15′ 19″, & au Sud de 0^d 39′ 24″.

Le 2 Mai	à 8^{h} 59′ 29″..........	de 1^{d} 5′ 38″	& au Sud	de 0^{d} 0′ 44″
Le 3	à 8. 50. 12 elle étoit à l'E.	de 27. 1	& plus N.	de 0. 4. 15
Le 4	à 9. 40. 13..........	de 2. 4. 26........		de 0. 9. 47

Ascension droite apparente de l'étoile, supposée de 80^{d} 59′ 52″, & sa déclinaison boréale de 30^{d} 18′ 40″; donc, l'ascension droite apparente de la Comète sera,

Le 28 Avril à 8^{h} 54′ 32″	de 73^{d} 44′ 33″	& sa déclin. boréale de	29^{d} 39′ 16″
Le 2 Mai à 8. 59. 29	de 79. 54. 14		30. 17. 56
Le 3 à 8. 50. 12	de 81. 26. 53		30. 22. 55
Le 4 à 9. 40. 13	de 83. 4. 18		30. 28. 27

Le 7, à 9^{h} 10′ 28″, la Comète étoit à l'Est d'une petite étoile de 7.e grandeur, de 1^{d} 7′ 30″, & au Sud de 20′ 10″; ascension droite apparente de l'étoile déduite de nos observations, 86^{d} 37′ 36″, & sa déclinaison boréale de 30^{d} 58′ 36″; ascension droite apparente de la comète 87^{d} 45′ 6″, & sa déclinaison boréale de 30^{d} 38′ 26″.

La position de cette Étoile a été déterminée, en la comparant avec celle qui avoit servi les jours précédens; elle en étoit à l'orient de 5^{d} 37′ 44″, & étoit plus Nord de 39′ 56″.

Le 15, à 9^{h} 46′ 26″	La Comète étoit à l'O. de τ ♊, ou la 195.e des Éph. de	3^{d} 48′ 38″	& au Sud de	0^{d} 19′ 11″
Le 16, à 9. 55. 51		2. 15. 26		0. 27. 43
Le 17, à 9. 42. 58		0. 43. 48		0. 36. 47

Ascension droite apparente de l'étoile 104^{d} 8′ 14″, & sa déclinaison boréale de 30^{d} 35′ 48″; donc l'ascension droite apparente de la Comète sera,

Le 15, à 9^{h} 46′ 26″	de 100^{d} 19′ 36″	& sa déclin. boréale de	30^{d} 16′ 37″
Le 16, à 9. 55. 51	de 101. 52. 48		30. 8. 5
Le 17, à 9. 42. 58	de 103. 24. 26		29. 59. 1

Le 19, à 9^{h} 39′ 32″	La Comète à l'O. de σ ♊, ou la 213.e des Éph. de	5^{d} 46′ 49″, & plus Nord de 0^{d} 11′ 52″
Le 20, à 9. 27. 45		4. 17. 27, & sur le même parallèle.
Le 21, à 9. 15. 2		2. 49. 9, & au Sud de....... 0. 12. 25

Ascension droite appar. de l'Étoile de 112. 14. 42, & sa décl. boréale de 29. 24. 57.

L'ascension

L'ascension droite apparente de la Comète sera,

Le 19, à 9h 39′ 32″ de 106d 27′ 53″	& sa déclin. boréale de	29d 36′ 49″
Le 20, à 9. 27. 45 de 107. 57. 15		29. 24. 57
Le 21, à 9. 15. 2 de 109. 25. 33		29. 12. 32

Nota. On trouve dans les Éphémérides 18d 25′ 49″ pour la déclinaison moyenne de ε♊, au commencement de 1765, je l'ai supposée de 29d 25′ 49″.

Le 22 à 10h 0′ 16″ elle étoit à l'O. de β♊ de 1d 51′ 3″ & plus N. de 0d 25′ 0″
Le 23 à 9. 11. 28 . . . . de 0. 26. 19 . . . . de 0. 10. 54
Le 24 à 10. 3. 43 elle étoit à l'Est de 1. 3. 56, & au Sud. de 0. 5. 9
Ascension droite apparente de l'Étoile . . . . . 112. 49. 38, déclin. bor. 28. 33. 34

Donc, l'ascension droite apparente de la Comète sera,

Le 22, à 10h 0′ 16″ de 100d 58′ 35″	& sa déclin. boréale de	28d 58′ 34″
Le 23, à 9. 11. 28 de 112. 23. 19		28. 44. 28
Le 24, à 10. 3. 43 de 113. 53. 34		28. 28. 25

Enfin, en rassemblant ces différens résultats, on aura, comme ci-dessous, la position apparente de la Comète pour chaque jour d'observation.

	Temps vrai à Rouen.	*Ascens. dr. appar. de la Comète.*	*Déclin. bor. appar. de la Comète,* B.
Avril 1771. Le 12 à	9h 3′ 12″	51d 29′ 46″	24d 51′ 47″
13.	8. 26. 49	52. 44. 2	25. 14. 52
14.	8. 15. 37	54. 0. 16	24. 37. 48
15.	8. 26. 58	55. 18. 29	25. 59. 15
16.	8. 32. 54	56. 37. 13	26. 19. 32
17.	8. 15. 19	57. 56. 29½	26. 38. 38
18.	8. 11. 25	59. 17. 45	26. 59. 17
22.	8. 31. 5	64. 52. 37	28. 13. 37
23.	8. 23. 26	66. 18. 45	28. 29. 50⅚
28.	8. 54. 32	73. 44. 33	29. 39. 16
Mai . . . . 2.	8. 59. 29	79. 54. 14	30. 17. 56
3.	8. 50. 12	81. 26. 53	30. 22. 55
4.	9. 40. 13	83. 4. 18	30. 28. 27
7.	9. 10. 28	87. 45. 6	30. 38. 26
15.	9. 46. 26	100. 19. 36	30. 16. 37

	Temps vrai à Rouen.	Ascens. dr. appar. de la Comète.	Déclin. bor. appar. de la Comète.
Mai 1771. Le	16, à 9h 55′ 51″	101d 52′ 48″	30d 8′ 4″
	17, 9. 42. 58	103. 24. 26	29. 59. 1
	19, 9. 39. 32	106. 27. 53	29. 36. 49
	20, 9. 27. 45	107. 57. 15	29. 24. 57
	21, 9. 15. 2	109. 25. 33	29. 12. 32
	22, 10. 0. 16	110. 58. 35	28. 58. 34
	23, 9. 11. 28	112. 23. 19	28. 44. 28
	24, 10. 3. 43	113. 53. 34	28. 28. 25



MÉMOIRE
SUR
LA MÉTÉOROLOGIE;

Qui contient l'extrait des Observations Météorologiques, faites à Paris pendant dix ans, depuis le 1.er Janvier 1763, jusqu'au 31 Décembre 1772, par M. Messier, de l'Académie royale des Sciences, avec une Méthode pour analyser ces sortes d'Observations.

Par le P. COTTE, Prêtre de l'Oratoire & Curé de Montmorenci, Correspondant de l'Académie royale des Sciences.

LES Observations Météorologiques, semblables aux Observations Astronomiques, ne peuvent être de quelque utilité qu'autant qu'on les rapproche & qu'on les compare les unes avec les autres. Toutes les différentes combinaisons qu'on leur fait subir, & qu'on peut varier à l'infini, répandent nécessairement du jour sur les faits, servent à les détailler, à les éclaircir, & je ne doute pas qu'à force de retourner ces observations de différentes manières, nous n'acquérions par la suite des connoissances sur les causes mêmes de ces faits météorologiques. Un journal d'observations Météorologiques, est pour le Naturaliste, ce qu'est pour le Géomètre un Problème dont il ne peut trouver la solution qu'en le soumettant au calcul & à l'analyse. La différence est qu'il y a beaucoup plus de termes inconnus dans les problèmes de la Météorologie que dans ceux de la Géométrie. Il faut, en Météorologie une longue suite d'observations pour former les données du problème, & il faut encore être sûr de l'exactitude des Observateurs & de la perfection des instrumens dont ils se sont servi, circonstances qui contribuent beaucoup

à retarder les progrès de la ſcience Météorologique. Dans le grand nombre d'obſervations que nos prédéceſſeurs nous ont laiſſé, nous en avons à la vérité dont la ſcience & l'exactitude des Obſervateurs garantiſſent la bonté; mais le défaut des bons inſtrumens en diminue beaucoup le mérite; ainſi, avant que M. de Reaumur nous ait appris à conſtruire des thermomètres comparables, pouvoit-on compter ſur les obſervations que l'on faiſoit avec les thermomètres anciens? Ainſi, avant que l'on connut toutes les petites précautions qu'exige la conſtruction d'un bon baromètre, quel fond pouvoit-on faire ſur les obſervations faites avec des inſtrumens défectueux! On ne pouvoit que multiplier les erreurs, & s'éloigner de plus en plus du flambeau de la vérité.

Les bonnes Obſervations météorologiques ne datent donc que de quarante ou cinquante ans, encore y a-t-il beaucoup de choix à faire dans le grand nombre de celles que nous poſſédons. J'ai tâché de le faire de mon mieux, ce choix, en donnant dans mon *Traité de Météorologie* le précis des meilleures obſervations en ce genre; mais il s'en faut de beaucoup que je prétende être arrivé au bout de la carrière que j'ai commencé à me frayer. Les obſervations Météorologiques ſe multiplient tous les jours, & acquièrent auſſi de jour en jour de nouveaux degrés de perfection, ſoit du côté des Obſervateurs, ſoit du côté des inſtrumens; j'ai bien prévu que mon premier travail ne ſeroit qu'une foible eſquiſſe de celui qui me reſtoit à faire. J'ai donc formé dès-lors le deſſein d'extraire & d'analyſer toutes les obſervations qui me tomberoient entre les mains; & c'eſt pour ſuivre le plan que je me ſuis tracé que je donne aujourd'hui l'extrait & le réſultat des obſervations Météorologiques faites à Paris pendant dix ans par M. Meſſier. Tout ce que je pourrois dire à l'éloge de ce ſavant Obſervateur & de ſes excellentes obſervations, ſeroit infiniment au-deſſous de leur mérite. Il faudroit avoir parcouru, comme je l'ai fait, le journal de M. Meſſier qui contient ces Obſervations, pour pouvoir juger du zèle dont ce Savant eſt animé pour les progrès de la Phyſique, & de

l'exactitude ſcrupuleuſe qu'il apporte à tout ce qu'il fait. Il a ſu donner à ſes inſtrumens un degré de perfection & de préciſion que tout autre que lui auroit de la peine à obtenir. Il n'y a pas juſqu'à la propreté qui règne dans la manière dont ſes obſervations ſont peintes dans ſon Journal, qui n'annonce un Obſervateur patient, exact & laborieux. Et ce ne ſont pas les ſeules obſervations dont M. Meſſier s'occupe; celles-ci ne ſont qu'un délaſſement pour l'Obſervateur aſtronome qui enrichit tous les jours le Public d'une infinité d'Obſervations intéreſſantes, ſur-tout, ſur la marche des Comètes, dont la découverte ſemble lui être dévolue par un privilége excluſif.

Je reviens aux Obſervations météorologiques de M. Meſſier; elles méritent certainement qu'on les diſtingue de la foule, & qu'on leur donne des ſoins particuliers; c'eſt ce que j'ai fait, je n'ai épargné ni mon temps, ni mes peines pour en tirer tout le parti poſſible. C'eſt une bien foible reconnoiſſance pour tous les ſoins & pour l'aſſiduité qu'elles ont exigé de la part de cet exact Obſervateur. Ce travail que je préſente à l'Académie étoit néceſſaire pour qu'elle pût jouir des fruits de celui de M. Meſſier. Ce ſont d'excellens matériaux, mais épars, & qui avoient beſoin d'être raſſemblés, d'être mis chacun dans leur place pour former un enſemble utile & agréable. J'ai donc rédigé avec ſoin ces Obſervations, & je me ſuis fait pour cela une méthode dont je vais donner ici le détail, parce que je crois qu'il ſeroit eſſentiel que les Phyſiciens qui s'occupent à la rédaction de ces ſortes d'Obſervations, ſuiviſſent tous la même méthode; les conſéquences & les réſultats en ſeroient bien plus ſûrs. Je propoſe donc la mienne, non pas comme la meilleure en général, mais comme celle qui m'a paru la meilleure; ſi on y trouve des défauts, on voudra bien m'en avertir, & je me corrigerai; ſi on la trouve bonne, elle pourra ſervir de modèle à ceux qui s'engageront dans un pareil travail.

Je diviſe ce Mémoire en quatre parties. Dans la *première*, après avoir fait connoître les inſtrumens dont ſe ſert M. *Plan de ce Mémoire.*

Meſſier, & avoir donné une idée de l'ordre qu'il ſuit dans ſes Obſervations, je tracerai la méthode que j'ai ſuivie moi-même dans la rédaction de ſon Journal d'Obſervations. Dans la *ſeconde partie*, je mettrai ſous les yeux du Lecteur l'extrait & le réſultat des Tables que j'ai dreſſé en grand nombre, pour parvenir à la rédaction de celles de M. Meſſier. La *troiſième partie* contiendra les réſultats généraux de mes Tables de réduction; enfin, la *quatrième partie* indiquera la méthode que je ſuis pour rédiger tous les mois les Obſervations dont je fais part au public dans les Ouvrages périodiques, & à l'Académie à la fin de chaque année.

On voit que j'ai ſuivi dans mon travail la méthode que les Géomètres appellent *l'analyſe;* il doit néceſſairement en ſortir quelques rayons de lumière. Si nous avions ſeulement dix Obſervateurs Météorologiſtes, tels que M. Meſſier, répandus dans les différentes parties du monde, je ne doute pas que leurs obſervations combinées & rapprochées comme celles que je préſente ici, ne répandiſſent un très-grand jour ſur la ſcience Météorologique. Il y a lieu d'eſpérer de l'exactitude que l'on apporte actuellement à l'étude de la Nature, & de l'attention que l'on donne en particulier à tous les phénomènes qui intéreſſent la Météorologie, que nous ne tarderons pas à recueillir les fruits dont l'étude de cette Science eſt ſuſceptible.

PREMIÈRE PARTIE.

MÉTHODE pour réduire & analyſer les Obſervations Météorologiques.

Plan des Obſervations de M. Meſſier.

Les Obſervations de M. Meſſier ont été faites à Paris au collége Royal de France, depuis le 1.er Janvier 1763, juſqu'au 1.er Novembre 1771, & à l'hôtel de Clugny, depuis le 1.er Novembre 1771 juſqu'à préſent. M. Meſſier les continue toujours avec le même zèle & la même exactitude.

Ce ſavant Obſervateur ſe ſert de trois thermomètres, un à Mercure vide d'air, ayant huit pouces dix lignes de marche de la congélation à l'eau bouillante: ce thermomètre porte deux échelles; celle de M. de Reaumur, & celle de M. de l'Iſle. Le ſecond thermomètre dont M. Meſſier fait uſage eſt à eſprit-de-vin, il contient 28 degrés $\frac{1}{4}$ dans un pied, & porte les deux échelles de M.rs de Reaumur & Fahrenheit. Enfin, le troiſième thermomètre eſt auſſi à eſprit-de-vin, contenant 20 degrés $\frac{3}{4}$ dans un pied, & portant les trois échelles de M.rs de Reaumur, de l'Iſle & Fahrenheit. M. Meſſier a réglé lui-même au mois d'Août 1763 le thermomètre à mercure.

Description des Inſtrumens.

Le baromètre dont M. Meſſier a fait uſage juſqu'au mois d'Octobre 1766, avoit été conſtruit avec ſoin; cependant il en conſtruiſit un autre, & par la comparaiſon qu'il fit de ce dernier avec le premier, il reconnut que dans ſon nouveau baromètre le mercure ſe ſoutenoit à 13 ou 14 centièmes plus haut que dans le premier. Au reſte, cette différence entre ces deux baromètres peut très-bien être indépendante des manipulations qu'on a ſuivie dans leur conſtruction. Du mercure plus ou moins parfait, plus ou moins purgé d'air, des verres de tubes de nature différente, tout cela a pu influer beaucoup ſur cette petite différence que M. Meſſier a remarqué entre ſes deux baromètres; ajoutez à cela que quelque ſoin qu'on ait pris à bien purger d'air un baromètre, il eſt de fait qu'à la longue le peu d'air qui eſt reſté dans le mercure, & qui n'a pu s'en dégager, ſe développe dans la partie vide du tube, & empêche le mercure de s'élever autant qu'il faiſoit auparavant: voilà ce qui oblige de les faire rebouillir de temps en temps. M. Meſſier appliqua à ſon nouveau baromètre une diviſion de *nonius*, qui donne les centièmes de pouce & les douzièmes de ligne. Il a reconnu qu'au Collége royal, où il a fait la plus grande partie de ſes Obſervations, le mercure ſe ſoutient une ligne trois dixièmes plus bas que ſur le bord de la Seine, au pont de la Tournelle.

M. Meſſier ne s'eſt pas ſervi d'anémomètre pour faire les

obſervations du vent, il s'en eſt rapporté aux girouettes des clochers qui ſuffiſent pour ce genre d'obſervations.

Heures des Obſervations.

Les Obſervations contenues dans le journal de M. Meſſier ſont faites ordinairement à trois heures différentes de la journée; ſavoir à ſept heures du matin, à midi & à dix heures du ſoir; mais M. Meſſier en fait ſouvent juſqu'à ſix, huit & dix par jour, ſur-tout dans les temps où les élévations & les abaiſſemens extrêmes du baromètre & du thermomètre indiquent quelque choſe de ſingulier dans l'état de l'atmoſphère.

Diviſion des Tables.

Les Tables ſont diviſées en huit colonnes; la *première* contient les jours du mois; la *ſeconde*, les heures de la journée où les Obſervations ont été faites; la *troiſième*, les élévations du mercure dans le baromètre; les *quatrième*, *cinquième* & *ſixième*, les degrés de chaleur & de froid indiqués par le thermomètre, ſelon les échelles de M.rs de Reaumur, de l'Iſle & Fahrenheit; la *ſeptième*, le vent qui règnoit; la *huitième*, l'état du ciel. Dans cette huitième colonne M. Meſſier nous apprend que le ciel a été ou ſerein ou couvert dans le moment où il obſervoit; il rend compte des grands vents qui ont ſoufflé, des pluies qui ſont tombées, ſoit le jour, ſoit la nuit, de la neige, de la grêle, du tonnerre, des aurores boréales & des autres météores. S'il a fait quelques remarques particulières & qui exigent des détails, on les trouve dans une page blanche qu'il a eu l'attention de ménager entre chacune des feuilles qui contiennent les Tables, C'eſt auſſi là qu'il rend compte des faits météorologiques contenus dans les papiers publics, & qu'il a ſoin d'en extraire pour les comparer avec les Obſervations qu'il faiſoit en même-temps à Paris. J'aurai ſoin de rapprocher tous ces faits dans une Table.

Tel eſt le plan des Obſervations intéreſſantes de M. Meſſier. Je vais maintenant tracer celui du travail que j'ai fait ſur ces Obſervations. Je ſuivrai pour cela l'ordre que chacune de ces Obſervations occupe dans le journal de M. Meſſier. Je ſerai attentif à accompagner ma narration d'exemples qui rendront mes opérations plus ſenſibles.

Le

Le journal de M. Meſſier contient, comme je l'ai dit, au moins trois obſervations du baromètre par jour. J'ai donc conſtruit une Table que j'ai diviſée en dix colonnes pour chacune des dix années d'obſervations; une onzième colonne contenoit les jours du mois. Je prenois l'élévation moyenne de chaque jour des dix années que je rapportois ſur ma Table. Cette élévation moyenne étoit la ſomme de toutes les hauteurs obſervées, diviſées par le nombre des obſervations.

Réduction des Obſervations du Baromètre.

EXEMPLE.

JANVIER 1770.		
HEURES.		*BAROMÈTRE.*
Matin...	7^h	$28^p\ 5,5^l$
1. Soir...	$1\frac{1}{2}$	28. 5,6
Soir...	$10\frac{1}{4}$	28. 4,7
$\frac{85^{po}\ 3,6^l}{3}$		= 28. 5,2

Cette opération faite pour chaque jour, m'a donné auſſi pour chaque jour des dix années, une ſomme d'élévations moyennes que j'ai également diviſée par le nombre des années, ou par dix. De ce calcul, réſultoit néceſſairement & exactement l'élévation moyenne du jour. Voilà le calcul que j'ai fait pour chacun des jours des dix années d'obſervations; d'où j'ai conclu, 1.° l'élévation moyenne de chaque jour, 2.° l'élévation moyenne de chaque mois, 3.° l'élévation moyenne de l'année. En voici un exemple.

JANVIER.

Jours du Mois.	1763.	1764.	1765.	1766.	1767.
	P. L.	P. L.	P. L.	P. L.	P. L.
1.	27. 10¼.	27. 10.	27. 5¼.	28. 0½.	28. 1¼
2.	28. 0.	27. 10.	27. 3¾.	27. 11.	27. 6.
3.	27. 10.	27. 10¼.	27. 3¼.	27. 9.	27. 6.
4.	27. 9¾.	28. 2½.	27. 5½.	27. 11¼.	27. 6¼.
5.	27. 10⅔.	27. 11½.	27. 6¼.	28. 0½.	27. 11.
6.	28. 1¼.	27. 9¼.	27. 5¼.	28. 1.	27. 9.
7.	28. 1.	27. 10.	27. 6.	28. 1½.	27. 10.
8.	28. 0.	28. 0½.	27. 6.	28. 0.	27. 8.
9.	27. 10.	28. 1¼.	27. 5.	28. 1.	27. 9¼.
10.	28. 0¾.	27. 11¼.	27. 7¼.	28. 0¼.	27. 9.
Élevation moyenne des 10 j.	27. 9,6	27. 10,8	27. 4,5	28. 0,0	27. 8,4

	1768.	1769.	1770.	1771.	1772.
	P. L.	P. L.	P. L.	P. L.	P. L.
1.	27. 5¼.	27. 9.	28. 5.	28. 0¼.	28. 1¼.
2.	27. 7.	27. 9.	28. 2¼.	27. 10½.	28. 2¼.
3.	28. 0.	27. 10.	28. 3½.	27. 8.	28. 2¾.
4.	28. 0½.	28. 0½.	27. 10¼.	27. 8½.	28. 0¾.
5.	28. 1¼.	27. 9½.	27. 6¼.	27. 8½.	28. 2¼.
6.	27. 11.	27. 11.	27. 4¾.	27. 10½.	28. 0.
7.	27. 8½.	28. 0½.	27. 7.	28. 0.	27. 4.
8.	27. 8¼.	28. 3¼.	27. 9¾.	27. 9½.	27. 2½.
9.	27. 4¾.	28. 2½.	27. 10.	27. 9½.	27. 7¼.
10.	27. 6.	27. 11½.	27. 3¼.	27. 9.	27. 10¾.
Élevation moyenne des 10 j	27. 8,4	27. 10,8	27. 9,6	27. 9,6	27. 10,1

Jours du Mois.	ÉLÉVATION moyenne de chaque jour.
	P. L.
1.	27. 10,10.
2.	27. 11,10.
3.	27. 9,10.
4.	27. 10, 4.
5.	27. 11, 6.
6.	27. 9,10.
7.	27. 9, 7.
8.	27. 9, 6.
9.	27. 9, 7.
10.	27. 9, 4.
Élévation moyenne des 10 j	27. 10, 2.

J'ai fait aussi pour chaque mois des dix années le relevé des plus grandes & des moindres élévations du mercure ; en

additionnant ces différentes élévations, il en eſt réſulté deux ſommes que j'ai diviſées par le nombre des années, ou par dix; les quotiens ont été la plus grande & la moindre élévation qui doivent avoir lieu chaque mois, *année commune.* J'en ai dreſſé une Table qui trouvera ſa place dans la *ſeconde partie de ce Mémoire.*

Réduction des Obſervations du Thermomètre.

Parmi les obſervations du Thermomètre, il faut diſtinguer les degrés de chaleur & les degrés de froid dans les mois où il gèle, tels que ceux de Janvier, Février, Mars, Novembre & Décembre. Les degrés de chaleur indiquent la quantité dont la liqueur du thermomètre eſt dilatée par la chaleur, & les degrés de froid indiquent la quantité de la condenſation que cette même liqueur éprouve. Dans les autres mois de l'année où les gelées ſont très-rares, le thermomètre ne donne que des degrés de chaleur ou de dilatation. J'ai donc été obligé, pour avoir le degré moyen de chaleur & de froid dans les mois où la gelée a lieu, de conſtruire une Table diviſée en vingt colonnes, outre celle qui contenoit les jours du mois. J'ai pris le degré moyen de chaleur & de froid qui a eu lieu chaque jour des dix années d'obſervation. Ce degré moyen eſt, comme dans les obſervations du baromètre, la ſomme de tous les degrés obſervés chaque jour, à différentes heures de la journée, diviſée par le nombre des obſervations.

EXEMPLE.

JANVIER 1770.	
HEURES.	*THERMOMÈT.*
Matin... $6\frac{1}{2}$	— $1^d\frac{1}{4}$
10 Midi	$1\frac{1}{2}$
Soir... $10\frac{1}{4}$	— $1\frac{1}{4}$
$\frac{\text{Ch. } 1^d\frac{1}{2} \text{ Fr. } - 2^d\frac{1}{2}}{3} = -1.$	

On voit dans cet Exemple, que le 10 Janvier 1770, la chaleur a été nulle, puisque le froid l'a emporté d'un degré sur la chaleur observée à midi. A l'égard des autres mois où la gelée n'a point lieu, la Table qui contient les degrés moyens de chaleur, doit être seulement divisée en dix colonnes, indépendamment de la onzième qui renferme les jours du mois. Je vais donner ici un modèle de l'opération dont je viens de parler, appliquée au mois de Janvier; cet exemple suffira pour faire entendre de quelle manière on doit opérer sur les autres mois.

JANVIER.

Jours du Mois.	1763.		1764.		1765.		1766.		1767.	
	Ch.	Fr.	Ch.	Fr.	Ch.	Fr.	Ch.	Fr.	Ch.	Fr.
	D.	D.	D.	D.	D.	D.	D.	D.	D.	D.
1.	...	$-1\frac{3}{4}$	$8\frac{1}{4}$	...	$3\frac{1}{2}$	...	...	-6	$1\frac{3}{4}$	
2.	...	$-2\frac{1}{4}$	$6\frac{3}{4}$	...	5	...	...	$-5\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{4}$	
3.	...	$-4\frac{3}{4}$	5	...	$5\frac{1}{4}$	...	...	$-6\frac{1}{2}$	...	$-0\frac{2}{3}$
4.	...	$-4\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$	...	4	...	...	$-3\frac{3}{4}$	...	-2
5.	...	$-2\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{4}$	...	$5\frac{1}{2}$	...	...	$-3\frac{1}{2}$	...	$-4\frac{1}{4}$
6.	...	-2	8	...	$8\frac{1}{4}$	...	...	-6	...	-2
7.	...	-3	$8\frac{3}{4}$	...	$8\frac{3}{4}$	...	...	$-6\frac{1}{4}$	...	-11
8.	...	$-2\frac{3}{4}$	$7\frac{3}{4}$	...	9	...	...	$-4\frac{1}{4}$	...	$-7\frac{3}{4}$
9.	...	$-3\frac{1}{4}$	8	...	$8\frac{1}{4}$	...	...	-7	...	$-3\frac{3}{4}$
10.	...	-2	$8\frac{1}{4}$	...	$5\frac{1}{2}$	...	...	$-7\frac{1}{4}$	...	$-4\frac{1}{4}$
Degré moy. des 10 jours.	...	-2.8	6. 7	...	6. 3	...	...	-5.6	1. 2	-4.3

Suite de JANVIER.

Jours du Mois.	1768.		1769.		1770.		1771.		1772.	
	Ch.	Fr.	Ch.	Fr.	Ch.	Fr.	Ch.	Fr.	Ch.	Fr.
	D.	D.	D.	D.	D.	D.	D.	D.	D.	D.
1.	...	—4	6	...	3	...	8½	...	2	
2.	...	—8	4	...	6½	...	7¾	...	1¼	
3.	...	—7¾	2¾	...	2¾	...	6½	...	1	
4.	...	—11	2¼	...	3¼	...	3	...	1¼	
5.	...	—12½	3	...	0½	...	2	...	0½	
6.	...	—10½	4¼	...	...	—1	1	...	2	
7.	...	—2½	3¼	...	...	—6¼	...	—0¼	2½	
8.	0¼	...	3¼	...	...	—4	...	—0¾	...	—0½
9.	2	...	2	...	...	—3	...	—0¼	2	
10.	2¼	...	2¼	...	...	—1	...	—1¼	3¼	
Degré moy. des 10 jours.	1. 5	—8.0	3. 3	...	3. 0	—3.0	4. 7	—0.8	1. 9	—0

Jours du Mois.	Degrés moyens de	
	Chaleur.	Froid.
	D.	D.
1.	3. 0	— 1. 1
2.	3. 1	— 1. 5
3.	2. 1	— 1. 8
4.	1. 5	— 2. 0
5.	1. 4	— 2. 2
6.	2. 2	— 2. 0
7.	2. 2	— 2. 7
8.	1. 9	— 1. 8
9.	2. 0	— 1. 7
10.	1. 5	— 1. 6
Degré moy. des 10 jours.	2. 1	— 1. 8

Réduction des Observations du Vent.

Les Tables que j'ai été obligé de construire pour réduire les observations du vent, sont plus compliquées que les précédentes. Comme le journal de M. Messier indique le vent qui a régné le matin, & celui qui a régné le soir, j'étois curieux de savoir s'il y avoit quelque uniformité dans les variations du vent le matin & le soir. J'ai donc commencé par dresser, pour chaque mois, une Table qui contenoit vingt-une colonnes. Dans la première, étoient placés les jours du mois; des vingt colonnes qui suivoient, il y en avoit deux pour chacune des dix années d'observations, l'une de ces colonnes indiquoit les vents qui avoient régné chaque jour le matin, & l'autre marquoit la même chose pour le soir. J'ai donc été obligé de transporter sur ces Tables toutes les observations du vent contenues dans le journal de M. Messier, ce que j'ai exécuté de la manière suivante.

JANVIER.

Jours du Mois.	1763.		1764.		1765.		1766.		1767.	
	Matin.	Soir.	Matin.	Soir.	Matin.	Soir.	Matin.	Soir.	Matin.	Soir.
1.	N. O.	O.	O.	O.	S.	S.	N. E.	N. E.	S. O.	S. O.
2.	O.	S. E.	S.	S.	S. E.	S. E.	N.	N.	N. O.	N.
3.	N.	E.	O.	N. O.	S.	S.	N. E.	N. E.	N. O.	N. O.
4.	N. E.	E.	S.	O.	N. O.	N. O.	N.	N.	N. E.	N.
5.	N.	N.	S.	S.	S.	S.	N. O.	N.	N.	N. E.
6.	N.	N.	S.	S.	S. O.	S. O.	N. E.	N.	O.	O.
7.	N.	N.	S.	S.	S.	S.	N.	N. E.	N. E.	N. E.
8.	E.	E.	O.	S.	S.	S.	O.	O.	N. O.	N. O.
9.	E.	E.	S.	S.	O.	S.	N. E.	N.	O.	O.
10.	N.	N.	S.	S. O.	S. O.	S. O.	N. E.	N. E.	S.	S.

	1768.		1769.		1770.		1771.		1772.	
	Matin.	Soir.	Matin.	Soir.	Matin.	Soir.	Matin.	Soir.	Matin.	Soir.
1.	S. E.	S. E.	S.	S.	S. O.	O.	S.	S. O.	N. E.	N. E.
2.	N. E.	N. E.	S.	S.	N. O.	N. O.	S. O.	S. O.	N. E.	N. E.
3.	N. E.	N. E.	S. O.	S. O.	N.	N. E.	S. O.	S. O.	N. E.	N. E.
4.	N. E.	N. E.	N. E.	E.	S. O.	O.	S. O.	S. O.	N.	N.
5.	N. E.	E.	E.	E.	O.	O.	S. O.	O.	N. E.	N. E.
6.	E.	S. E.	E.	E.	S. O.	O.	O.	O.	S.	S.
7.	S. E.	S.	N. O.	N.	N. E.	N.	N.	S. O.	S. O.	S. O.
8.	S.	S.	N.	N.	N. E.	O.	N. O.	N. O.	S. O.	S. O.
9.	S. E.	S.	E.	S.	N. E.	S. O.	O.	N. O.	O.	O.
10.	S.	S. O.	S.	S.	S. O.	O.	S. O.	O.	S. O.	S. O.

Après avoir ainsi fait le relevé de tous les vents qui ont régné chaque jour, matin & soir, pendant dix ans, j'ai dressé une seconde Table qui marquoit le nombre de fois que chacun des huit vents principaux avoit régné chaque jour du mois, matin & soir. Cette Table étoit divisée en dix-sept colonnes; la première étoit pour les jours du mois; dans les seize autres, dont huit pour le matin & huit pour le soir, j'avois écrit en tête le nom de chacun des huit vents principaux. Cette Table servoit à réduire celle que je viens de décrire ci-dessus. Je comptois le nombre de fois que chacun de ces vents avoit régné chaque jour pendant les dix années d'observations, & j'écrivois ce nombre dans les Tables dont je vais donner un modèle. Il m'étoit aisé ensuite de déterminer le vent dominant de chacun des jours du mois; il suffisoit de voir dans ma Table quel vent avoit régné plus souvent tel jour pendant dix ans. Lorsque je trouvois que deux vents avoient régné dans un même jour, à-peu-près autant de fois, je les marquois tous les deux pour ce jour dans le calendrier Météorologique, ayant l'attention de donner la première place à celui des deux qui avoit été le plus dominant. Voici un modèle de cette seconde Table.

JANVIER.

Jours du Mois.	MATIN.							
	NORD.	Nord-Eſt.	Nord-O.	SUD.	Sud-Eſt.	Sud-O.	EST.	OUEST.
1.	......	2.	1.	3.	1.	2.	......	1.
2.	1.	2.	1.	2.	1.	2.	......	1.
3.	2.	3.	1.	1.	......	2.	......	1.
4.	2.	4.	1.	1.	......	2.		
5.	2.	2.	1.	2.	......	......	2.	1.
6.	1.	1.	......	2.	......	2.	2.	2.
7.	3.	2.	1.	2.	1.	1.		
8.	1.	1.	2.	2.	......	1.	1.	2.
9.	......	2.	......	1.	1.	......	2.	4.
10.	1.	1.	......	4.	......	4.		
TOTAL des Vents.	13.	20.	8.	20.	4.	16.	7.	12.
	SOIR.							
	NORD.	Nord-Eſt.	Nord-O.	SUD.	Sud-Eſt.	Sud-O.	EST.	OUEST.
1.	......	2.	......	2.	1.	2.	......	3.
2.	1.	2.	1.	2.	2.	2.		
3.	......	4.	2.	1.	......	2.	1.	
4.	3.	1.	2.	......	......	......	2.	2.
5.	2.	2.	......	2.	......	......	2.	2.
6.	2.	......	......	2.	1.	1.	1.	3.
7.	3.	2.	......	3.	......	2.		
8.	1.	......	2.	3.	......	1.	1.	2.
9.	1.	......	1.	4.	......	1.	1.	2.
10.	1.	1.	......	2.	......	4.	......	2.
TOTAL des Vents.	14.	14.	8.	21.	4.	15.	8.	16.

Rien de plus facile, d'après cette Table de déterminer les vents dominans de chaque jour du mois, de la manière indiquée dans la Table ſuivante.

JANVIER.

JANVIER.

Jours du Mois.	VENTS DOMINANS.
1.	Sud & Sud-Oueſt.
2.	Nord-Eſt & Nord-Oueſt.
3.	Nord-Eſt & Sud-Oueſt.
4.	Nord & Nord-Eſt.
5.	Nord & Nord-Eſt.
6.	Oueſt & Sud.
7.	Nord & Sud.
8.	Sud & Sud-Oueſt.
9.	Oueſt & Sud.
10.	Sud-Oueſt & Sud.
Vents domin. des 10 jours.	Sud & Sud-Oueſt.

Enfin, le dernier objet des Obſervations de M. Meſſier, eſt l'état du Ciel, dont ce Savant rend compte chaque fois qu'il indique l'élévation du mercure, & le degré de chaleur ou de froid. Son Journal renferme exactement les différens états du ciel pendant la matinée, la ſoirée & la nuit de chaque jour. J'étois curieux de ſavoir s'il y avoit quelque proportion dans la manière dont les pluies ſont diſtribuées le jour & la nuit; ſi, par exemple, il pleut & neige plus ſouvent le jour que la nuit, ou plus fréquemment la nuit que le jour. Il m'étoit facile de ſatisfaire ma curioſité avec le ſecours des Tables de M. Meſſier. J'ai donc dreſſé, pour chaque mois une Table diviſée en dix colonnes. La *première* contenoit les jours du mois, la *ſeconde* & la *troiſième* indiquoient le nombre de fois que la pluie ou la neige étoit tombée le jour, & les *quatrième* & *cinquième*, marquoient la même choſe pour la nuit, la *ſixième* contenoit les jours ſereins, la *ſeptième* celui des jours couverts, les *huitième*, *neuvième* & *dixième*, le

nombre des jours où l'on avoit eu du brouillard, du tonnerre ou quelque aurore boréale.

EXEMPLE.

JANVIER.

Jours du Mois.	Jour.		Nuit.		Serein.	Couvert	Brouill.	Tonn.	Aurore boréale.
	Pluie.	Neige.	Pluie.	Neige.					
1.	5.	1.	2.	1.	1.	9.	1.		
2.	4.	.....	2.	.....	4.	6.	1.		
3.	2.	1.	3.	1.	4.	6.	1.		
4.	3.	1.	.....	1.	5.	5.			
5.	1.	2.	1.	2.	3.	7.			
6.	2.	2.	1.	1.	2.	8.			
7.	3.	1.	2.	4.	5.	5.	1.		
8.	2.	3.	1.	2.	2.	8.	1.		
9.	3.	2.	.....	3.	2.	9.			
10.	3.	.....	3.	.....	1.	8.			
Total des 10 j.	28.	13.	15.	15.	29.	71.	5.		

Il résulte de cette Table, que le 1.er Janvier, par exemple, dans l'espace de dix ans, il est tombé de la pluie cinq fois pendant la journée, & deux fois pendant la nuit, & de la neige une fois le jour & une fois la nuit; que le ciel a été une fois serein & neuf fois couvert, & qu'il n'y a eu qu'une seule fois du brouillard. Cette opération répétée sur chacun des jours des dix années d'observations, j'en ai conclu facilement la température de chaque jour de l'année moyenne. Lorsque le nombre des jours sereins a été à peu-près égal à celui des jours couverts, j'ai indiqué la température qui en résultoit, par le terme de *variable*. Voici un modèle des résultats de la Table précédente.

JANVIER.

Jours du Mois.	ÉTAT du Ciel.
1.	couvert, pluie.
2.	variable.
3.	*idem.*
4.	*idem.*
5.	*idem*, neige.
6.	couvert.
7.	variable, neige.
8.	couvert, neige.
9.	*idem.*
10.	couvert, pluie.
Temps moyen	variable, humide.

Tel eſt le plan du premier travail que j'ai été obligé d'entreprendre pour pouvoir dreſſer le calendrier Météorologique, qui occupe la première place parmi les Tables contenues dans la *ſeconde partie de ce Mémoire.* On n'auroit pas de ce calendrier l'idée que j'en ai conçue moi-même en le rédigeant, ſi on le regardoit comme devant ſervir à prédire la température qui doit avoir lieu chaque jour de l'année, ſi, dis-je, on le comparoit à ces almanacs de Liége, de Troies, &c. où l'on met ces ſortes de prédictions. Celles de mon calendrier ſeroient peut-être plus fondées que ces dernières, puiſqu'elles ont pour baſe une ſuite d'obſervations faites exactement pendant dix ans. Mais, 1.° elles ne pourroient ſervir que dans le climat de Paris. 2.° Il s'en faut de beaucoup que je croie que dix années d'obſervations ſuffiſent pour que l'on puiſſe en conclure ſans erreur la température moyenne de chaque jour. A peine cent années d'obſervations pourroient-elles donner quelques réſultats généraux, toujours ſujets aux exceptions dans un climat comme le nôtre, où la température

Calendrier Météorologiq.

eſt ſi inconſtante. S'il s'agiſſoit des pays ſitués vers l'Équateur où les vents ſont toujours conſtans, & où, par conſéquent, la température ne varie preſque pas, quatre ou cinq années d'obſervations fourniroient pour ce pays des réſultats plus ſûrs, que vingt années n'en fourniroient pour le nôtre. Ainſi le véritable point de vue ſous lequel on doit enviſager mon calendrier Météorologique, c'eſt de le regarder comme le tableau fidèle des vents dominans, des élévations moyennes du Baromètre & du Thermomètre, & de l'état moyen du ciel pour chaque jour des dix années d'obſervations dont il eſt le réſultat; je parle de ce qui eſt paſſé, & non pas de ce qui arrivera. Nous ne pouvons, juſqu'à préſent, tirer d'autres fruits des obſervations Météorologiques, en les réſumant, que de nous procurer des réſultats généraux ſur l'élévation moyenne du mercure, ſur ſes plus grandes élévations & ſes plus grands abaiſſemens, ſur les plus grands, les moindres & les moyens degrés de chaleur & de froid, ſur le nombre moyen des jours de pluie ou de neige, des jours ou ſereins ou couverts, du nombre de fois que le tonnerre ſe fait entendre année commune. N'eſpérons pas d'en obtenir davantage, quant-à-préſent; ne nous laſſons cependant pas d'obſerver; les nouvelles Obſervations ſerviront à confirmer ou à rectifier nos premiers réſultats, & quand nous ſerons une fois aſſurés de leur exactitude, nous pourrons faire des tentatives pour tirer de ces réſultats généraux quelque choſe de plus particulier & de plus poſitif ſur la température des ſaiſons, des mois, & des jours même de ce qu'on appelle l'*année moyenne*.

Tables des réſultats généraux, & de ceux du Calendrier Météorologiq.

Je ne préſente donc ici que des réſultats généraux, & pour les obtenir, ces réſultats, il falloit néceſſairement entreprendre le travail que je viens de décrire. En effet, les Tables générales dont on a eu juſqu'à préſent le détail, m'ont procuré des réſultats que j'ai eu ſoin de rédiger & de rapprocher dans d'autres Tables d'une plus petite étendue que les premières, & où les objets, ainſi reſſerrés, préſentent des faits qui ont quelque choſe de plus net & de plus précis. Les Tables

générales m'ont donné pour chaque mois des dix années d'obſervations; 1.° le vent dominant; 2.° le plus grand, le moindre & le moyen degré de chaleur & de froid; 3.° la plus grande, la moindre & la moyenne élévation du mercure, &c. Voilà les différens objets que j'ai eu en vue en conſtruiſant les Tables qui ſuivent ici le Calendrier météorologique.

J'ai dreſſé une première Table qui ne ſe trouve point dans ce Mémoire, parce que celle que j'y donne, & qui eſt intitulé *IIe Table,* renferme les mêmes objets rangés dans un ordre différent. Cette première Table étoit diviſée en onze colonnes, & elle ſuivoit l'ordre des dix années d'obſervations. Dans la *première colonne* étoient les mois, dans la *ſeconde,* le vent dominant de chaque mois; dans la *troiſième* & la *quatrième,* les plus grands & les moindres degrés de chaleur & de froid; les *cinquième* & *ſixième* indiquoient pour chaque mois les degrés moyens de chaleur & de froid; dans la *ſeptième,* étoient marquées le jour & l'heure de la plus grande élévation du mercure; la *huitième* indiquoit cette plus grande élévation; la *neuvième* & la *dixième* montroient la même choſe pour la plus petite élévation; & dans la *onzième* ſe trouvoit l'élévation moyenne, auſſi pour chaque mois. J'ai fait la même choſe pour chacune des dix années d'obſervations. Mon deſſein étoit d'obtenir pour chaque année un réſultat général que je pus comparer avec les réſultats du Calendrier, & de ceux de la ſeconde Table dont je vais parler.

Cette *IIe Table,* ne diffère de la précédente, que parce que j'y ai ſuivi l'ordre des mois, au lieu de ſuivre celui des années; la diviſion des colonnes eſt la même que dans la Table que je viens de décrire, avec cette différence que la première colonne contient les années, au lieu de contenir les mois. Le travail que j'avois fait pour les jours, dans le calendrier, je l'ai fait ici pour les mois. Un coup-d'œil jeté ſur cette Table développera mieux le plan que j'y ai ſuivi, que tout ce que j'en pourrois dire ici. J'ai donc eu pour chaque mois un réſultat qui étoit celui de dix années d'obſervations.

Je préſente dans la *IIIe Table,* tous les réſultats que

chaque mois m'avoit fournis, pour parvenir à un résultat général, qui est celui de l'année moyenne. Je donne de même dans la *IV.e Table* le résultat du calendrier météorologique, & dans la *V.e* ceux que j'avois obtenus de la Table où je suivois l'ordre des années; voilà donc trois résultats pour l'année moyenne, que je rapproche dans la *VI.e Table*, & qui me produisent enfin le résultat le plus général & le plus exact, auquel on puisse espérer de parvenir, en fait de météorologie *(a)*.

La *VII.e Table* a pour but de montrer combien de fois chacun des huit vents principaux a régné chaque mois, matin & soir, dans l'espace de dix années. Cette Table m'a servi à dresser la *VIII.e* qui indique le nombre de fois que chaque vent doit souffler par mois, tant le matin que le soir. On remarquera que dans cette Table, comme dans le calendrier météorologique, je suppose pour chaque jour deux vents, dont l'un des deux doit dominer.

On verra dans la *IX.e Table*, quel a été le nombre des jours de pluie ou de neige, tant le jour que la nuit; des jours couverts & sereins, de ceux où il y a eu du brouillard, où l'on a entendu le tonnerre, où l'aurore boréale s'est montrée pendant dix ans *(b)*. Je me suis servi de cette même Table pour construire la *X.e* où l'on trouve combien de fois ces mêmes phénomènes ont lieu chaque mois de l'année moyenne. Dans la Table suivante, qui est la *XI.e*, ce sont encore les

---

(a) Il faut faire attention que dans cette Table, & dans celle de la *troisième partie de ce Mémoire*, la quantité qui indique le *plus grand & le moindre degré de chaleur*, est le quotient de la somme de tous les degrés extrêmes du thermomètre dans chaque mois de l'*année moyenne*, divisée par le nombre des mois. C'est-à-dire que lorsqu'on voudra comparer les plus grands & les moindres degrés de chaleur d'une année avec ceux de l'*année moyenne*, il faudra additionner tous les degrés extrêmes observés chaque mois, & diviser cette somme par le nombre des mois, on verra en quoi le quotient différera de celui de l'*année moyenne*; on comprend bien qu'il faut opérer séparément sur les degrés extrêmes de chaleur, & sur les degrés extrêmes de froid.

(b) Je soupçonne que M. Messier n'a pas tenu compte dans son journal de toutes les aurores boréales qui ont paru; j'en juge par le petit nombre de celles dont il parle.

mêmes résultats pour l'année moyenne, mais ils sont extraits de la *I.ère Table*, ou du calendrier météorologique.

Les résultats des *X.e* & *XI.e Table* sont rapprochés dans la *XII.e* afin de parvenir au résultat général de l'année moyenne.

Je donne dans la *XIII.e Table*, 1.° les degrés extrêmes & peu ordinaires de chaleur & de froid, observés à Paris & en différens pays, pendant les dix années d'observations; 2.° les élévations & les abaissemens peu communs, du Mercure, observés aussi à Paris pendant dix ans.

J'ai comparé dans la *XIV.e Table*, les observations que M. Messier a faites à Paris pendant cinq ans, depuis 1768, jusqu'en 1772, avec celles que j'ai faites à Montmorenci dans le même temps, & j'en donne les résultats.

La *XV.e Table* est le tableau des faits météorologiques observés en différens pays, comparés avec la température qui avoit lieu à Paris dans le même temps.

Enfin, j'ai cru devoir placer dans la *XVI.e & dernière Table*, le rapport du thermomètre de M. de Reaumur, avec ceux de M.rs de l'Isle & Farhenheit. J'ai déjà donné ce rapport dans mon *Traité de Météorologie*, mais je n'avois divisé ma Table que par degrés, au lieu que celle qu'on trouvera ici est divisée par quart de degrés; elle est l'extrait fidèle des observations journalières que M. Messier fait du thermomètre, relativement à ces trois échelles. Cette Table s'étend depuis le zéro de M. de Reaumur, ou le terme de la congélation jusqu'à 15 degrés au-dessous de ce terme; & ensuite depuis le même point de zéro jusqu'à 32 degrés au-dessus. Ce sont les deux points extrêmes où l'on a vu descendre & monter la liqueur du thermomètre dans le climat de Paris.

Après cette explication de mes Tables, je vais les placer ici de suite; on fera bien de jeter un coup-d'œil sur chacune de ces Tables, à mesure qu'on lira le détail que je viens d'en donner, on en saisira mieux l'esprit & le plan.

SECONDE PARTIE.

Extrait des Tables Météorologiques de M. Messier.

*I.*ere *Table.* Calendrier Météorologique, où l'on trouve, 1.° le vent dominant; 2.° le degré moyen de chaleur suivant les trois échelles de M.rs de Reaumur, de l'Isle & Fahrenheit; 3.° l'élévation moyenne du mercure; 4.° l'état moyen du ciel, qui doivent avoir lieu chaque jour de l'année commune.

*II.*e *Table.* Résultats des Tables d'Observations de M. Messier, où l'on trouve pour chaque mois des dix années d'observations; 1.° le vent dominant; 2.° le plus grand, le moindre & le moyen degré de chaleur & de froid; 3.° la plus grande, la moindre & la moyenne élévation du mercure.

*III.*e *Table.* Résultats de la II.e Table, où l'on trouve pour chaque mois de l'*année commune,* 1.° le vent dominant, &c. comme dans la Table précédente.

*IV.*e *Table.* Résultats de la I.re Table, ou du Calendrier Météorologique, où l'on trouve pour chaque mois de l'*année commune,* 1.° le vent dominant, &c. comme ci-dessus.

*V.*e *Table.* Résultats de la Table où j'indiquois pour chaque mois des dix années d'observations, 1.° le vent dominant, &c. comme ci-dessus.

*VI.*e *Table.* Résultats des trois Tables précédentes où l'on trouve plus exactement, 1.° les vents dominans, &c. qui doivent avoir lieu dans l'*année commune.*

*VII.*e *Table.* Résultats des Observations faites sur les vents qui ont régné à Paris pendant dix ans, où l'on indique combien de fois chacun des huit vents principaux a soufflé chaque mois le matin & le soir, dans le même espace de temps.

*VIII.*e *Table.* Résultats de la Table précédente, où l'on trouve combien de fois les huis vents principaux doivent souffler chaque mois de l'*année commune,*

*IX.*e *Table.* Résultats du nombre de jours de pluie ou de neige, des jours couverts ou sereins, des brouillards, des tonnerres

tonnerres & des aurores boréales, pendant les dix années d'obſervations.

X.e Table. Réſultats de la Table précédente, où l'on trouve pour chaque mois de l'*année commune*, le nombre des jours de pluie ou de neige, &c. comme ci-deſſus.

XI.e Table. Réſultats de la I.re Table, ou du Calendrier Météorologique, où l'on trouve pour chaque mois de l'*année commune*, le nombre des jours de pluie ou de neige, &c. comme ci-deſſus.

XII.e Table. Réſultats des deux Tables précédentes où ſe trouve plus exactement, pour l'*année commune*, le nombre des jours de pluie ou de neige, &c. comme ci-deſſus.

XIII.e Table. État des élévations & des abaiſſemens extrêmes & peu ordinaires du mercure, des degrés extrêmes & peu communs de froid & de chaleur, obſervés pendant dix ans à Paris & ailleurs.

XIV.e Table. Comparaiſon des obſervations faites à Paris par M. Meſſier depuis 1768, juſqu'en 1772, avec celles que j'ai faites pendant le même-temps à Montmorenci.

XV.e Table. Comparaiſon des phénomènes météorologiques obſervées en différens pays éloignés, avec les températures qui avoient lieu dans le même-temps à Paris.

XVI.e Table. Rapport des trois échelles des thermomètres de M.rs de Reaumur, de l'Iſle & Fahrenheit, comparées entre elles & diviſées en quart de degrés.

Il me ſuffira d'avoir détaillé ici les objets qui ſont contenus dans les Tables ſuivantes; je me contenterai de les déſigner par *I.re, II.e, III.e Table, &c.* on voudra bien avoir recours à l'expoſé que je viens d'en faire.

I.ere TABLE. *JANVIER.*

Jours du Mois.	Vents dominans.	Degrés de Chaleur. R.	D.	F.	Baromèt.	État du Ciel.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouces lignes*	
1.	S. & S.O.	1,9.	149¼.	36¾.	27. 10,10	couvert, pluie.
2.	N.E. - N.O.	1,5.	150⅛.	35⅜.	27. 11,10	variable.
3.	N.E. - S.O.	0,3.	152½.	32½.	27. 9,10	*idem.*
4.	N. - N.E.	0,5.	150⅛.	33⅛.	27. 10,4	*idem.*
5.	N. - N.E.	—0,8.	154⅓.	30⅓.	27. 11,6	variable, neige.
6.	O. - S.	0,2.	152.	32¼.	27. 9,10	couvert.
7.	N. - S.	—0,5.	154.	31.	27. 9,7	variable, neige.
8.	S. - S.O.	0,1.	149½.	32⅛.	27. 9,6	couvert, neige.
9.	O. - S.	0,3.	152.	32½.	27. 9,7	*idem.*
10.	S-O. - S.	0,0.	153.	32.	27. 9,4	couvert, pluie.
11.	S. - N.	1,2.	152.	34½.	27. 9,11	couvert.
12.	O. - S.	1,0.	151.	34¼.	27. 10,8	*idem.*
13.	S.	1,7.	149¾.	35¼.	27. 11,3	*idem*, brouillard.
14.	S. - S.O.	2,0.	149⅛.	36½.	27. 11,3	variable.
15.	S.	1,5.	15ↄ⅛.	35⅜.	27. 10,4	*idem.*
16.	S.O. - S.	2,2.	148¾.	36¾.	27. 9,9	*idem*, pluie.
17.	S.	0,5.	152¼.	33⅛.	27. 9,10	couvert.
18.	S.	0,0.	153.	32.	27. 9,8	*idem*, pluie.
19.	N. E. - S.	0,3.	152½.	32½.	27. 9,2	couvert.
20.	N. E. - N.	0,5.	152¼.	33⅛.	27. 8,11	*idem*, pluie.
21.	N. - N. E.	1,1.	151.	34½.	27. 10,10	variable.
22.	N. E. - S.	1,2.	150¼.	34½.	27. 11,7	couvert, pluie.
23.	N.E. - S.O.	2,6.	148¼.	37¾.	27. 11,3	*idem.*
24.	S.O. - S.	3,4.	146½.	39½.	28. 0,7	*idem.*
25.	S. - S.O.	4,2.	144½.	41½.	28. 0,9	couvert.
26.	S. - S.O.	3,2.	147.	39.	28. 0,10	variable, brouillard.
27.	S. - S. E.	3,1.	147¼.	38⅞.	28. 0,3	ſerein.
28.	S.O. - S.	4,4.	144½.	42.	27. 11,6	variable, pluie.
29.	N.	3,8.	145½.	40½.	28. 0,1	couvert, pluie.
30.	S. - S. E.	3,2.	147.	39.	28. 0,1	couvert.
31.	S. O.	3,9.	145½.	40¾.	27. 10,10	*idem*, pluie, brouillard

Suite de la Iere Table. *FÉVRIER.*

Jours du Mois.	Vents dominans.	Degrés de Chaleur. R.	D.	F.	Baromèt.	État du Ciel.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouces lignes*	
1.	O. & S. O.	4,1.	145 $\frac{1}{4}$.	41 $\frac{1}{8}$.	27. 10,6	variable, pluie.
2.	S. - N. O.	3,5.	146 $\frac{1}{3}$.	39 $\frac{1}{4}$.	27. 10,5	couvert, pluie.
3.	O. - N. E.	3,5.	146 $\frac{1}{3}$.	39 $\frac{3}{4}$.	27. 10,9	variable, pluie.
4.	S. - S. O.	2,6.	148 $\frac{1}{5}$.	37 $\frac{1}{2}$.	27. 10,7	variable.
5.	S. E. - S. O.	3,0.	147 $\frac{1}{4}$.	38 $\frac{1}{4}$.	27. 10,3	couvert, pluie.
6.	N. E. - S. O.	2,8.	147 $\frac{3}{4}$.	38 $\frac{1}{8}$.	27. 10,7	*idem.*
7.	N. E. - S.	2,7.	148 $\frac{1}{4}$.	37 $\frac{1}{2}$.	27. 11,0	*idem*, neige.
8.	N. - S. O.	2,5.	148 $\frac{1}{4}$.	37 $\frac{1}{2}$.	27. 10,6	variable.
9.	N. - S.	2,0.	149 $\frac{1}{8}$.	36 $\frac{1}{2}$.	27. 10,6	couvert.
10.	S. - O.	3,0.	147 $\frac{1}{4}$.	38 $\frac{1}{4}$.	27. 9,7	*idem*, neige.
11.	S. - S. O.	3,2.	146 $\frac{3}{4}$.	39 $\frac{1}{4}$.	27. 9,10	couvert.
12.	S. - S. O.	3,8.	146.	40 $\frac{1}{8}$.	27. 9,11	variable.
13.	S. - S. O.	4,0.	145 $\frac{1}{3}$.	41.	27. 10,7	couvert, pluie.
14.	S. - S. O.	4,7.	144.	42 $\frac{1}{4}$.	28. 0,0	*idem.*
15.	S. O. - S.	4,5.	144 $\frac{1}{2}$.	42 $\frac{1}{4}$.	27. 11,1	*idem.*
16.	S. - S. O.	4,7.	144.	42 $\frac{1}{4}$.	27. 11,3	couvert.
17.	S. - S. E.	5,0.	143 $\frac{1}{2}$.	43 $\frac{1}{4}$.	27. 10,10	*idem*, pluie.
18.	S. - E.	4,7.	144 $\frac{1}{4}$.	42 $\frac{1}{2}$.	27. 10,10	*idem.*
19.	S. - O.	4,2.	144 $\frac{7}{8}$.	41 $\frac{5}{8}$.	27. 11,10	variable, pluie.
20.	S. - N. E.	4,3.	145.	41 $\frac{3}{4}$.	28. 0,1	couvert.
21.	S. O. - O.	5,1.	143 $\frac{1}{4}$.	41 $\frac{1}{4}$.	28. 0,10	variable.
22.	S.	4,4.	144 $\frac{1}{2}$.	42 $\frac{1}{4}$.	27. 10,10	*idem.*
23.	S. - O.	5,4.	142 $\frac{1}{4}$.	44 $\frac{1}{4}$.	27. 10,7	couv. pluie, brouillard
24.	N. E.	3,8.	145 $\frac{1}{8}$.	40 $\frac{1}{2}$.	27. 11,9	couvert, brouillard.
25.	S. O.	4,8.	143 $\frac{1}{4}$.	42 $\frac{7}{8}$.	27. 11,1	couvert, grande pluie.
26.	N. E. - O.	4,8.	144.	42 $\frac{1}{4}$.	27. 10,10	*idem.*
27.	S. - O.	5,9.	141 $\frac{5}{8}$.	45 $\frac{1}{4}$.	27. 9,11	*idem.*
28.	S. - O.	5,8.	141 $\frac{3}{4}$.	45 $\frac{1}{8}$.	27. 9,6	variable, pluie.
29.	S. - S. O.	5,4.	142 $\frac{1}{4}$.	44 $\frac{1}{4}$.	27. 9,4	couvert.

Suite de la I.ere Table. *MARS.*

Jours du Mois.	Vents dominans.	Degrés de Chaleur. R.	D.	F.	Baromèt.	État du Ciel.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*		
1.	O. & S. O.	4,8.	144.	43.	27. 9,10	ferein.
2.	O. - S. O.	6,1.	141 ¼.	45 ⅜.	27. 9,6	couvert, pluie.
3.	O.	5,7.	142 ¼.	45.	27. 10,1	*idem.*
4.	S. - S. E.	5,0.	143 ½.	43 ¼.	27. 10,8	variable, pluie.
5.	N. O. - S. O.	4,7.	144 ½.	42 ¼.	27. 11,3	*idem.*
6.	O. - N. O.	4,8.	144.	43.	27. 11,6	ferein.
7.	N. E. - O.	4,7.	144 ¼.	42 ¼.	27. 11,0	*idem.*
8.	E. - N. E.	4,0.	145 ⅓.	41.	27. 11,8	*idem.*
9.	N. E.	4,1.	145 ½.	41 ⅛.	27. 10,11	variable.
10.	E. - N. E.	4,6.	144 ⅜.	42 ⅜.	27. 9.6	ferein.
11.	N. E.	4,1.	145 ¼.	41 ⅝.	27. 9,7	variable.
12.	S. - N. E.	5,0.	143 ½.	43 ¼.	27. 9,10	*idem.*
13.	S. - N. E.	5,6.	142 ½.	44 ⅜.	27. 9,10	couvert, pluie.
14.	N. - N. E.	5,5.	141 ½.	44 ⅜.	27. 10,3	*idem.*
15.	N. E. - O.	5,5.	142 ½.	44 ¾.	27. 11,3	ferein.
16.	S. - O.	4,9.	143 ¾.	43 ⅓.	27. 11,3	variable, pluie.
17.	S. E. - S. O.	6,1.	141 ¼.	45 ¾.	27. 11,2	*idem.*
18.	O. - N. O.	5,5.	142 ⅓.	44 ⅓.	27. 11,2	variable.
19.	N. - S. O.	4,6.	144 ⅜.	42 ⅜.	27. 11,3	couvert.
20.	S. - O.	6,0.	141 ½.	45 ½.	27. 11,6	*idem*, pluie.
21.	N. E.	4,4.	144 ¾.	42 ⅛.	28. 0,1	variable.
22.	N. E. - O.	4,4.	144 ¾.	42 ⅛.	27. 11,5	couvert, pluie.
23.	N. E. - N. O.	4,2.	144 ⅞.	41 ⅝.	28. 0,8	*idem*, neige.
24.	N. E. - N. O.	4,2.	144 ⅞.	42 ⅝.	28. 0,6	ferein.
25.	S. O.	4,5.	144 ½.	42 ¼.	27. 11,6	variable.
26.	S. - O.	5,6.	142 ½.	44 ⅜.	27. 11,0	*idem*, pluie, neige.
27.	N. - N. E.	4,3.	144 ⅞.	41 ⅝.	27. 11,0	variable.
28.	N. E. - S. O.	5,0.	143 ½.	43 ¼.	28. 0,8	ferein.
29.	S.	6,1.	141 ¼.	45 ¾.	27. 11,0	*idem.*
30.	S. - E.	6,0.	141 ½.	45 ½.	27. 11,2	variable, pluie.
31.	N. E. - S. O.	6,8.	140.	47 ½.	27. 11,9	*idem.*

Suite de la I.ere Table. *AVRIL.*

Jours du Mois.	Vents dominans.	Degrés de Chaleur. R.	D.	F.	Baromèt.	État du Ciel.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouces lignes*	
1.	S. O.	7,4.	138.	48 1/8.	27. 11,9	variable, pluie.
2.	N. & N. E.	7,4.	138.	48 1/2.	27. 11,3	couvert.
3.	N. - N.E.	8,0.	137 1/4.	50.	27. 10,10	variable, pluie.
4.	N.E. - N.	8,3.	137.	50 1/4.	27. 10,9	*idem.*
5.	N. E.	8,3.	137.	50 1/4.	27. 10,8	ferein.
6.	N.E. - N.O.	8,0.	137 1/4.	50.	27. 10,8	variable.
7.	N.E. - N.O.	8,4.	136 7/8.	51.	27. 10,10	*idem*, pluie.
8.	N.E. - O.	7,1.	139 1/2.	47 7/8.	27. 9,9	*idem.*
9.	S.O. - N.	6,5.	140 1/2.	46 1/8.	27. 9,2	variable, grande pluie.
10.	N.	7,9.	138.	49 1/4.	27. 9,9	*idem.*
11.	N. E.	7,7.	138 1/2.	49 1/2.	27. 10,10	*idem.*
12.	N.E. - N.O.	8,8.	138.	51 1/2.	27. 11,5	ferein.
13.	S. - S. E.	9,0.	135 7/8.	52 1/8.	27. 10,11	*idem.*
14.	N.E. - O.	9,1.	135 5/8.	52 1/2.	27. 10,7	variable, pluie.
15.	O.	8,9.	136.	51 7/8.	27. 11,6	*idem.*
16.	S. - N. O.	8,4.	136 7/8.	51.	27. 9,7	*idem.*
17.	N. - S.	6,8.	140.	47 1/2.	27. 10,10	couvert, pluie.
18.	S.O. - O.	6,8.	140.	47 1/2.	27. 11,5	*idem.*
19.	N. - N.O.	6,7.	140 1/8.	47.	27. 11,2	variable, grande pluie.
20.	N. O.	7,0.	139 1/8.	47 1/4.	27. 11,8	variable, pluie.
21.	N. - N.O.	8,6.	136 1/2.	51 3/8.	27. 11,4	ferein.
22.	N.	9,8.	134 1/4.	54.	27. 10,7	*idem*, pluie.
23.	S. E. - S.	9,0.	135 7/8.	52 1/8.	27. 10,8	variable, grande pluie.
24.	S. - N.	9,3.	135 1/2.	53.	27. 11,6	*idem*, pluie.
25.	N. - S.	9,5.	134 7/8.	53 1/4.	28. 0,3	*idem.*
26.	O.	9,6.	134 1/8.	53 1/2.	28. 0,3	variable.
27.	N.O. - S.O.	9,8.	134 1/2.	54.	27. 11,5	*idem.*
28.	N.E. - S.O.	9,7.	134 3/8.	53 1/8.	27. 11,10	ferein.
29.	N.E. - S.O.	11,5.	131.	57 7/8.	27. 10,5	variable, pluie.
30.	N.E. - S.O.	11,1.	132 1/2.	57.	27. 9,10	*idem.*

Suite de la Iere Table. *MAI.*

Jours du Mois.	Vents dominans.	Degrés de Chaleur. R.	D.	F.	Baromèt.	État du Ciel.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouces lignes*	
1.	N. & S. O.	10,0.	$133\frac{7}{8}$.	$54\frac{1}{8}$.	27. 10,7	couvert, pluie.
2.	S.O. - N.O.	10,1.	$133\frac{5}{8}$.	$54\frac{5}{8}$.	28. 0,2	variable.
3.	N. - N. E.	10,3.	$133\frac{1}{4}$.	55.	28. 0,1	*idem.*
4.	N. - S.O.	10,8.	$132\frac{1}{2}$.	$56\frac{1}{4}$.	27. 11,6	*idem*, pluie.
5.	N. E. - S.O.	11,8.	$130\frac{1}{4}$.	$58\frac{1}{4}$.	27. 11,10	*idem.*
6.	O. - S.	13,0.	$128\frac{1}{8}$.	$61\frac{1}{8}$.	28. 0,1	ferein.
7.	S. E. - O.	14,2.	$125\frac{7}{8}$.	64.	28. 0,0	*idem.*
8.	S. - S. O.	13,7.	$126\frac{7}{8}$.	$62\frac{1}{4}$.	27. 11,6	*idem.*
9.	S. O.	13,3.	$127\frac{1}{2}$.	$61\frac{1}{2}$.	27. 11,8	variable, pluie.
10.	S. - S. O.	12,3.	$129\frac{1}{4}$.	$59\frac{3}{4}$.	27. 11,4	ferein.
11.	N.E. - S.	12,2.	$129\frac{5}{8}$.	$59\frac{1}{2}$.	27. 11,1	couvert.
12.	S. - S. O.	11,6.	131.	58.	27. 10,8	variable, pluie.
13.	S. - N. E.	12,4.	129.	$59\frac{3}{4}$.	27. 11,2	*idem.*
14.	E.	12,7.	128.	60.	27. 11,3	variable.
15.	S. E.	13,2.	$127\frac{3}{4}$.	$61\frac{1}{2}$.	27. 11,8	*idem.*
16.	N. E.	13,9.	$126\frac{1}{2}$.	63.	27. 11,11	ferein.
17.	N.O. - O.	13,1.	128.	$61\frac{1}{4}$.	27. 11,8	variable, pluie.
18.	N.	13,0.	$128\frac{1}{8}$.	$61\frac{1}{8}$.	27. 11,5	*idem.*
19.	N. - S.O.	12,2.	$129\frac{5}{8}$.	$59\frac{1}{2}$.	27. 11,6	ferein.
20.	N. - S.O.	14,0.	$126\frac{1}{4}$.	$63\frac{3}{8}$.	27. 11,7	couvert, pluie.
21.	S. - S. E.	14,5.	$125\frac{1}{4}$.	$64\frac{1}{2}$.	28. 0,1	variable, pluie.
22.	N.E. - O.	14,7.	$124\frac{7}{8}$.	65.	28. 0,6	ferein.
23.	N. - O.	15,3.	$123\frac{5}{8}$.	$66\frac{5}{8}$.	28. 0,6	*idem.*
24.	N. - O.	15,3.	$123\frac{5}{8}$.	$66\frac{5}{8}$.	28. 0,4	variable, pluie, tonn.
25.	N. - S.O.	15,2.	$123\frac{3}{4}$.	$66\frac{1}{8}$.	28. 0,0	ferein.
26.	O. - N.	14,8.	$124\frac{5}{8}$.	$65\frac{1}{4}$.	27. 11,11	variable, pluie.
27.	N. - S. O.	14,5.	$125\frac{1}{4}$.	$64\frac{1}{2}$.	27. 11,4	*idem*, tonnerre.
28.	N. - N.E.	12,4.	129.	$59\frac{3}{4}$.	27. 11,3	variable, pluie.
29.	S. - N. E.	12,5.	$129\frac{1}{8}$.	60.	27. 10,11	couvert, pluie.
30.	S.O. - N.E.	12,2.	$129\frac{5}{8}$.	$59\frac{1}{2}$.	27. 10,3	variable, grande pluie.
31.	S. O.	12,5.	$129\frac{1}{8}$.	60.	27. 10,11	couvert, grande pluie.

Suite de la I.[ere] Table. *JUIN.*

Jours du Mois.	Vents dominans.	Degrés de Chaleur.			Baromèt.	État du Ciel.
		R.	D.	F.		
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouces lignes*	
1.	O.	11,6.	130¾.	58.	27. 10,8	couvert, pluie.
2.	O. & N.O.	13,3.	129⅜.	62.	28. 0,0	*idem.*
3.	S. - S. O.	14,3.	125½.	64¼.	28. 0,6	variable, pluie.
4.	S.	14,8.	124¾.	65¼.	28. 0,4	variable.
5.	S. - S. O.	16,0.	122⅜.	67⅞.	27. 11,10	*idem*, pluie, tonnerre.
6.	S.	15,8.	122¾.	67¼.	28. 0,5	variable.
7.	N. - N.O.	15,7.	122½.	66⅞.	28. 0,5	*idem*, pluie.
8.	N.E. - O.	15,7.	122½.	66⅞.	28. 0,9	variable.
9.	N. - S.	16,6.	121¼.	69¼.	28. 0,11	ſerein.
10.	O.	16,0.	122⅜.	67⅞.	28. 0,9	*idem.*
11.	O. - S.O.	15,7.	122½.	66⅞.	28. 0,0	variable, pluie.
12.	S. O.	15,1.	124.	65¾.	28. 0,4	*idem.*
13.	O. - S.O.	15,0.	124⅜.	65½.	28. 0,7	variable.
14.	N.O. - O.	14,9.	124½.	65⅜.	28. 0,9	*idem.*
15.	O. - S. O.	15,7.	122½.	66⅞.	28. 0,0	*idem*, pluie.
16.	S.O. - N.O.	15,7.	122½.	66⅞.	27. 11,1	*idem.*
17.	N. O. - S.	15,2.	123⅞.	66.	27. 9,6	*idem.*
18.	N.O. - S.O.	14,3.	124¾.	65¼.	28. 0,0	*idem.*
19.	O.	14,9.	124½.	65⅛.	28. 0,5	couvert, pluie, tonn.
20.	O.	16,2.	122.	69⅛.	28. 0,5	variable, pluie, tonn.
21.	O. - N.E.	15,9.	122¼.	67½.	28. 0,8	variable.
22.	O. - N.E.	16,3.	121½.	69½.	28. 0,9	ſerein.
23.	N. E. - N.O.	16,3.	121½.	69½.	28. 0,2	*idem.*
24.	E. - O.	17,5.	119½.	71¼.	28. 0,10	variable, pluie.
25.	O.	17,8.	119.	72.	28. 0,0	variable.
26.	O. - S.O.	18,6.	117¼.	73¼.	28. 0,1	*idem.*
27.	N. O. - S.	18,0.	118½.	72⅛.	27. 11,8	couvert, pluie, tonn.
28.	S. O. - O.	16,2.	121.	69.	27. 11,11	couvert, pluie.
29.	O.	15,4.	123¼.	66½.	27. 11,8	*idem.*
30.	S. - O.	15,3.	123⅞.	66¼.	28. 0,0	variable.

Suite de la I.ère Table. *JUILLET.*

Jours du Mois.	Vents dominans.	Degrés de Chaleur. R.	D.	F.	Baromèt.	État du Ciel.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouces lignes*	
1.	N. & O.	15,2.	123 7/8.	66.	27. 11,10	variable.
2.	O. - N.	16,4.	121 5/8.	68 1/4.	28. 0,4	*idem*, pluie.
3.	N. E - O.	15,9.	122 3/4.	67 1/2.	28. 1,2	ferein.
4.	N.	17,2.	120 1/8.	70 1/4.	28. 1,2	*idem.*
5.	O. - N.	17,9.	118 3/4.	72 1/8.	28. 1,2	*idem.*
6.	S. O.	18,0.	118 1/2.	72 3/8.	28. 1,9	variable, pluie.
7.	S. O. - O.	17,3.	120.	70 1/4.	28. 0,8	*idem.*
8.	O.	17,2.	120 1/8.	70 1/4.	28. 0,4	ferein.
9.	S. O. - O.	17,3.	120.	70 3/4.	28. 0,4	variable, pluie.
10.	O. - N.	16,8.	121.	69 3/4.	28. 0,2	couvert, pluie.
11.	O.	15,7.	122 1/2.	66 7/8.	27. 11,6	variable, pluie, tonn.
12.	S.O. - O.	16,1.	122 1/8.	68.	27. 11,9	variable, pluie.
13.	O.	16,5.	121 1/2.	69.	28. 0,5	variable.
14.	S. O.	17,4.	119 3/4.	71.	28. 1,5	*idem*, pluie.
15.	N. E. - S.O.	17,5.	119 1/2.	71 1/4.	28. 1,1	ferein, pluie d'orage.
16.	E.	18,1.	118 1/4.	72 1/2.	28. 0,0	variable, pluie.
17.	O.	18,4.	117 1/4.	73 1/4.	27. 11,9	ferein.
18.	S.	17,8.	119.	72.	28. 0,3	variable, pluie.
19.	O. - S.O.	16,7.	121 1/4.	69 1/4.	27. 11,8	*idem*, tonnerre.
20.	O. - S.O.	17,2.	120 1/8.	70 1/4.	27. 11,9	variable.
21.	S. O.	17,8.	119.	72.	28. 0,6	ferein.
22.	N.O. - S.O.	17,0.	120 1/2.	70 1/8.	28. 0,6	variable, pluie.
23.	N.O. - S.O.	17,9.	118 1/4.	72 1/8.	28. 0,10	ferein, pluie d'orage.
24.	N.O. - S.O.	18,1.	118 3/4.	72 1/2.	28. 0,10	ferein.
25.	N.O. - S.O.	18,9.	116 1/4.	74 5/8.	28. 0,1	*idem.*
26.	S.	17,5.	119 1/2.	71 1/4.	27. 11,3	couvert, pluie, tonn.
27.	O.	17,0.	120 1/2.	70 1/8.	28. 0,1	couvert, pluie.
28.	S.O. - O.	18,1.	118 1/4.	72 1/2.	28. 1,0	ferein.
29.	S.O. - O.	17,6.	119 1/4.	71 1/2.	28. 0,10	*idem.*
30.	S.O. - O.	17,1.	120 1/4.	70 1/4.	28. 0,2	variable, pluie.
31.	O. - S.	17,4.	119 3/4.	70 1/4.	27. 11,9	*idem.*

Suite

Suite de la I.[ere] Table. *AOUST.*

Jours du Mois.	Vents dominans.	Degrés de Chaleur. R.	D.	F.	Baromèt.	État du Ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces lignes	
1.	N. & S.O.	17,4.	119¾.	71.	28. 0,3	couvert, pluie.
2.	N.O. - O.	17,9.	118¾.	72⅛.	27. 11,10	ferein.
3.	O.	16,8.	120⅞.	69⅝.	28. 0,6	variable, pluie, tonn.
4.	S. O.	17,9.	118¾.	72⅛.	28. 1,1	ferein.
5.	S. O.	18,9.	117¼.	74½.	28. 0,9	*idem.*
6.	S.	19,4.	116.	75½.	28. 0,6	*idem*, tonnerre.
7.	S.O. - O.	18,5.	117⅝.	73½.	28. 0,6	ferein.
8.	S. O.	17,8.	119.	72.	28. 0,3	variable, pluie.
9.	S. - S. O.	18,8.	117.	74⅜.	28. 0,3	ferein.
10.	S. O.	17,9.	118¾.	72⅛.	28. 0,6	variable, pluie.
11.	O. - N.	18,0.	118½.	72⅜.	28. 0,4	ferein.
12.	N. - S.O.	16,6.	121¼.	69¼.	27. 11,5	variable, pluie, tonn.
13.	O. - S.O.	16,9.	120¾.	69⅞.	28. 0,5	variable.
14.	O. - N.E.	17,0.	120½.	70⅛.	27. 10,5	*idem*, pluie.
15.	N. - S.O.	15,7.	123¼.	66⅞.	27. 11,6	*idem.*
16.	S. O.	15,7.	123¼.	66⅞.	27. 11,8	ferein.
17.	O.	15,0.	124⅜.	65½.	28. 0,3	variable, pluie.
18.	S. O.	16,7.	121⅛.	69⅜.	28. 0,8	variable.
19.	O. - S.O.	17,3.	119⅞.	70⅛.	28. 0,2	*idem*, pluie.
20.	O. - N.O.	15,8.	122¾.	67¼.	27. 11,11	variable.
21.	S.O. - O.	16,3.	121⅝.	68½.	28. 0,11	*idem.*
22.	S.O. - O.	16,6.	121¼.	69¼.	28. 0,4	ferein.
23.	S. - O.	17,0.	120½.	70⅛.	27. 11,10	variable, pluie.
24.	S.O. - O.	17,0.	120½.	70⅛.	28. 0,7	ferein.
25.	O.	16,7.	121⅛.	69⅜.	28. 0,10	*idem.*
26.	O. - N.O.	17,2.	120⅛.	70⅛.	28. 1,8	*idem.*
27.	S.O. - N.O.	17,0.	120½.	70⅛.	28. 1,3	*idem.*
28.	E. - S.	17,2.	120⅛.	70⅛.	28. 0,6	*idem.*
29.	O. - N. E.	17,7.	119¼.	71⅝.	28. 0,3	*idem.*
30.	S.O. - O.	17,5.	119½.	71¼.	28. 0,6	variable, pluie.
31.	S.O. - N. E.	17,1.	120¼.	70¼.	28. 0,7	ferein, aurore boréale.

Suite de la I.ere Table. *SEPTEMBRE.*

Jours du MOIS.	VENTS dominans.	Degrés de CHALEUR. R.	D.	F.	BAROMÈT.	ÉTAT DU CIEL.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouces lignes*	
1.	S.	17,3.	$119\frac{7}{8}$.	$70\frac{1}{4}$.	28. 0,1	ferein, pluie d'orage.
2.	S. O.	16,9.	$120\frac{1}{4}$.	$69\frac{7}{8}$.	28. 0,0	ferein.
3.	N. E. & S.	14,8.	$124\frac{1}{2}$.	$65\frac{1}{8}$.	27. 11,10	*idem*, tonnerre.
4.	S. - O.	17,4.	$119\frac{3}{4}$.	$70\frac{1}{4}$.	28. 0,3	ferein.
5.	S. E. - S. O.	16,0.	$122\frac{1}{8}$.	$67\frac{7}{8}$.	28. 0,8	variable, pluie.
6.	S. O. - S.	16,0.	$122\frac{1}{8}$.	$67\frac{7}{8}$.	27. 11,6	variable.
7.	S. O.	15,6.	$123\frac{1}{8}$.	$66\frac{7}{8}$.	27. 11,0	couvert.
8.	O. - S.O.	14,5.	$125\frac{1}{4}$.	$64\frac{1}{2}$.	27. 11,6	variable.
9.	O. - S.O.	13,6.	$126\frac{7}{8}$.	$62\frac{1}{2}$.	28. 0,0	*idem*, pluie.
10.	S. O.	13,6.	$126\frac{7}{8}$.	$62\frac{1}{2}$.	27. 11,10	ferein.
11.	S. O.	14,1.	126.	$63\frac{5}{8}$.	27. 10,7	variable, pluie.
12.	S.	14,9.	$124\frac{1}{2}$.	$65\frac{1}{4}$.	27. 10,7	*idem.*
13.	S. O.	14,5.	$125\frac{1}{4}$.	$64\frac{1}{2}$.	28. 0,3	*idem*, tonnerre.
14.	S.O. - S.	14,0.	$126\frac{1}{4}$.	$63\frac{1}{8}$.	28. 1,1	variable, pluie.
15.	S. O.	13,6.	$126\frac{7}{8}$.	$62\frac{1}{2}$.	28. 1,8	*idem.*
16.	S. - S. O.	13,3.	$127\frac{5}{8}$.	$61\frac{7}{8}$.	28. 0,6	ferein.
17.	S. - O.	14,4.	$125\frac{1}{2}$.	$64\frac{1}{4}$.	28. 0,7	*idem*, aurore boréale.
18.	S. O.	14,9.	$124\frac{1}{2}$.	$65\frac{1}{4}$.	28. 0,10	ferein.
19.	S. E. - S.	15,0.	$124\frac{3}{8}$.	$65\frac{1}{2}$.	28. 1,2	*idem.*
20.	S.	15,3.	$123\frac{5}{8}$.	$66\frac{1}{4}$.	28. 0,10	variable, pluie.
21.	S. - S. O.	14,4.	$125\frac{1}{2}$.	$64\frac{1}{4}$.	28. 0,5	*idem.*
22.	S. O.	13,7.	$126\frac{7}{8}$.	$62\frac{1}{4}$.	28. 0,5	variable.
23.	S. O.	13,1.	128.	$61\frac{1}{4}$.	28. 0,3	ferein.
24.	N. - S.O.	12,5.	$129\frac{1}{8}$.	60.	28. 0,6	variable, pluie.
25.	N. E. - N. O.	13,0.	$128\frac{1}{8}$.	$61\frac{1}{8}$.	28. 1,2	ferein.
26.	N. E.	12,3.	$129\frac{3}{8}$.	$59\frac{5}{8}$.	28. 1,2	*idem*, aurore boréale.
27.	E. - N.E.	12,6.	129.	$60\frac{1}{4}$.	27. 11,11	ferein.
28.	S. E. - S.	11,9.	$130\frac{1}{4}$.	$58\frac{1}{2}$.	27. 11,11	*idem.*
29.	N.O. - S. E.	12,0.	$130\frac{1}{8}$.	$58\frac{7}{8}$.	27. 11,6	*idem.*
30.	S.O. - N.O.	11,7.	$130\frac{5}{8}$.	$58\frac{1}{8}$.	27. 11,7	*idem*, brouillard.

Suite de la I.[ere] Table. *OCTOBRE.*

Jours du Mois.	Vents dominans.	Degrés de Chaleur.			Baromèt.	État du Ciel.
		R.	D.	F.		
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouces lignes*	
1.	O. & N. E.	12,1.	$129\frac{7}{8}$.	$59\frac{1}{8}$.	27. 11,6	couvert, pluie.
2.	N. E. - S.O.	12,3.	$129\frac{3}{8}$.	$59\frac{1}{2}$.	27. 11,6	variable, pluie.
3.	S. O.	11,8.	$130\frac{1}{4}$.	$58\frac{1}{2}$.	27. 9,8	*idem*, aurore boréale.
4.	S.	11,8.	$130\frac{1}{4}$.	$58\frac{1}{2}$.	27. 8,10	couvert, pluie.
5.	S. O. - S.	11,0.	132.	$56\frac{5}{8}$.	27. 10,7	*idem*.
6.	S.	10,6.	$132\frac{7}{8}$.	$55\frac{3}{4}$.	27. 10,11	*idem*.
7.	S. - S. O.	11,3.	$131\frac{3}{8}$.	$57\frac{3}{4}$.	27. 11,5	variable.
8.	S. - S. O.	11,4.	$131\frac{1}{4}$.	$57\frac{7}{8}$.	27. 11,4	couvert, pluie.
9.	S. O.	11,3.	$131\frac{1}{8}$.	$57\frac{3}{4}$.	28. 0,3	variable, pluie.
10.	S. O. - S.	10,6.	$132\frac{7}{8}$.	$55\frac{3}{4}$.	27. 11,8	variable.
11.	S.O. - O.	9,5.	$134\frac{7}{8}$.	$53\frac{1}{4}$.	28. 0,9	couvert.
12.	S. O.	9,0.	$135\frac{7}{8}$.	$52\frac{1}{8}$.	28. 0,9	ſerein.
13.	S. - S.O.	9,0.	$135\frac{7}{8}$.	$52\frac{1}{8}$.	28. 0,2	variable, pluie.
14.	S.O. - O.	9,1.	$135\frac{5}{8}$.	$52\frac{3}{8}$.	28. 0,1	ſerein, pluie.
15.	N.O. - S.	8,5.	$136\frac{1}{4}$.	$51\frac{1}{8}$.	28. 1,1	ſerein.
16.	S.	9,1.	$135\frac{1}{8}$.	$52\frac{1}{8}$.	28. 0,6	*idem*.
17.	S. - S. O.	8,4.	137.	$50\frac{7}{8}$.	28. 0,6	*idem*.
18.	S.	8,8.	$136\frac{1}{8}$.	$51\frac{7}{8}$.	28. 0,1	*idem*.
19.	S. O. - S.	8,9.	136.	52.	28. 0,8	*idem*, brouillard.
20.	S. - S. O.	9,5.	$134\frac{7}{8}$.	$53\frac{1}{4}$.	28. 0,3	*idem*.
21.	S. E. - S.	8,6.	$136\frac{1}{2}$.	$51\frac{3}{8}$.	28. 0,8	variable, brouillard.
22.	S. - S. E.	9,2.	$135\frac{1}{2}$.	$52\frac{1}{2}$.	27. 11,6	*idem*.
23.	S.	8,3.	$137\frac{1}{8}$.	$50\frac{1}{8}$.	27. 10,8	*idem*, pluie.
24.	S. - S. O.	8,2.	$137\frac{1}{4}$.	$50\frac{1}{2}$.	28. 0,1	*idem*, aurore boréale.
25.	S. O. - S.	8,7.	$136\frac{1}{8}$.	$51\frac{1}{8}$.	28. 0,2	variable, brouillard.
26.	S. - S. O.	8,4.	137.	$50\frac{7}{8}$.	27. 11,9	variable, pluie.
27.	S.	8,3.	$137\frac{1}{8}$.	$50\frac{1}{4}$.	27. 10,10	ſerein, brouillard.
28.	S. - S.O.	8,0.	$137\frac{1}{4}$.	50.	28. 0,6	ſerein.
29.	S.O. - S. E.	8,1.	$137\frac{1}{2}$.	$50\frac{1}{4}$.	27. 11,1	couvert, pluie.
30.	O. - S.O.	8,4.	137.	$50\frac{7}{8}$.	27. 10,6	variab. pluie, brouill.
31.	S.O. - O.	8,4.	137.	$50\frac{7}{8}$.	27. 10,3	variable, pluie.

Suite de la Ire Table. *NOVEMBRE.*

Jours du Mois.	Vents dominans.	Degrés de Chaleur. R.	D.	F.	Baromèt.	État du Ciel.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouces lignes*	
1.	S.O. & N.O.	7,0.	$139\frac{1}{8}$.	$47\frac{1}{4}$.	27. 11,3	ferein.
2.	S. - O.	6,9,	$139\frac{1}{8}$.	$47\frac{1}{2}$.	27. 11,8	*idem*, brouillard.
3.	S. O.	7,8.	$140\frac{7}{8}$.	$49\frac{5}{8}$.	27. 10,11	couvert, pluie.
4.	S. - S. O.	8,9.	136.	$51\frac{7}{8}$.	27. 11,4	*idem*, brouillard.
5.	S.O. - N.O.	8,5.	$136\frac{1}{4}$.	$51\frac{1}{8}$.	28. 0,3	variable, pluie.
6.	S. - O.	7,6.	$138\frac{3}{8}$.	49.	27. 11,10	*idem.*
7.	S. O. - S.	7,1.	$139\frac{1}{4}$.	$47\frac{7}{8}$.	27. 10,0	couvert, pluie.
8.	S. O.	7,4.	$138\frac{5}{8}$.	$48\frac{1}{2}$.	27. 9,4	variable, pluie.
9.	S. - O.	7,7.	$138\frac{1}{4}$.	$49\frac{1}{8}$.	27. 10,9	couvert, pluie, brouil.
10.	S. O. - S.	7,4.	$138\frac{3}{4}$.	$48\frac{1}{2}$.	27. 11,1	variable, pluie.
11.	S. O.	6,9.	$139\frac{1}{8}$.	$47\frac{1}{2}$.	27. 11,10	ferein.
12.	S. - S. O.	7,2.	$139\frac{7}{8}$.	48.	27. 10,8	couvert, pluie.
13.	S. O. - S.	7,2.	$139\frac{7}{8}$.	48.	27. 11,2	*idem.*
14.	S. O.	6,2.	$141\frac{1}{4}$.	$45\frac{7}{8}$.	27. 11,8	variable, pluie, brouil.
15.	N. E. - S.O.	5,9.	$141\frac{3}{4}$.	$45\frac{1}{4}$.	27. 11,11	variable.
16.	S. - N.E.	5,4.	$142\frac{1}{4}$.	$44\frac{1}{8}$.	28. 0,11	*idem.*
17.	S. O.	4,9.	$143\frac{3}{4}$.	43.	27. 11,2	couvert, brouillard.
18.	S. - S. O.	4,1.	145.	$41\frac{1}{4}$.	28. 0,4	var. pluie, brouillard.
19.	N. - N.E.	3,4.	$146\frac{3}{4}$.	$39\frac{1}{4}$.	28. 0,3	couvert.
20.	N.O. - N.	4,0.	$145\frac{1}{8}$.	41.	28. 0,3	*idem*, pluie.
21.	N.O. - N.E.	3,7.	$145\frac{1}{2}$.	$40\frac{1}{8}$.	27. 11,8	variable, pluie.
22.	N. E.	2,2.	$148\frac{3}{4}$.	37.	27. 10,2	variable.
23.	S. O. -N. E.	3,8.	$145\frac{1}{2}$.	$40\frac{3}{4}$.	27. 10,7	couvert, pluie.
24.	S.	3,1.	147.	39.	27. 11,1	*idem.*
25.	S. - S. O.	3,5.	$146\frac{2}{3}$.	$39\frac{3}{4}$.	27. 11,11	variable.
26.	S. - S. O.	4,6.	$144\frac{1}{4}$.	$42\frac{1}{2}$.	28. 0,1	couv. pluie, brouill.
27.	S.O. - N.O.	5,2.	143.	$43\frac{1}{8}$.	28. 0,10	variable.
28.	S. - S. O.	4,6.	$144\frac{1}{4}$.	$42\frac{1}{2}$.	28. 1,10	ferein.
29.	S. O. - S.	3,9.	$145\frac{1}{2}$.	$40\frac{1}{4}$.	28. 1,7	variable, brouillard.
30.	S. O. - S.	4,2.	$144\frac{7}{8}$.	$41\frac{3}{8}$.	27. 11,6	*idem*, pluie.

Suite de la I.[ere] Table. *DÉCEMBRE.*

Jours du Mois.	Vents dominans.	Degrés de Chaleur. R.	D.	F.	Baromèt.	État du Ciel.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouces lignes	
1.	N. & S.	4,0.	145 ⅓.	41.	28. 0,3	var. pluie, brouillard.
2.	S. O.	3,4.	146 ½.	39 ½.	28. 0,7	*idem.*
3.	S.O. - N. E.	3,1.	147.	39.	28. 0,2	variable.
4.	S.	2,6.	147 ⅞.	38.	28. 1,8	*idem*, brouillard.
5.	S. - S.O.	2,9.	147.	38 ½.	28. 0,2	variable, pluie.
6.	S. - S. E.	3,1.	147 ⅛.	39.	27. 10,5	variable, brouillard.
7.	S. - S. E.	3,3.	146 ¾.	39 ¼.	27. 10,2	couvert, pluie, brouil.
8.	S. - O.	4,2.	144 ⅞.	41 ⅛.	27. 11,6	variable, pluie, brouil.
9.	S.O. - S. E.	4,0.	145 ⅓.	41.	27. 11,3	variable, pluie.
10.	S. - S.O.	3,4.	146 ½.	39 ½.	27. 10,0	couvert, brouillard.
11.	S. - S.O.	3,8.	146 ⅛.	40 ½.	27. 10,9	variable, pluie.
12.	S.	4,4.	144 ¾.	42.	27. 9,8	*idem.*
13.	S.	4,2.	144 ⅞.	41 ⅛.	27. 10,10	couvert, brouillard.
14.	S.	3,6.	146.	40.	27. 10,7	variable, pluie.
15.	S.	4,4.	144 ¾.	42.	27. 9,5	couvert, pluie.
16.	O. - S.O.	5,4.	142 ¼.	44 ⅛.	27. 10,0	*idem.*
17.	S. - O.	4,4.	144 ¼.	42.	27. 10,8	*idem*, brouillard.
18.	S. - S.O.	4,1.	145.	41 ¼.	27. 11,0	couvert.
19.	S. - O.	4,1.	145.	41 ¼.	27. 10,0	variable.
20.	S.	3,8.	146 ¼.	40 ½.	27. 9,3	couvert, pluie.
21.	S.O. - S.	4,0.	145 ⅓.	41.	27. 8,10	variable, pluie.
22.	S.	2,9.	147 ½.	38 ¼.	27. 9,8	var. pluie, brouillard.
23.	S. O.	2,9.	147 ½.	38 ¼.	27. 9,11	couvert.
24.	S. - S. O.	2,5.	148 ½.	37 ½.	27. 11,1	variable.
25.	S. O. - S.	1,5.	150 ⅛.	35 ⅛.	27. 11,7	couv. pluie, brouillard
26.	N. E. - S.	1,4.	150 ¾.	35 ¼.	27. 11,9	couvert.
27.	S.O. - O.	2,6.	148 ¼.	37 ½.	27. 11,9	*idem*, pluie.
28.	S.O. - N.E.	0,6.	152 ¼.	33 ⅛.	28. 0,3	variable, brouillard.
29.	S.O. - N.E.	0,3.	152 ½.	32 ½.	28. 0,6	variable.
30.	S. O. - E.	1,4.	150 ¾.	35 ¼.	28. 0,2	*idem*, pluie.
31.	N. E. - S.	1,6.	150.	35.	28. 0,1	couv. pluie, brouillard

IIe TABLE.

JANVIER.

ANNÉES.	VENTS dominans.	THERMOMÈTRE. Plus gr.^d degre de Chaleur.	Plus gr.^d degré de Froid.	Degrés moy. de Ch.	Degrés moy. de Fr.	BAROMÈTRE. Jour & Heure.	Plus grande élévation.	Jour & Heure.	Moind. élévation	Élévation moyenne.
		Degrés.	Degrés.	Deg.	Deg.		P. L.		P. L.	P. L.
1763	N.	8.	— $6\frac{1}{2}$	6.	— $2\frac{3}{4}$	26. M.	28. $3\frac{1}{2}$	30. M.	27. $4\frac{3}{4}$	28. 0.
1764	S.	10.	— 1.	$5\frac{1}{2}$	— 0.	11. M.	28. $4\frac{1}{2}$	18. M.	27. $1\frac{1}{2}$	27. $8\frac{5}{6}$
1765	S.	10.	$0\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	— 0.	28. S.	28. $3\frac{1}{2}$	3. M.	27. $2\frac{3}{4}$	27. $9\frac{1}{10}$
1766	N. E.	$4\frac{1}{4}$.	— 10.	2.	— $4\frac{1}{4}$	29. S.	28. 8.	3. M.	27. $2\frac{3}{4}$	28. $2\frac{1}{10}$
1767	S. & N.O.	$8\frac{1}{4}$.	— 13.	$2\frac{1}{4}$	— 5.	1. M.	28. $3\frac{3}{4}$	13. S.	27. $2\frac{1}{2}$	27. 10.
1768	S.O.-N.O.	$9\frac{1}{4}$.	— $14\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	— 8.	27. M.	28. $2\frac{3}{4}$	20. M.	27. $5\frac{1}{4}$	27. $9\frac{3}{10}$
1769	S.	10.	— $4\frac{3}{4}$	4.	— $1\frac{1}{4}$	14. M.	28. $3\frac{1}{2}$	19. S.	27. 7.	27. $11\frac{1}{6}$
1770	S. O.	9.	— $7\frac{1}{4}$	4.	— 2.	28. S.	28. $8\frac{1}{4}$	10. M.	27. $3\frac{1}{4}$	28. 2.
1771	N. E.	11.	— $7\frac{1}{2}$	4.	— $2\frac{1}{4}$	24. M.	28. $3\frac{1}{4}$	19. M.	27. 4.	27. $9\frac{8}{9}$
1772	N.E.-S.O.	10.	— $4\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	— 1.	14. M.	28. 4.	16. S.	26 $10\frac{1}{2}$	27. $8\frac{1}{2}$

FÉVRIER.

ANNÉES.	VENTS dominans.	Plus gr.^d degre de Chaleur.	Plus gr.^d degré de Froid.	Degrés moy. de Ch.	Degrés moy. de Fr.	Jour & Heure.	Plus grande élévation.	Jour & Heure.	Moind. élévation	Élévation moyenne.
1763	O.	$11\frac{1}{2}$.	— $0\frac{1}{4}$	$6\frac{1}{2}$	— 0.	14. S.	28. $1\frac{1}{2}$	1. M.	27. $3\frac{1}{4}$	27. 8.
1764	S. & N. E.	$10\frac{1}{2}$.	— $2\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	— 1.	21. M.	28. $5\frac{1}{4}$	1. M.	27. $2\frac{3}{4}$	28. 0.
1765	N. - N. E.	$6\frac{1}{2}$.	— $6\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	— 2.	24. M.	28. 2.	28. M.	26. $9\frac{3}{4}$	27. $10\frac{1}{2}$
1766	S. - N. E.	$8\frac{1}{2}$.	— 7.	$3\frac{1}{2}$	— 3.	20. M.	28. 7.	5. M.	27. $5\frac{1}{2}$	27. $11\frac{2}{5}$
1767	S. - S. O.	13.	— $0\frac{1}{2}$	7.	— 0.	24. M.	28. 3.	8. S.	27. 6.	27. $10\frac{2}{5}$
1768	S.	$12\frac{1}{2}$.	— $1\frac{1}{2}$	6.	— 0.	6. M.	28. $5\frac{1}{4}$	1. M.	27. $10\frac{1}{4}$	28. 0.
1769	S. - S. O.	$11\frac{1}{2}$.	— $2\frac{1}{4}$	$5\frac{3}{4}$	— 0.	20. M.	28. $3\frac{1}{4}$	8. M.	27. $3\frac{1}{4}$	27. 10.
1770	N. - S.O.	$8\frac{1}{2}$.	— $3\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{4}$	— $1\frac{1}{2}$	13. M.	28. 7.	7. S.	27. 2.	28. 0.
1771	N. E. - O.	10.	— $11\frac{1}{2}$	5.	— $4\frac{3}{4}$	18. S.	28. 5.	12. M.	27. $6\frac{1}{4}$	28. 2.
1772	S. - S. O.	14.	— 0.	$5\frac{1}{2}$	— 0.	8. M.	28. 4.	19. M.	27. 5.	27. 8.

Suite de la IIᵉ Table.

MARS.

Années.	Vents dominans.	Thermomètre. Plus gr.ᵈ degré de Chaleur.	Plus gr.ᵈ degré de Froid.	Degrés moy. de Ch.	Degrés moy. de Fr.	Baromètre. Jour & Heure.	Plus grande élévation.	Jour & Heure.	Moind. élévation.	Élévation moyenne.
		Degrés.	Degrés.	Deg.	Deg.		P. L.		P. L.	P. L.
1763	N. & O.	13.	— 4½	5¾	— 1¾	5. M.	28. 4.	2. M.	27. 6.	28. 0.
1764	N. E.	13½.	— 2¾	4¾	— 1⅕	15. M.	28. 5½	1. M.	27. 6.	28. 0.
1765	S.-S. O.	15½.	— 0¼	6¾	— 0.	23. M.	28. 1.	13. M.	27. 0.	27. 8.
1766	S.O.-S.E.	12.	— 1.	6.	— 0.	7. M.	28. 3½	26. S.	26. 9¾	27. 9½
1767	O.-S.O.	15½.	1.	6¼	— 0.	7. M.	28. 4¼	26. S.	27. 7¼	27. 11½
1768	N. E.	15.	— 5.	5½	— 2.	19. M.	28. 6.	15. M.	27. 11¼	28. 2¾
1769	O.-N.E.	13½.	— 1½	5½	— 0.	3. M.	28. 5½	12. M.	27. 3½	28. 0.
1770	O.-N.E.	12½.	— 5.	4½	— 1½	2. S.	28. 3.	9. S.	27. 2¾	27. 9¼
1771	N.-O.	14½.	— 4.	4.	— 1¾	20. M.	28. 3.	6. M.	27. 4¼	27. 9¾
1772	N. E.	11.	1.	6¼	— 0.	6. S.	28. 1½	16. S.	27. 2¼	27. 8¾

AVRIL.

Années.	Vents dominans.	Plus gr.ᵈ degré de Chaleur.	Plus gr.ᵈ degré de Froid.	Degrés moy. de Ch.	Degrés moy. de Fr.	Jour & Heure.	Plus grande élévation.	Jour & Heure.	Moind. élévation.	Élévation moyenne.
1763	S. E.	18.	1½	9¾		5. M.	28. 4.	30. M.	27. 2.	28. 0.
1764	S.O.-N.O.	15.	1½	8.		2. M.	28. 3.	9. M.	27. 0½	27. 10½
1765	S.-S. O.	17½.	3½	9¼		12. M.	28. 4½	22. S.	27. 7.	27. 10¾
1766	S.-S. E.	18½.	4.	9¾		6. S.	28. 4.	23. M.	27. 4½	27. 9½
1767	N.-N.E.	16½.	— 1.	8.		30. M.	28. 6.	21. S.	27. 8¼	28. 1.
1768	S.E.-S.O.	18.	3½	10.		11. S.	28. 4¼	29. M.	27. 7½	27. 11½
1769	N.-N.E.	20¾.	— 1½	10½		30. M.	28. 3¾	8. M.	27. 2¾	27. 10¼
1770	N.-N.O.	14.	1¼	6¾		29. S.	28. 4.	6. M.	27. 1¾	27. 10.
1771	N. E.	16½.	— 1¼	6½		27. M.	28. 4¼	15. M.	27. 8.	28. 0.
1772	N.	12.	— 1½	6½		23. S.	28. 5¼	30. M.	27. 6¼	27. 11½

Suite de la II.e Table.

MAI.

ANNÉES.	VENTS dominans.	THERMOMÈTRE. Plus gr.d degré de Chaleur.	Moindre degré de Chaleur.	Degrés moy. de Chaleur.	BAROMÈTRE. JOUR & HEURE.	Plus grande élévation.	JOUR & HEURE.	Moind. élévation	Élévation moyenne.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.		P. L.		P. L.	P. L.
1763	N. & S. O.	17.	4.	11¾	16. M.	28. 2.	1. M.	27. 3½	27. 10.
1764	N.-S.O.	22.	8.	14.	24. M.	28. 4.	12. M.	27. 7¾	28. 0.
1765	N. E.	21.	3½	12¾	11. M.	28. 2½	24. M.	27. 7.	27. 11¼
1766	O.	23.	7.	13½	15. M.	28. 3¼	10. M.	27. 5½	27. 10.
1767	S.-O.	21.	3½	11¼	1. M.	28. 5¼	30. M.	27. 8.	28. 0.
1768	N.-N. E.	24¾.	4½	14.	9. S.	28. 3½	18. S.	27. 7.	28. 0.
1769	S.-N. E.	25.	6.	12¼	2. M.	28. 5½	7. M.	27. 7¾	27. 11½
1770	N.-N. E.	24.	1½	13.	25. M.	28. 1.	12. M.	27. 7¼	27. 10¾
1771	S. - S. E.	24.	6.	14½	23. M.	28. 3¼	7. M.	27. 8¾	28. 0.
1772	N. E.	16½.	5.	11.	4. M.	28. 4.	25. S.	27. 8¼	28. 0.

JUIN.

ANNÉES.	VENTS dominans.	Plus gr.d degré de Chaleur.	Moindre degré de Chaleur.	Degrés moy. de Chaleur.	JOUR & HEURE.	Plus grande élévation.	JOUR & HEURE.	Moind. élévation	Élévation moyenne.
1763	N. & O.	24.	9.	17¼	9. M.	28. 2.	22. M.	27. 6½	27. 10¾
1764	N. - O.	30.	9.	17.	13. M.	28. 2¼	28. M.	27. 8¼	28. 0.
1765	O.	25.	11.	16½	27. S.	28. 2½	16. M.	27. 9½	28. 0.
1766	S. - O.	23½.	10¼	15½	23. M.	28. 3¼	6. M.	27. 8.	27. 11½
1767	N.	25¼.	7.	14¾	7. S.	28. 5¼	3. M.	27. 7.	28. 0¼
1768	S. - S. O.	25.	10½	15.	24. M.	28. 3.	9. M.	27. 7¼	28. 0.
1769	O.	21.	8.	14¼	7. S.	28. 4.	17. M.	27. 7¼	28. 0.
1770	S. O.	22.	9.	15.	14. M.	28. 4½	19. M.	27. 6.	28. 0.
1771	N. O.	28.	7½	14¾	3. M.	28. 5¾	16. S.	27. 4¼	28. 0½
1772	N. E.	30½.	9½	16½	8. M.	28. 5¾	1. M.	27. 10¾	28. 2½

Suite

Suite de la II.e Table.

JUILLET.

ANNÉES.	VENTS dominans.	THERMOMÈTRE. Plus gr.d degré de Chaleur.	Moindre degré de Chaleur.	Degrés moy. de Chaleur.	BAROMÈTRE. JOUR & HEURE.	Plus grande élévation.	JOUR & HEURE.	Moind. élévation	Élévation moyenne.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.		P. L.		P. L.	P. L.
1763	S.&S.O.	22.	13.	17¼.	3. M.	28. 2.	15. M.	27. 8½	27. 10¾
1764	S.-S.O.	26.	13.	18.	23. S.	28. 4.	31. S.	27. 8¾	28. 0.
1765	N.-N.E.	23½.	11.	16½.	3. S.	28. 3.	18. M.	27. 8¼	28. 0½
1766	S.-S.O.	30¼.	12.	17½.	4. M.	28. 1¾	12. M.	27. 7¾	27. 11¼
1767	O.-S.O.	27.	11.	16½.	16. M.	28. 2½	3. S.	27. 8¼	28. 1¼
1768	O.-S.E.	28¼.	12.	17½.	21. S.	28. 3¼	18. S.	27. 9¼	28. 0½
1769	N.-N.E.	28½.	11.	18.	3. M.	28. 4.	28. S.	27.10¾	28. 1½
1770	O.-N.O.	23.	11½.	16¼.	13. M.	28. 5½	8. M.	27. 8½	28. 0¾
1771	N. O.	26.	12.	17¼.	14. M.	28. 4¾	19. M.	27.10.	28. 1½
1772	N.E.-S.O.	25½.	12.	17¼.	13. S.	28. 4.	27. M.	27. 7½	28. 2½
				AOUST.					
1763	S.&S.O.	31¾.	8⅓.	18½.	20. M.	28. 2.	15. M.	27. 8¾	28. 0.
1764	N.-S.O.	22.	9.	15½.	31. M.	28. 2¼	8. S.	27. 7.	27. 11¼
1765	S.O.-N.E.	32.	11½.	19.	19. M.	28. 3½	13. M.	27. 5½	27. 11.
1766	N.-N.E.	24½.	12.	17¼.	26. M.	28. 2¾	2. M.	27. 9¾	28. 2.
1767	N.-S.O.	26¼.	11½.	17.	26. M.	28. 4½	20. M.	27. 9.	28. 1.
1768	S.-O.	21¾.	12½.	16½.	5. S.	28. 2¼	17. M.	27. 9¾	28. 0.
1769	O.	29½.	12.	17¼.	7. S.	28. 2¾	22. S.	27. 7¼	28. 0.
1770	O.-N.E.	28.	11.	18½.	4. M.	28. 3¼	15. M.	27. 11¼	28. 1¼
1771	O.-S.O.	28.	9½.	16¼.	22. S.	28. 6.	24. M.	27. 7.	28. 0½
1773	O.-S.O.	31½.	11½.	18½.	22. S.	28. 4¼	19. M.	27. 5½	28. 1½

Suite de la II.ᵉ Table.

SEPTEMBRE.

ANNÉES.	VENTS dominans.	THERMOMÈTRE. Plus gr.ᵈ degré de Chaleur.	Moindre degré de Chaleur.	Degrés moy. de Chaleur.	BAROMÈTRE. JOUR & HEURE.	Plus grande élévation.	JOUR & HEURE.	Moind. élévation	Élévation moyenne.
		Degrés.	Degrés	Degrés.		P. L.		P. L.	P. L.
1763	S.& S.O.	21.	$4\frac{1}{2}$.	$13\frac{1}{2}$.	23. S.	28. 3.	11. M.	27. $7\frac{1}{2}$	28. 0.
1764	N.E.-O.	$20\frac{1}{2}$.	$3\frac{1}{2}$.	$12\frac{1}{2}$.	26. M.	28. $5\frac{3}{4}$	14. M.	27. $8\frac{1}{2}$	28. $1\frac{1}{4}$
1765	O.-N.E.	24.	8.	$14\frac{1}{2}$.	12. M.	28. $3\frac{1}{2}$	30. S.	27. 8.	28. 1.
1766	S.-S.O.	$22\frac{1}{2}$.	$5\frac{1}{4}$.	$14\frac{1}{4}$.	17. S.	28. $4\frac{1}{2}$	8. M.	27. 9.	28. $0\frac{3}{4}$
1767	S.-N.	27.	$8\frac{1}{2}$.	$14\frac{3}{4}$.	20. M.	28. $6\frac{1}{2}$	29. S.	27. $9\frac{1}{2}$	28. $1\frac{3}{4}$
1768	S.O.-S.E.	20.	8.	$13\frac{1}{2}$.	26. S.	28. $4\frac{1}{4}$	17. M.	27. 3.	27. $11\frac{1}{4}$
1769	S.-S.O.	$21\frac{1}{2}$.	8.	$14\frac{1}{4}$.	29. S.	28. 5.	7. S.	27. $4\frac{3}{4}$	27. $10\frac{3}{4}$
1770	S.-S.O.	$23\frac{1}{2}$.	9.	16.	28. S.	28. 4.	12. M.	27. 6.	28. 0.
1771	N.E.	$24\frac{1}{2}$.	5.	14.	27. S.	28. $3\frac{1}{4}$	23. M.	27. $7\frac{1}{4}$	28. 1.
1773	S.O.	21.	$6\frac{1}{2}$.	$14\frac{1}{2}$.	15. M.	28. $4\frac{1}{2}$	8. M.	27. 7.	28. 2.
				OCTOBRE.					
1763	S.E.&N.E.	$17\frac{1}{2}$.	2.	9.	13. M.	28. $3\frac{3}{4}$	2. M.	27. 3.	28. 0.
1764	S.-S.O.	$15\frac{1}{2}$.	1.	$8\frac{1}{2}$.	15. M.	28. 3.	13. S.	27. 3.	27. $11\frac{1}{2}$
1765	S.-S.O.	$17\frac{1}{2}$.	3.	$10\frac{1}{2}$.	16. S.	28. $3\frac{1}{2}$	4. S.	27. $1\frac{1}{2}$	27. $9\frac{1}{4}$
1766	S.-S.O.	$19\frac{1}{2}$.	3.	11.	17. M.	28. $6\frac{1}{4}$	8. M.	27. $3\frac{1}{2}$	27. 11.
1767	S.-S.O.	18.	$2\frac{1}{2}$.	9.	27. S.	28. $5\frac{1}{4}$	4. M.	27. 5.	28. $0\frac{1}{2}$
1768	S.O.	19.	4.	$10\frac{1}{2}$.	20. S.	28. 4.	4. M.	27. $6\frac{1}{4}$	27. $11\frac{1}{2}$
1769	N.E.	$13\frac{1}{2}$.	− 2.	7.	13. M.	28. $4\frac{3}{4}$	30. S.	27. $6\frac{1}{4}$	28. $0\frac{1}{4}$
1770	S.-S.O.	$15\frac{1}{2}$.	2.	$9\frac{1}{4}$.	7. M.	28. $4\frac{1}{2}$	22. S.	27. 2.	27. $10\frac{1}{4}$
1771	S.-S.O.	17.	$3\frac{1}{2}$.	$9\frac{1}{2}$.	21. M.	28. $6\frac{1}{4}$	4. M.	27. $6\frac{1}{4}$	28. 1.
1773	S.-S.O.	$19\frac{1}{2}$.	3.	$11\frac{1}{4}$.	15. M.	28. $5\frac{1}{2}$	4. M.	27. $6\frac{1}{2}$	28. 2.

Suite de la IIe Table.

NOVEMBRE.

ANNÉES.	VENTS dominans.	THERMOMÈTRE. Plus gr.^d degré de Chaleur.	Plus gr.^d degré de Froid.	Degrés moy. de Ch.	Fr.	BAROMÈTRE. JOUR & HEURE.	Plus grande élévation.	JOUR & HEURE.	Moind. élévation	Élévation moyenne.
		Degrés	*Degrés.*	*Deg.*	*Deg.*		*P. L.*		*P. L.*	*P. L.*
1763	S.&N.E.	15.	— 5½.	6.	— 2½	14. M.	28. 5.	21. M.	27. 5½	28. 0.
1764	N.E.-O.	13½.	— 0½.	5.	— 0.	1. S.	28. 2½	6. S.	27. 5.	27. 10.
1765	S.-S.O.	13.	— 5.	5½	— 1¾	17. S.	28. 3.	4. M.	27. 6.	27. 11¼
1766	S.	14.	— 1½.	6¼	— 0.	5. S.	28. 6¼	19. M.	27. 4½	28.- 1¼
1767	S. O.	14½.	0½.	7.	— 0.	20. M.	28. 6.	16. M.	27. 5.	28. 2½
1768	S.-S.O.	12.	— 0.	6¼	— 0.	6. M.	28. 5¾	22. M.	26. 8½	27. 10½
1769	S. O.	16½.	— 4¾.	7¼	— 2¼	28. M.	28. 8.	14. M.	27. 5¾	27. 11¼
1770	S.-S.O.	13.	— 1.	6½	— 0.	21. S.	28. 2¼	2. M.	27. 1.	27. 8½
1771	S. O.	10.	— 2½.	5¼	— 0.	18. S.	28. 6½	7. M.	27.10¼	28. 3¼
1773	S. O.	12.	— 1½.	6¼	— 0.	30. S.	28. 7.	12. M.	27. 0.	27. 8.

DÉCEMBRE.

ANNÉES.	VENTS dominans.	Plus gr.^d degré de Chaleur.	Plus gr.^d degré de Froid.	Ch.	Fr.	JOUR & HEURE.	Plus grande élévation.	JOUR & HEURE.	Moind. élévation	Élévation moyenne.
1763	S.&S.O.	13½.	— 1¼.	5.	— 0.	3. M.	28. 4½	13. S.	26. 7¼	27. 8½
1764	S.-E.	10½.	— 4½.	3¾	— 1½	4. M.	28. 2.	6. S.	27. 2½	27. 8.
1765	S.-N.E.	10.	— 6½.	2½	— 2¾	17. M.	28. 3¼	11. M.	27. 0¼	27. 11¼
1766	S.-N.E.	9.	— 4½.	2¼	— 1.	28. S.	28. 5½	30. S.	27. 3.	28. 0½
1767	S. E.	10.	— 9½.	3½	— 4½	3. S.	28. 6¼	20. M.	27. 6.	28. 0.
1768	S.	8.	— 6¼.	4½	— 2.	12. M.	28. 5¼	1. M.	27. 5¼	28. 0¾
1769	S.	10½.	— 4½.	5¼	— 1¼	1. S.	28. 6¼	23. S.	26. 11.	28. 1¼
1770	S.-S.O.	10½.	— 1½.	5.	— 0.	2. M.	28. 2¼	20. S.	27. 6½	27. 11¼
1771	S. O.	9½.	1½.	5½	— 0.	1. M.	28. 2½	16. M.	27. 2¼	27. 9½
1773	S.-S.O.	11.	— 2.	4½	— 0.	1. M.	28. 6¼	19. S.	27. 3¼	27. 9½

III.e TABLE.

Mois.	Vents dominans.	Thermomètre. Plus gr. degré de Chal.	Moindre degré de Chal.	Degré moyen de Chal.	Degré moyen de Froid.	Baromètre. Heure du Jour.	Plus grande élévation.	Heure du Jour.	Moindre élévation.	Élévation moyenne.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	Degrés.		P. L.		P. L.	P. L.
Janv..	S.&S.O.	9,0.	— 6,9.	3.9.	— 2,7.	Mid.	28.3,9.	Mid.	27.2,9.	27.10,7.
Fév..	S.-S.O.	10,6.	— 3,5.	4,9.	— 1,2.	Mat..	28.3,7.	Mat.	27.3,6.	27.10,9.
Mars..	O.-N.E.	13,6.	— 2,4.	5,5.	— 0,8.	M.M.	28.3,1.	Soir.	27.3,5.	27.10,7.
Avril.	N.-N.E.	16,5.	1,5.	8,5.	......	M.S.	28.3,7.	Mat..	27. 4.	27.11,2.
Mai..	N.-N.E.	21,8.	4.9.	12,8.	......	Mat..	28.2,11.	Mat..	27.5,11.	27.11,3.
Juin..	O.-N.	25,4.	9,1.	15,6.	......	Mat..	28.3,0.	Mat..	27.6,3.	28. 0,1.
Juillet	O.-S.O.	26,0.	11,8.	17,2.	......	Mid.	28.2,11.	Mat..	27.7,4.	28. 0,6.
Août.	S.O.-O.	27,5.	10,9.	17,4.	......	Mat..	28.2,10.	Mat..	27.6,8.	28. 0,4.
Sept..	S.O.-S.	22,5.	6,5.	14,2.	......	Soir.	28.3,8.	Mid.	17.5,11.	28. 0,6.
Oct..	S.O.-S.	17,2.	2,4.	9,5.	......	Mat..	28.3,11.	Mat..	27.3,8.	27.11,8.
Nov..	S.O.-S.	13,3.	— 2,2.	6,1.	— 0,7.	Soir.	28.4,4.	Mat..	27.3,3.	27.11,5.
Déc...	S.-S.O.	10,2.	— 4,2.	4.2.	— 1,3.	Mat..	28.3,10.	Soir.	27.2,1.	27.10,8.

IV.e TABLE.

Mois.	Vents dominans.	Thermomètre. Deg. moy. de Chaleur.	Deg. moy. de Froid.	Baromètre.	État du Ciel.
		Degrés.	Degrés.	Pouces. Lignes.	
Janvier...	S. & S. O.	2,5.	— 1.	27. 11,9.	Chaud humide.
Février...	S. - S. O.	4.3.	— 0,3.	27. 10,2.	*Idem.*
Mars....	N. E. - O.	4.8.	— 0,1.	27. 11,0.	Variab. humide.
Avril....	N. E. - N.	8,6.	......	27. 11,2.	*Idem.*
Mai.....	S. O. - N.	13,1.	......	28. 0,0.	*Idem.*
Juin.....	O. - S. O.	15,3.	......	28. 0,8.	*Idem.*
Juillet...	O. - S. O.	17,2.	......	28. 0,0.	*Idem.*
Août....	S. O. - O.	17,2.	......	28. 0,4.	Serein sec.
Septembre.	S. O. - S.	14,5.	......	28. 0,5.	*Idem.*
Octobre...	S. O. - S.	9,5.	......	27. 11,2.	Variab. humide.
Novembre.	S. O. - S.	5,8.	— 0,2.	27. 11,9.	*Idem.*
Décembre..	S. - S. O.	3,6.	— 0,5.	27. 10,4.	*Idem.*

V.e TABLE.

ANNÉES.	VENTS dominans.	THERMOMÈTRE. Plus gr. degré de Ch.	Moindre degré de Chal.	Degré moy. de Ch.	Degré moy. de Froid.	BAROMÈTRE. Plus gr. élévation.	Moindre élévation.	Élévation moyenne.
		Deg.	Degrés.	Degres.	Degrés.	P. L.	P. L.	P. L.
1763.	S. & S.O.	17,6	— 3,5	10,5	— 2,3	28. 3,1	27. 4,6	27. 11,0
1764.	N.E.-S.O.	17,5	— 2,,5	9,8	// //	28. 3,8	27. 5.2	27. 11,1
1765.	S. - N. E.	18.	— 4,7	10,0	— 2,0	28. 3,0	27. 4,6	27. 10,10
1766.	S.	17,5	— 4,8	10,0	— 3,0	28. 4,8	27. 5,1	27. 11,9
1767.	S. - S. O.	18,5	— 6,0	9,7	— 4.7	28. 4,11	27. 6,10	28. 0,5
1768.	S. - S. O.	17,7	— 7,0	10,2	— 4.0	28. 4,2	27. 6,8	28. 0,9
1769.	S. - N. E.	18,2	— 3,0	10,2	— 1,6	28. 4,8	27. 5,1	27. 11,9
1770.	S. - S. O.	17,0	— 3,6	9,8	— 0,5	28. 4,2	27. 4,11	27. 11,4
1771.	N. E. - S. O.	18,2	— 5,4	9,8	— 3,0	28. 4,5	27. 6,8	28. 0,2
1772.	N. E. - S. O.	17,8	— 2,0	10,0	— 1,0	28. 4,8	27. 6,0	27. 11,5

VI.e TABLE.

TABLES.	VENTS dominans.	THERMOMÈTRE. Plus gr. deg. de Chaleur.	Moindre degré de Chaleur.	Degré moy. de Chaleur.	Degré moyen de Froid.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	Degres.
III.e Table.	S.O.&S.	17,8	— 3,8	9,9	— 1,2
IV.e Table.	S.O.&S.	....	....	9.4	— 0,5
V.e Table.	S.&S.O.	17,8	— 4,2	10,0	— 2,2
RÉSULTAT général. . . .	S.&S.O.	17,8	— 4,0	9,9	— 1,3

TABLES.	VENTS dominans.	BAROMÈTRE. Jour & heure	Plus gr.de élévation.	Jour & heure	Moindre élévation	Élévation moyenne.	État du Ciel.
			P. L.		P. L.	P. L.	
III.e Table.	S.O.&S.	Matin.	28. 3,7	Matin.	27. 4,7	27. 11,5	Variable humide.
IV.e Table.	S.&S.O.	....	......	....	......	27. 11,7	
V.e Table.	S.O.&S.	....	28. 3,5	....	27. 4,7	27. 11,5	
RÉSULTAT général. . . .	S.&S.O.	Matin.	28. 3,6	Matin.	27. 4,7	27. 11,5	

VII.ᵉ TABLE.

MOIS.	MATIN.								SOIR.							
	Nord	N. E.	N.O.	Sud.	S. E.	S. O.	Eſt.	Oueſt.	Nord	N. E.	N.O.	Sud.	S. E.	S. O.	Eſt.	Oue
Janvier...	34.	56.	18.	80.	24.	52.	21.	27.	44.	45.	17.	69.	27.	50.	21.	38.
Février...	33.	43.	14.	79.	19.	55.	9.	30.	29.	42.	16.	65.	20.	46.	10.	54.
Mars......	38.	65.	27.	51.	23.	40.	20.	46.	40.	52.	33.	39.	27.	47.	26.	46.
Avril....	58.	46.	36.	39.	26.	43.	14.	38.	44.	53.	39.	43.	26.	41.	19.	34
Mai.....	44.	57.	26.	44.	26.	55.	15.	43.	45.	45.	32.	53.	21.	52.	25.	37.
Juin....	42.	38.	45.	44.	13.	45.	8.	62.	30.	34.	47.	37.	15.	55.	15.	67.
Juillet....	32.	34.	43.	47.	15.	67.	12.	61.	31.	24.	38.	45.	6.	64.	23.	79.
Août....	37.	39.	27.	45.	15.	65.	17.	65.	42.	33.	29.	38.	14.	65.	20.	69.
Septemb.	24.	32.	28.	69.	28.	65.	8.	46.	29.	33.	27.	66.	22.	72.	8.	43.
Octobre..	16.	37.	26.	94.	30.	69.	8.	30.	25.	33.	23.	62.	33.	82.	15.	37.
Novemb.	17.	37.	28.	81.	11.	88.	8.	31.	23.	34.	25.	65.	15.	83.	14.	41.
Décemb.	26.	38.	9.	85.	30.	73.	19.	30.	24.	31.	12.	78.	33.	73.	26.	32.
TOTAL des [illegible] années	402.	522.	327.	758.	260.	717.	159.	509.	406.	459.	339.	660.	259.	730.	222.	177.

VIII.ᵉ TABLE.

MOIS.	NORD.	N. E.	N. O.	SUD.	S. E.	S. O.	EST.	OUEST
Janvier...	7.	9.	1.	22.	2.	12.	//.	3.
Février...	3.	6.	//.	21.	2.	13.	1.	9.
Mars....	3.	16.	5.	8.	2.	8.	3.	11.
Avril....	11.	13.	8.	6.	2.	7.	//.	5.
Mai.....	12.	9.	2.	8.	3.	14.	1.	7.
Juin.....	2.	3.	8.	8.	1.	10.	1.	18.
Juillet...	5.	2.	4.	4.	//.	15.	1.	19.
Août....	4.	3.	5.	4.	//.	18.	1.	17.
Septembre.	1.	4.	3.	12.	4.	18.	1.	4.
Octobre...	//.	2.	1.	20.	3.	21.	//.	5.
Novembre.	2.	6.	5.	16.	//.	21.	//.	3.
Décembre..	1.	5.	//.	22.	3.	16.	1.	5.
Résultats pour l'année.	51.	78.	42.	151.	22.	173.	10.	106.

IX.e TABLE.

MOIS.	JOUR.		NUIT.		NOMBRE DES JOURS				
	Pluie.	Neige.	Pluie.	Neige.	Couvert.	Serein.	Brouill.	Tonner.	Aur. bor.
Janv..	77.	21.	51.	21.	234.	76.	43.	//.	//.
Févr..	88.	12.	71.	7.	230.	53.	27.	//.	1.
Mars..	89.	19.	52.	7.	189.	121.	9.	3.	1.
Avril.	123.	8.	65.	.....	180.	119.	2.	3.	4.
Mai...	116.	.....	48.	.....	176.	134.	3.	14.	//.
Juin..	137.	.....	62.	.....	188.	112.	//.	23.	1.
Juillet	130.	.....	55.	.....	174.	136.	//.	24.	//.
Août.	100.	.....	45.	.....	146.	164.	2.	20.	5.
Sept..	111.	.....	51.	.....	150.	150.	10.	10.	3.
Octob	114.	.....	77.	.....	175.	135.	34.	2.	4.
Nov..	116.	4.	91.	2.	214.	86.	70.	//.	//.
Déc...	123.	3.	72.	4.	226.	84.	57.	//.	2.
TOTAL des 10 années	1324.	67.	740.	41.	2282.	1370.	257.	99.	21.

X.e TABLE.

MOIS.	NOMBRE DES JOURS						
	Pluie.	Neige.	Couvert.	Serein.	Brouill.	Tonner.	Aur. bor.
Janvier...	11.	4.	23.	8.	4.	//.	//.
Février...	12.	2.	23.	5.	3.	//.	//.
Mars....	12.	2.	19.	12.	1.	//.	//.
Avril....	16.	1.	18.	12.	//.	//.	1.
Mai.....	15.	.....	18.	13.	//.	2.	//.
Juin.....	19.	.....	19.	11.	//.	2.	//.
Juillet....	18.	.....	17.	14.	//.	3.	//.
Août....	14.	.....	15.	16.	//.	2.	1.
Septembre.	15.	.....	15.	15.	1.	1.	1.
Octobre....	17.	.....	18.	13.	4.	//.	1.
Novembre.	17.	1.	21.	9.	7.	//.	//.
Décembre..	17.	1.	23.	8.	6.	//.	1.
Résultats pour l'année moyenne.	183.	11.	229.	136.	26.	10.	5.

XI.e TABLE.

MOIS.	NOMBRE DES JOURS							
	Pluie.	Neige.	Couvert.	Serein.	Variable.	Brouill.	Tonn.	Aur. bor.
Janvier.......	11.	4.	19.	1.	11.	3.	//.	//.
Février.......	17.	2.	20.	//.	9.	2.	//.	//.
Mars.........	13.	2.	8.	9.	14.	//.	//.	//.
Avril........	21.	1.	3.	6.	21.	//.	//.	//.
Mai..........	17.	.....	5.	9.	17.	//.	2.	//.
Juin........	17.	.....	6.	4.	20.	//.	4.	//.
Juillet........	18.	.....	2.	12.	17.	//.	3.	//.
Août........	11.	.....	1.	16.	14.	//.	3.	//.
Septembre....	11.	.....	1.	16.	13.	1.	2.	2.
Octobre......	16.	.....	7.	10.	14.	9.	//.	2.
Novembre....	18.	.....	12.	4.	14.	9.	//.	//.
Décembre....	19.	.....	13.	//.	18.	13.	//.	//.
Résultats pour l'année moyenne.......	189.	9.	97.	87.	182.	37.	14.	4.

XII.e TABLE.

RÉSULTATS des Tables.	NOMBRE DES JOURS.							
	Pluie.	Neige.	Couvert.	Serein.	Variable.	Brouill.	Tonn.	Aur. bor.
Résultats de la X.e Table.	183.	11.	229.	136.	.....	26.	10.	5.
Résultats de la XI.e Table.	189.	9.	97.	87.	182.	37.	14.	4.
Résultat général...	186.	10.	97.	87.	182.	31.	12.	5.

Suite

XIIIe TABLE.

Année.	Jour du Mois.	Degrés extrêmes de Froid, à Paris.	à Montmorenc	à St-Germain-en-Laye.	à Ratisbonne.	à Péterfbourg.	à Rome.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*
1766.	11 Janvier	— 10.	— 10.	— $12\frac{1}{2}$.	— 17.	— 27. le 19 Janvier.	— 3.

Année.	Jour du Mois.	Degrés extrêmes de Froid, à Paris. M. Meffier.	Obferv. Royal.	hors des murs.	à Vincennes. M. Adanfon.	à Montmorency.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*
1767.	7 Janvier.	— 13.	— $10\frac{1}{2}$.	— 14.	— $11\frac{3}{4}$.	— $10\frac{1}{4}$.

Année.	Jour du Mois.	à Dantzik.	à Cologne.	à Hall en Suiffe.	à Bitche dans la Lorraine Allemande.	à Stockolm.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*
1767.	7 Janvier.	— 14.	— $13\frac{1}{2}$.	— 15.	— 19.	— $17\frac{1}{2}$.

Année.	Jour du Mois.	Degrés extrêmes de Chaleur, à Paris. M. Meffier.	Obferv. Royal.	M. de Fouchy.	M. Briffon.	à Montmorency.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*
1772.	26 Juin.	$31\frac{1}{2}$.	32.	$31\frac{1}{2}$.	28.	25.

Année.	Jour du Mois.	Degrés extrêmes de Chaleur, à Paris. M. Meffier.	M. de Gouvernet.	M. Briffon.	M. Lavoifier.	M. Nicolet, au Louvre.	Aux Chartreux.	à Montmor.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*
1773.	14 Août.	$31\frac{1}{2}$.	$28\frac{1}{2}$.	$28\frac{1}{4}$.	$30\frac{1}{2}$.	30.	$30\frac{1}{2}$.	$27\frac{1}{2}$.

Suite de la XIII.e Table.

ANNÉES.	JOURS du MOIS.	ÉLÉVATION extrême du Mercure, à Paris.	ANNÉES.	JOURS du MOIS.	Abaissement extrême du Mercure, à Paris.
		Pouces. Lign.			Pouces. Lign.
1766...	29 Janvier, à 8h du soir....	28. 8,0.	1763...	12 Décembre, à 5h du soir...	26. 7,3.
1769...	28 Novembre, à 9h du soir....	28. 8,0.	1768...	28 Novembre, à midi.......	26. 8,5.
1770...	28 Janvier, à 10h du soir....	28. 8,3.			
1774...	24 Décembre, à 10h du matin...	28. 9,1.			

XIV.e TABLE.

MOIS.	Élévation moyenne du Baromètre. à PARIS.	Élévation moyenne du Baromètre. à Montmorency.	Degrés moyen de chal. à PARIS.	Degrés moyen de chal. à Montmor.	Degrés moyen de froid. à PARIS.	Degrés moyen de froid. à Montmor.
	Pouces. Lignes.	Pouces. Lignes.	Degrés.	Degrés.	Degrés.	Degrés.
Janvier...	27. 10,7.	27. 8,0.	2,9.	2,1.	— 1,4.	— 1,6.
Février...	27. 10,9.	27. 9,4.	4,1.	3,3.	— 1,0.	— 0,6.
Mars....	27. 10,7.	27. 9,5.	4,6.	4,4.	— 0,0.	— 0,0.
Avril...	27. 11,2.	27. 9,3.	7,9.	7,2.		
Mai....	27. 11,3.	27. 9,5.	12,9.	11,9.		
Juin....	28. 0,1.	27. 10,2.	15,2.	14,0.		
Juillet...	28. 0,6.	27. 10,4.	17,2.	15,2.		
Août...	28. 0,4.	27. 10,4.	17,4.	15,6.		
Septemb.	28. 0,6.	27. 9,8.	14,7.	13,5.		
Octobre.	27. 11,8.	27. 10,3.	9,5.	9,0.		
Novemb.	27. 11,5.	27. 9,0.	5,5.	5,6.	— 0,5.	— 0,4.
Décemb.	27. 10,8.	27. 9,6.	4,5.	5,6.	— 1,8.	— 1,4.
Résultats pour l'année moyenne.	27. 11,5.	27. 9,6.	9,7.	8,9.	— 1,1.	— 1,0.

XV.e TABLE.

Jours du Mois.	Températures à Paris.	Températures éloignées.
	Année 1764.	
	Novembre.	
6.	Couvert, très-grand vent; barom. descendit de $7^{l}\frac{1}{4}$, de $28^{p}\ 4^{l}$ à $27^{p}\ 5^{l}$.	Tremblement de terre à *Oxford.*
	Année 1765.	
	Janvier.	
6.	Couvert, pluie; baromètre $27^{p}\ 5^{l}$.	Tremblement de terre à *Comorre* & à *Raab.*
13.	Couvert, baromètre $27^{p}\ 10^{l}$.	Tremblement de terre au bourg de *Pranden* en Autriche.
18.	Couvert, baromètre $27^{p}\ 10^{l}\frac{1}{4}$.	Tremblement de terre à *Sala* dans le duché de Parme.
	Février.	
9.	Couvert, neige; barom. $28^{p}\ 1^{l}$.	Tremblement de terre à *Irtisch* en Sibérie.
14.	Couvert, baromètre $27^{p}\ 9^{l}\frac{1}{2}$.	Tremblement de terre à *Abbeville.*
	Mars.	
21.	Serein; baromètre $28^{p}\ 0^{l}$.	Tremblement de terre à *Carlstadt* en Wermérandie.
	Avril.	
8.	Couvert; le baromètre descendit de 28^{p} à $27^{p}\ 10^{l}\frac{1}{4}$.	Tremblement de terre à *Limoges.*
12.	Serein; thermom. à $4^{d}\frac{1}{2}$ de dilatat. n'est pas descendu au-dessous de o pendant ce mois.	Neige à *Naples* & grand froid en *Italie.*
20.	Couvert; le baromètre descendit de $27^{p}\ 8^{l}\frac{1}{2}$ à $27^{p}\ 7^{l}\frac{1}{4}$.	Tremblement de terre à *Florence.*
22.	Serein; le baromètre descendit de $27^{p}\ 9^{l}\frac{1}{2}$ à $27^{p}\ 8^{l}\frac{1}{4}$.	Tremblement de terre à *Gènes.*

Suite de la XVe Table.

Jours du Mois.	TEMPÉRATURES à PARIS.	TEMPÉRATURES éloignées.
	ANNÉE 1765.	
	Suite d'Avril.	
29.	Pluie, tonnerre; le baromètre marquoit $27^p\ 8^l\frac{1}{4}$.	Météore semblable à une fusée à *Naples*.
	Mai.	
19.	Serein; le baromètre $27^p\ 10^l\frac{1}{2}$.	Tremblement de terre dans le pays de *Foix*.
	Juin.	
3.	Couvert; le baromètre $28^p\ 0^l$.	Ouragan à *Châteaudun*.
20.	Serein; le baromètre $28^p\ 0^l$.	Ouragan dans le *Lyonnois*.
22.	couvert, peu de pluie; baromètre $27^p\ 11^l\frac{1}{2}$.	Inondation à *Chietti*, capitale de l'Abbruzze.
	Juillet.	
14.	Couvert; le baromètre $27^p\ 9^l\frac{1}{4}$.	Tremblement de terre à *Pitea*, en Bothnie.
26.	Couvert, pluie; le baromètre marquoit $27^p\ 11^l\frac{1}{2}$.	Tremblement de terre à *Lalnau*.
	Août.	
26.	Très-chaud; le thermomètre $30^d\frac{1}{4}$.	Chaleur excessive à *Londres*.
	Octobre.	
2.	Pluie, grand vent; le baromètre $27^p\ 2^l\frac{1}{2}$.	Pluie abondante & globe de feu sorti de terre, qui a fait de grands ravages en *Limosin*.
4.	Vent violent, pluie; le baromètre $27^p\ 1^l\frac{1}{4}$.	Ouragan considérable en *Normandie* & dans une grande partie de la France.
20.	Serein; baromètre $28^p\ 0^l$.	Globe de feu à *Moulins*.
	Décembre.	
13.	Couvert, le baromètre $27^p\ 11^l$.	Tremblement de terre à *Lisbonne*.

Suite de la XVe Table.

Jours du Mois.	TEMPÉRATURES à PARIS.	TEMPÉRATURES éloignées.
	Année 1765. *Suite de Décembre.*	
25.	Serein; therm. 6^d de condensation.	Thermomètre à 3$^d\frac{1}{2}$ de condensation à *Lisbonne.*
	Année 1766. *Janvier.*	
10.	Serein; baromètre 28^p 1^l.	Tremblement de terre à *Naples.*
	Mars.	
9.	Serein; baromètre 28^p 1$^l\frac{1}{2}$.	Tremblement de terre dans l'Isle d'*Antigoa* en Amérique.
	Avril.	
17.	Couvert, pluie; le baromètre marquoit 27^p 7$^l\frac{1}{2}$.	Tremblement de terre dans l'Isle de *la Grenade.*
	Mai.	
22.	Couvert, grand vent; baromètre 28^p 0$^l\frac{1}{2}$.	Tremblement de terre à *Constantinople.*
24.	Grande pluie; le barom. marquoit 27^p 10^l.	Orage considérable à *Jonzac* en Saintonge.
	Juin.	
9.	Couvert; baromètre 28^p 0^l.	Violent orage à *Aschaff-en-Bourg* en Franconie.
11.	Serein; baromètre 27^p 11$^l\frac{1}{2}$.	Trembl. de terre dans la *Jamaïque.*
	Juillet.	
8.	Serein; baromètre 28^p 0$^l\frac{1}{2}$.	Tremblement de terre à *Briançon.*
	Août.	
8.	Serein; le baromètre 28^p 2^l.	Tremblement de terre à *Vienne* en Autriche.

Suite de la XVe Table.

Jours du Mois.	Températures à Paris.	Températures éloignées.
	Année 1766.	
	Suite d'Août.	
13.	Couvert; baromètre $28^p\ 2^l$.	Ouragan furieux & tremblement de terre à *la Martinique.*
16.	Grande pluie; le baromètre marquoit $27^p\ 11^l$.	Météore appelé *Dragon*, ou *ignis lambens*, à *Coppenhague.*
	Octobre.	
6.	Couvert; baromètre $27^p\ 6^l$.	Ouragan & tremblement de terre à l'île *Saint-Eustache* en Amérique.
	Année 1767.	
	Janvier.	
21.	Couvert, neige; le baromètre marquoit $28^p\ 2^l\frac{1}{2}$.	Tremblement de terre à *Parme*, à *Bielefeld* & à *Pise.*
	Février.	
7.	Couvert, brouillard, pluie; barom. $27^p\ 9^l\frac{3}{4}$.	Tremblement de terre à *Gênes* & à *Turin.*
9.	Pluie, vent; baromètre $27^p\ 7^l$.	Tremblement de terre à *Grasse.*
	Mars.	
17.	Pluie; baromètre $27^p\ 8^l\frac{1}{4}$.	Tremblement de terre à *Comorre* en Hongrie.
	Avril.	
7.	Couvert; baromètre $28^p\ 0^l$.	Tremblement de terre à *Nantes.*
12.	Serein; baromètre $28^p\ 1^l\frac{3}{4}$.	Tremblement de terre à *Gotha*, à *Cassel*, &c.
	Juin.	
4.	Serein; baromètre $28^p\ 1^l\frac{1}{4}$.	Tremblement de terre à *Rome.*
13.	Couvert, grand vent; le baromètre marquoit $27^p\ 11^l\frac{1}{2}$.	Ouragan furieux près de *Verdun.*
22.	Couvert; baromètre $28^p\ 1^l$.	Tremblement de terre à *Cologne.*

Suite de la XV.e Table.

Jours du Mois.	Températures à Paris.	Températures éloignées.
	Année 1767.	
	Juillet.	
17.	Pluie, tonnerre considérable; le baromètre marquoit $28^{p}\ 0^{l}$.	Orage & tonnerre considérable près de *Saumur.*
20.	Couvert; baromètre $27^{p}\ 11^{l}$.	Ouragan à *Condé* en Haynault.
	Août.	
6.	Grande pluie, tonnerre considérable; le baromètre marquoit $28^{p}\ 0^{l}$.	Ouragan à *Nantes* & à *Boulogne.*
	Octobre.	
4.	Pluie, grand vent; le baromètre marquoit $27^{p}\ 5^{l}$.	Ouragan violent à *Montmorillon* près de Poitiers.
	Année 1768.	
	Mars.	
9.	Serein; baromètre $28^{p}\ 3^{l}\frac{1}{2}$.	Globe de feu à *Villefranche* en Rouergue, & en *Languedoc.*
23.	Serein, très-grand vent; baromètre $28^{p}\ 5^{l}$.	Ouragan furieux à *Dantzick.*
	Avril.	
13.	Serein; baromètre $28^{p}\ 2^{l}\frac{1}{4}$.	Tremblement de terre à *Pau.*
25.	Couvert; baromètre $28^{p}\ 0^{l}\frac{3}{4}$.	Tremblement de terre à l'*Orient.*
30.	Couvert; baromètre $27^{p}\ 8^{l}$.	Tremblement de terre à *Naples* & en *Italie.*
	Mai.	
4.	Couvert; baromètre $28^{p}\ 0^{l}$	Tremblement de terre à *Parme.*
15.	Couvert; baromètre $28^{p}\ 2^{l}$.	Tremblement de terre dans le Comté d'*Iork.*
19.	Serein; baromètre $27^{p}\ 11^{l}\frac{1}{2}$.	Tremblement de terre à *Gênes.*

Suite de la XVe Table.

Jours du Mois.	TEMPÉRATURES à PARIS.	TEMPÉRATURES éloignées.
	ANNÉE 1768.	
	Juin.	
9.	Couvert, pluie; barom. $27^{p}\ 7^{l}\frac{1}{4}$.	Tremblement de terre à *Lisbonne.*
	Août.	
20.	Chaleur médiocre; le thermomètre marquoit $21^{d}\frac{3}{4}$.	Chaleur excessive à *Rome*, à *Naples* & en *Italie.*
	Octobre.	
20.	Serein; baromètre $28^{p}\ 3^{l}\frac{1}{4}$.	Tremblement de terre à *Florence.*
28.	Aurore boréale.	Aurore boréale à *Rome* & à *Vienne* en Autriche.
	Novembre.	
4.	Doux; le thermomètre marquoit 10^{d} de dilatation.	Froid à *Drontheim*; thermomètre 11^{d} de condensation.
	Décembre.	
5.	Aurore boréale.	Aurore boréale à *Berlin*, à *Vienne* en Autriche, &c.
	ANNÉE 1769.	
	Janvier.	
	Température très-douce pendant tout le mois.	Même température à *Stockolm.*
	Mai.	
1.	Serein; le baromètre marquoit $28^{p}\ 4^{l}\frac{3}{4}$.	Ouragan & tremblement de terre à *Bagdad.*
	Juillet.	
16.	Très-chaud; le thermomètre marquoit $27^{d}\frac{1}{2}$.	Grande chaleur à *Vienne* en Autriche; thermomètre $23^{d}\frac{1}{4}$.
	Août.	
4.	Serein; baromètre $28^{p}\ 1^{l}\frac{1}{4}$.	Tremblement de terre à *Augsbourg.*

Suite

Suite de la XVe Table.

Jours du Mois.	Températures à Paris.	Températures éloignées.
	Année 1769.	
	Novembre.	
28.	Serein; baromètre $28^p\ 8^l$.	Globe de feu & autres météores ignés à *Bitche*, dans la Lorraine Allemande.
	Décembre.	
1.	Serein; baromètre $28^p\ 6^l\frac{1}{2}$. Tremblement de terre.	Tremblement de terre à *Rouen*, à *Montmorenci*, &c.
17.	Pluie, vent violent; barom. $28^p\ 5^l$.	Orage furieux à *Vienne* en Autriche.
	Année 1770.	
	Janvier.	
18.	Pluie & neige; le baromètre marquoit $28^p\ 2^l$.	Aurore boréale à *Rome*, à *Cadix*, à *Gênes*, à *Tyrnaw*.
	Février.	
27.	Vent violent; baromètre $27^p\ 4^l$.	Ouragan furieux à *Livourne*.
	Mai.	
26.	Couvert; baromètre $27^p\ 9^l\frac{1}{4}$.	Ouragan furieux à *Aumale* en Normandie.
	Juin.	
3.	Couvert; le baromètre marquoit $28^p\ 0^l\frac{1}{4}$.	Tremblement de terre très-considérable à *Saint-Domingue*.
25.	Couvert; baromètre $28^p\ 1^l\frac{1}{4}$.	Ouragan considérable à *Stockolm*.
	Juillet.	
29.	Couvert; baromètre $28^p\ 2^l$.	Tremblement de terre à *Belley*.
	Août.	
28.	Serein; baromètre $28^p\ 1^l$; aurore boréale à 2^h du matin.	Aurore boréale très-considérable à *Honfleur*.

Suite de la XV.e Table.

Jours du Mois.	TEMPÉRATURES à PARIS.	TEMPÉRATURES éloignées.
	ANNÉE 1770.	
	Septembre.	
17.	Aurore boréale.	Aurore boréale à *Vienne* en Autriche & à *Pékin.*
	Décembre.	
27.	Pluie; baromètre 27^p $9^l \frac{1}{4}$.	Tremblement de terre à *Sienne.*
	ANNÉE 1771.	
	Janvier.	
7.	Neige; baromètre 27^p $10^l \frac{1}{2}$.	Tremblement de terre à *Livourne.*
12.	Couvert; le baromètre marquoit 27^p $7^l \frac{3}{4}$.	Tremblement de terre à *Bellenese*, dans la République de Venise, & à *Livourne.*
	Mars.	
20.	Couvert; baromètre 28^p 2^l.	Tremblement de terre à *Florence.*
25.	Froid, neige; baromètre 27^p 10^l.	Neige à *Rome.*
	Juillet.	
17.	Globe de feu très-considérable; baromètre 28^p $1^l \frac{1}{2}$, Grande chal. thermomètre 26^d.	Globe de feu observé dans une grande partie de la *France.*
	Août.	
7.	Serein; baromètre 27^p $11^l \frac{1}{2}$. Très-chaud; thermomètre 28^d.	Tremblement de terre à *Livourne.*

XVIe TABLE.

Degrés au-dessous de la congélation.			Degrés au-dessous de la congélation.		
De l'Isle.	Réaumur.	Fahrenheit.	De l'Isle.	Réaumur.	Fahrenheit.
Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*
153.	O.	32.	167¼.	½	15¼.
153½.	¼	31½.	167¾.	¾	14⅔.
154.	½	31.	168¼.	VIII.	14.
154½.	¾	30⅓.	168¾.	¼	13½.
155.	I.	29¾.	169¼.	½	13.
155⅓.	¼	29⅓.	169¾.	¾	12⅓.
156.	½	28¾.	170¼.	IX.	11¾.
156⅓.	¾	28½.	170½.	¼	11½.
156¾.	II.	27½.	171.	½	10¾.
154¼.	¼	27.	171½.	¾	10.
158.	½	26½.	172.	X.	9⅔.
158⅓.	¾	26.	172½.	¼	9.
158⅔.	III.	25⅓.	173.	½	8½.
159.	¼	24¾.	173½.	¾	8.
159¾.	½	24¼.	174.	XI.	7½.
160¼.	¾	23⅔.	174½.	¼	7.
160½.	IV.	23¼.	175.	½	6⅜.
161.	¼	22¾.	175⅜.	¾	5⅞.
161½.	½	22.	175⅞.	XII.	5⅜.
162.	¾	21¼.	176½.	¼	4¼.
162¼.	V.	20¾.	177.	½	4⅜.
163.	¼	20¼.	177⅜.	¾	3⅝.
163½.	½	19⅔.	177⅞.	XIII.	3.
164.	¾	19.	178½.	¼	3½.
164½.	VI.	18⅔.	179.	½	2⅓.
165.	¼	18¼.	179⅜.	¾	1.
165⅓.	½	17½.	179¾.	XIV.	— 0¾.
165¾.	¾	17.	180¼.	¼	— 0¼.
166⅓.	VII.	16⅓.	180¾.	½	— 0⅛.
166¾.	¼	16.	181½.	¾	— 0.
			181¾.	XV.	+ 0.

Suite de la XVIe Table.

DEGRÉS au-dessus de la congélation.			DEGRÉS au-dessus de la congélation.		
De l'Isle.	Réaumur.	Fahrenheit.	De l'Isle.	Reaumur.	Fahrenheit.
Degrés.	Degrés.	Degrés.	Degrés.	Degrés.	Degrés.
153.	0.	32.	138 1/2.	1/2	48 1/2.
152 1/2.	1/4	32 1/2.	138 1/4.	3/4	49 3/8.
152 1/4.	1/2	33 1/8.	137 1/2.	VIII.	50.
152.	3/4	33.	137 1/8.	1/4	50 1/2.
151.	I.	34 1/4.	136 3/4.	1/2	51 1/8.
150 2/3.	1/4	34 3/4.	136 1/4.	3/4	51 5/8.
150 1/8.	1/2	35 3/8.	135 7/8.	IX.	52 1/8.
149 3/4	3/4	36.	135 3/8.	1/4	52 3/4.
149 1/8.	II.	36 1/2.	134 7/8.	1/2	53 1/4.
148 3/4.	1/4	37.	134 1/2.	3/4	54 7/8.
148 1/4.	1/2	37 1/2.	133 7/8.	X.	54 3/8.
147 3/4.	3/4	38 1/8.	133 3/8.	1/4	55.
147 1/4.	III.	38 3/4.	133.	1/2	55 1/2.
146 3/4.	1/4	39 1/4.	132 3/4.	3/4	56.
146 1/3.	1/2	39 3/4.	132.	XI.	56 3/8.
146 7/8.	3/4	40 3/8.	131 1/2.	1/4	57 3/4.
145 1/3.	IV.	41.	131.	1/2	58 7/8.
144 7/8.	1/4	41 5/8.	130 1/2.	3/4	58 1/4.
144 1/2.	1/2	42 1/4.	130 1/8.	XII.	59 7/8.
144.	3/4	42 3/4.	129 1/2.	1/4	59 1/2.
143 1/2.	V.	43 1/4.	129 1/8.	1/2	60.
143.	1/4	43 7/8.	128 1/2.	3/4	60 1/2.
142 1/2.	1/2	44 3/8.	128 1/8.	XIII.	61 1/8.
142.	3/4	45.	127 3/4.	1/4	61 3/4.
141 1/2.	VI.	45 1/2.	127 1/8.	1/2	62 1/4.
141.	1/4	46.	126 3/4.	3/4	62 7/8.
140 1/2.	1/2	46 5/8.	126 1/4.	XIV.	63 3/8.
140 1/8.	3/4	47 1/8.	125 3/4.	1/4	64.
139 3/8.	VII.	47 3/4.	125 1/4.	1/2	64 1/2.
139 1/4.	1/4	48.	124 7/8.	3/4	65.

Suite de la XVI.e Table.

Degrés au-dessus de la congélation.			Degrés au-dessus de la congélation.		
De l'Isle.	Réaumur.	Fahrenheit.	De l'Isle.	Réaumur.	Fahrenheit.
Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*
124 3/8.	XV.	65 1/2.	110 1/4.	1/2	82 1/2.
123 7/8.	1/4	66 1/8.	109 5/8.	3/4	83 1/4.
123 3/8.	1/2	66 3/4.	109 1/4.	XXIII.	83 3/4.
123.	3/4	67.	108 3/4.	1/4	84 3/8.
122 3/8.	XVI.	67 7/8.	108 1/4.	1/2	85.
121 3/4.	1/4	68 1/4.	107 3/4.	3/4	85 1/2.
121 1/2.	1/2	69.	107 1/4.	XXIV.	86.
121.	3/4	69 1/2.	106 3/4.	1/4	86 1/2.
120 1/2.	XVII.	70 1/8.	106 1/4.	1/2	87.
120.	1/4	70 1/2.	105 7/8.	3/4	87 1/2.
119 1/2.	1/2	71 1/4.	105 1/3.	XXV.	88 1/4.
119 1/8.	3/4	71 7/8.	104 7/8.	1/4	88 5/8.
118 1/2.	XVIII.	72 3/8.	104 1/2.	1/2	89 1/8.
118 1/8.	1/4	73.	104.	3/4	89 3/4.
117 5/8.	1/2	73 1/2.	103 1/2.	XXVI.	90 1/2.
117 1/8.	3/4	74 1/8.	103.	1/4	90 3/4.
116 5/8.	XIX.	74 3/4.	102 1/2.	1/2	91 1/2.
116 1/4.	1/4	75 3/8.	102.	3/4	92.
115 3/4.	1/2	75 7/8.	101 1/2.	XXVII.	92 5/8.
115 1/4.	3/4	76 3/8.	101.	1/4	92 2/3.
114 1/[illegible].	XX.	77.	100 1/2.	1/2	93 1/2.
114 1/4.	1/4	77 1/2.	100.	3/4	94 1/4.
113 3/4.	1/2	78.	99 1/2.	XXVIII.	95.
113 3/8.	3/4	78 3/4.	99.	1/4	95 1/2.
113.	XXI.	79 1/4.	98 1/2.	1/2	96.
112 1/2.	1/4	79 7/8.	98.	3/4	96 1/2.
112.	1/2	80 1/2.	97 1/2.	XXIX.	97.
111 1/2.	3/4	81.	97 1/8.	1/4	97 2/3.
111.	XXII.	81 1/2.	96 1/4.	1/2	98 1/4.
110 5/8.	1/4	82 3/8.	96 1/4.	3/4	98 3/4.

Suite de la XVIe Table.

DEGRÉS au-dessus de la congélation.			DEGRÉS au-dessus de la congélation.		
De l'Isle.	Réaumur.	Fahrenheit.	De l'Isle.	Réaumur.	Farhenheit.
Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*	*Degrés.*
95 3/4.	XXX.	99 1/4.	92 3/4.	1/2	102 1/4.
95 1/4.	1/4	99 3/4.	92 1/2.	3/4	102 1/2.
94 3/4.	1/2	100 1/4.	92.	XXXII.	103.
94 1/4.	3/4	100 3/4.	91 1/2.	1/4	103 1/2.
94.	XXXI.	101 1/4.	91.	1/2	104.
93 1/4.	1/4	101 3/4.	90 1/2.	3/4	104 1/2.

TROISIÈME PARTIE.

Résultats de mes Tables de Réduction.

LES Tables précédentes ont exigé beaucoup de travail, & cependant elles ne présentent qu'un petit nombre de résultats, parce que je ne donnerai ici que les plus certains & les mieux fondés; persuadé que je travaillerois plutôt à retarder les progrès de la Science météorologique qu'à les avancer, si je voulois hasarder ici toutes les conjectures que j'ai pu former en étudiant & en analysant les Tables de M. Messier. Ces conjectures peuvent m'être utiles en particulier, parce que m'étant dévoué à l'étude de la Météorologie, je serai à portée de juger par la suite si elles sont fondées ou non, & en supposant qu'elles le soient, j'aurai toujours assez le temps pour les faire connoître; mais en attendant que j'aie acquis à ce sujet des degrés de certitude qui me manquent à présent, je crois devoir être très-discret & très-réservé dans l'exposé des résultats.

Iere Table. La *Iere Table* est trop générale pour qu'elle puisse présenter des résultats satisfaisans; comme les objets qu'elle renferme sont plus resserrés dans les Tables suivantes, les

résultats qu'elles nous offriront en seront aussi & plus certains & plus faciles à tirer. Je remarquerai seulement qu'ayant comparé les degrés de chaleur & de froid de ce Calendrier météorologique avec ceux d'un pareil Calendrier météorologique que j'ai inséré dans mon *Traité de Météorologie* *, j'ai trouvé que la somme des degrés de chaleur étoit plus grande & celle des degrés de froid plus petite, dans ce nouveau Calendrier que dans le premier. Il faut faire attention que le premier Calendrier a été dressé sur les observations de M. du Hamel, qui ont été faites à la campagne, & l'on sait qu'en général les chaleurs sont moins grandes & que le froid est plus vif dans les campagnes que dans les villes. Ainsi le premier Calendrier indiquera les degrés de chaleur & de froid pour les campagnes, & celui-ci marquera la même chose pour les villes.

* *Page 141.*

II.e & III.e Tables.

Il paroît par les *II.e* & *III.e Tables*, 1.° que les vents dominans des mois d'hiver, d'été & d'automne, sont ou le Sud ou le Sud-ouest; & qu'au printemps, ce sont ceux du Nord ou de Nord-est qui dominent; 2.° que le plus grand degré de chaleur, *année commune*, est de 27 degrés $\frac{1}{2}$ dans le mois d'Août, & le plus grand degré de froid, aussi *année commune*, de 6 degrés $\frac{3}{4}$ dans le mois de Janvier, ce qui fait une différence de 34 degrés $\frac{1}{4}$ entre ces deux termes extrêmes; 3.° que la somme des plus grands degrés de chaleur de chaque mois, divisée par le nombre des mois, est de 17 degrés $\frac{1}{4}$, & la somme des plus grands degrés de froid en hiver, divisée par le nombre des mois d'hiver, est de 2 degrés $\frac{3}{4}$, ce qui établit une différence de 20 degrés; 4.° que la plus grande élévation du mercure à Paris, *année commune*, est de $28^p\ 4^l,4$ dans le mois de Novembre, & la plus petite élévation de $27^p\ 2^l,1$ au mois de Décembre, d'où résulte une différence de $1^p\ 2^l,3$: l'élévation moyenne est de $27^p\ 11^l,5$; elle a lieu assez ordinairement dans le mois de Novembre. Le mercure est en général plus élevé dans les mois d'été que dans les mois d'hiver, quoique les plus grandes élévations aient lieu en hiver. Le mercure

éprouve de plus grandes variations dans les mois d'hiver; il eſt plus fixe & plus conſtamment élevé dans ceux d'été.

IV.e Table. J'ai donné dans la *IV.e Table* le réſultat du Calendrier météorologique, qui ne renferme lui-même que les réſultats moyens des Tables de M. Meſſier. Selon cette Table, les vents dominans ſont le Sud & le Sud-oueſt; le degré moyen de chaleur de l'année eſt de 9 degrés $\frac{1}{2}$, le froid moyen d'un demi-degré; l'élévation moyenne du mercure de $27^p\ 11^l,7$, & l'état moyen du ciel, humide & variable.

V.e Table. La *V.e Table* eſt le réſultat de chaque année d'obſervations; elle nous montre, 1.° que les vents les plus dominans ſont le Sud & le Sud-oueſt; 2.° que la plus chaude de ces dix années paroît avoir été l'année 1767, où la ſomme des plus grands degrés de chaleur de chaque mois, diviſée par le nombre des mois, donne 18 degrés $\frac{1}{2}$ de chaleur pour l'année commune; mais comme on ne doit pas juger de la température d'une année par les degrés extrêmes de chaleur & de froid qu'on a éprouvé, que cela dépend plutôt de la continuité de la chaleur qui eſt aſſez exactement indiquée par le degré moyen de chaleur & de froid qui réſulte de toutes les obſervations faites pendant l'année, j'en conclus qu'il faut regarder l'année 1763 comme la plus chaude des dix années, puiſque la ſomme de tous les degrés de chaleur moyenne diviſée par le nombre des obſervations, donne 10 degrés $\frac{1}{2}$ pour la chaleur moyenne de l'année entière: 3.° que l'année 1768, ſemble pareillement avoir été la plus froide des dix années, puiſque la ſomme des plus grands degrés de froid, diviſée par le nombre des obſervations, donne 7 degrés de condenſation, & que cependant par le fait, l'année 1767 a été la plus froide, puiſque le degré de froid moyen a été de 4 degrés $\frac{3}{4}$, tandis qu'il n'a été que de 4 degrés en 1768; ſans doute que le froid a duré plus long-temps en 1767 qu'en 1768, & c'eſt cette continuité de chaleur ou de froid qui influe ſur la température d'une année & qui la caractériſe: 4.° que la plus grande élévation moyenne du mercure a été en 1767 de

28p

28p 4l,11, & la plus petite élévation moyenne de ces dix années eſt de 27p 5l,11, qui a eu lieu en 1772.

La *VI.e Table* nous offre un réſultat plus exact encore, puiſqu'elle contient le réſultat de tous les réſultats précédens; or, par cette Table, nous voyons que dans l'*année commune*, 1.° les vents dominans ſont le Sud & le Sud-oueſt; 2.° la ſomme des plus grands degrés de chaleur de chaque mois, diviſée par le nombre des mois, donne 17,8 degrés; 3.° la ſomme des plus grands degrés de froid, diviſée également par le nombre des mois d'hiver ou par cinq, donne 4,0 degrés de condenſation; 4.° la ſomme des degrés de chaleur moyenne de chaque mois, diviſée par le nombre des mois, donne 9,9 degrés pour la chaleur moyenne de l'année; 5.° la ſomme des degrés moyens de froid, &c. donne 1,3 degrés de condenſation pour le froid moyen de l'année; 6.° la ſomme des plus grandes élévations du mercure, diviſée, &c. donne 28p 3l,6, & cette élévation a plus ſouvent lieu le matin que le ſoir; 7.° la ſomme des plus petites élévations du mercure, diviſée, &c. donne 27p 4l,7, & elle a lieu auſſi le matin; 8.° enfin la ſomme des élévations moyennes de chaque mois, diviſée, &c. donne 27p 11l,5 pour l'élévation moyenne de l'année. Voilà, ce me ſemble, le réſultat le plus exact qu'on puiſſe obtenir, paſſons aux autres Tables. VI.e Table.

La *VII.e Table* indique les vents qui ont ſoufflé matin & ſoir pendant dix ans : voici l'ordre dans lequel les huit vents principaux ont régné : VII.e Table.

Matin.

S. — S. O. — N. E. — O. — N. — N. O. — S. E. — E.

Soir.

S. O. — S. — O. — N. E. — N. — N. O. — S. E. — E.

La *VIII.e Table* eſt le réſultat de la Table précédente par rapport à l'*année commune :* ſuivant cette Table, voici l'ordre des vents qui doivent ſouffler plus ou moins fréquemment : VIII.e Table.

S. O. — S. — O. — N. E. — N. — N. O. — S. E. — E.

En général le vent d'Eſt ſouffle très-rarement dans le climat de Paris. On verra auſſi dans cette même Table, que le vent dominant en Janvier, Février & Décembre eſt le Sud; en Mars & Avril, le Nord-eſt; en Mai, Septembre, Octobre & Novembre, le Sud-oueſt; en Juin & Juillet l'Oueſt, & en Août le Sud-oueſt & l'Oueſt.

IX.ᵉ Table. Il paroît par la *IX.ᵉ Table,* 1.° que la pluie & la neige tombent bien plus fréquemment pendant le jour que pendant la nuit; il y a une différence de près de moitié entre les quantités qui expriment les nombres de jours ou de nuits où il eſt tombé de l'eau; à l'égard de la grêle, je ne crois pas qu'on en ait jamais vu tomber la nuit: 2.° le nombre des jours couverts a ſurpaſſé de près de moitié celui des jours ſereins, &c. les deux Tables ſuivantes vont nous fournir des réſultats plus exacts.

X.ᵉ & XI.ᵉ Tables. Les *X.ᵉ & XI.ᵉ Tables* préſentent des réſultats différens à l'égard des jours ſereins & couverts, parce que dans la *X.ᵉ Table* j'ai déſigné ſous le nom de *jours couverts* ceux où le Soleil ne s'eſt point montré, & ſous le nom de *jours ſereins,* ceux où le Soleil a paru pendant quelques heures de la journée; au lieu que dans la *XI.ᵉ Table,* j'ai cru devoir adopter une troiſième diviſion pour y placer les jours où la température a été inconſtante, je les déſigne ſous le nom de *variables.* Il paroît par cette Table, 1.° que le mois d'Avril eſt le plus pluvieux, & les mois d'Août & de Septembre ſont les moins pluvieux; cependant ces deux mois & celui d'Août ſur-tout, paſſent avec raiſon pour ceux où les quantités de pluie ſont les plus grandes, quoique le nombre des jours de pluie y ſoit moindre que dans les autres mois. De tous les jours de l'année, il n'y en a qu'un ſeul où il ne ſoit point tombé d'eau pendant dix ans; ſavoir, le 18 Octobre: 2.° que le nombre des jours couverts eſt le plus grand en Février & le moindre en Août & Septembre, *& vice verſâ* pour les jours ſereins: 3.° que le nombre des jours variables eſt le plus grand en Avril & le

moindre en Février : 4.° que les brouillards sont plus fréquens en Décembre qu'en tout autre mois de l'année.

La *XII.e Table* contient le résultat des deux précédentes; elle fixe pour l'*année commune* le nombre des XII.e Table.

Jours de
- neige...... à 10.
- pluie....... à 186.
- couverts.... à 97.
- sereins..... à 87.
- variables.... à 182.
- brouillards... à 31.
- tonnerre.... à 12.
- aurore boréale à 4.

Voici une Table qui indique tous les résultats que j'ai donnés jusqu'à présent pour l'année moyenne; on se souviendra que ce sont des résultats moyens.

ANNÉE MOYENNE.	THERMOMÈTRE.				BAROMÈTRE.		
	Plus grand degré de Chaleur.	Plus grand degré de Froid.	Degré moyen de Chaleur.	Degré moyen de Froid.	Plus grande élévation.	Moindre élévation.	Élévation moyenne.
	Degrés. 27. 8.	Degrés. — 4. 0.	Degrés. 9. 9.	Degrés. — 1. 3.	pouces lignes. 28. 3,6.	pouces lignes. 27. 4,7.	pouces lignes. 27. 11,5.

ANNÉE MOYENNE.	NOMBRE DES JOURS DE								VENTS domin.	Variable & humide.
	Neige.	Pluie.	Couvert.	Serein.	Variable.	Brouill.	Tonn.	Aur.bor.		
	10.	186.	97.	87.	182.	31.	12.	4.	Sud & S. O.	

On voit dans la *XIII.e Table* que le plus grand degré de froid observé à Paris pendant dix ans, a été de 14 deg. $\frac{1}{2}$ de condensation le 5 Janvier 1768; ce froid a été général XIII.e Table.

dans toute l'Europe, aussi-bien que ceux des 11 Janvier 1766 & 7 Janvier 1767.

Le plus grand degré de chaleur observé aussi à Paris pendant le même espace de dix années, a été de 31 degrés $\frac{1}{2}$ de dilatation le 26 Juin 1772; la différence entre les deux extrêmes de froid & de chaud, a été de 46 degrés.

La plus grande élévation du mercure a été observée de $28^p\ 8^l,3$ le 28 & le 29 Janvier 1770 *, & la plus petite élévation a été de $26^p\ 7^l,3$ le 12 Décembre 1763; la différence entre ces deux termes a donc été de $2^p\ 1^l$.

XIV.e Table. De la comparaison que j'ai faite des observations de M. Messier avec les miennes dans la *XIV.e Table*, on peut conclure, 1.° que le mercure se soutient à Montmorenci $1\frac{11}{12}$.mes de ligne plus bas qu'au Collége Royal; & comme il se soutient au Collége Royal 1,3 lignes plus bas qu'au bord de la Seine, il s'ensuit qu'à Montmorenci le mercure y est moins élevé qu'à Paris de 3 lignes, ce qui donne environ 39 toises pour l'élévation de Montmorenci au-dessus du niveau de la Seine; 2.° que la chaleur moyenne est plus petite d'environ 1 degré à Montmorenci qu'à Paris, & que le froid y est à peu-près égal. Cependant le froid est plus vif à Montmorenci, comme je m'en suis assuré depuis que je fais usage d'un thermomètre beaucoup plus sensible que celui qui me servoit dans mes premières années d'observations.

XV.e Table. On trouvera en jetant les yeux sur la *XV.e Table*, que les températures éloignées n'ont pas toujours un rapport bien marqué entre elles; cependant on peut dire en général que les extrêmes, soit de chaleur, soit de froid sont assez universels, & que les tremblemens de terre sont assez ordinairement accompagnés d'abaissemens & de variations considérables dans le baromètre, qui se font apercevoir à de très-grandes distances des pays où les tremblemens de terre se sont fait sentir. Les grands vents, les ouragans, les orages, les aurores

* Le 24 Décembre 1774, le mercure s'est élevé à $28^p\ 9^l,1$; on ne l'avoit pas encore vu si haut à Paris.

boréales, &c. sont de même communs à de très-grandes étendues de pays. En général les états violens de l'air influent sur une très-grande partie de l'atmosphère.

La *XVIe & derniere Table*, nous apprend 1.° que, $1\frac{7}{8}$ degré du thermomètre de M. de l'Isle, répondent à un degré de celui de M. de Reaumur, & que 2 degrés $\frac{1}{4}$ du thermomètre de Fahrenheit répondent à un degré de celui de M. de Reaumur. 2.° Que le zéro ou le terme de la congélation dans le thermomètre de M. de Reaumur, répond à 32 degrés du thermomètre de Fahrenheit, & à 153 degrés de celui de M. de l'Isle. XVIe Table

Je termine cette troisième partie par plusieurs remarques & observations particulières que j'ai trouvées éparses dans le Journal de M. Messier. Je suivrai l'ordre qu'elles y occupent. Observations détachées.

I. Le 1.er Avril 1764, jour de la fameuse Éclipse de Soleil, qui fut presque annulaire à Paris, M. Messier observa fréquemment le baromètre & le thermomètre pendant toute la matinée de ce jour; il fit le lendemain matin des observations correspondantes qu'il compara avec celles du jour précédent. Son dessein étoit de s'assurer si la grandeur de cette Éclipse pourroit occasionner une diminution de chaleur qui fût sensible. M. de l'Isle avoit déjà fait des observations relatives au même objet pendant l'Éclipse totale du 22 Mai 1724 *. Je trouve trente-deux observations du baromètre & du thermomètre, faites le 1.er Avril par M. Messier, depuis 9 heures $\frac{1}{2}$ du matin, jusqu'à 12 heures $\frac{1}{2}$. Il résulte de ces observations, que pendant l'Éclipse, le baromètre a monté d'un quart de ligne, & qu'il est descendu ensuite de la même quantité; & que la liqueur du thermomètre a descendu de 1 degré $\frac{1}{2}$. Le vent a soufflé du sud-ouest pendant tout le temps que les observations ont duré, & le ciel a toujours été couvert. Le 2 Avril, M. Messier fit dix-neuf observations, depuis $10^h\ 47'$, jusqu'à $12^h\ 15'$ du matin; le baromètre ne varia pas, & la liqueur du thermomètre monta

* Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, *année 1724, page 318.*

toujours pendant ce temps, comme elle a coutume de faire. Le ciel fut aussi couvert pendant cette matinée, & le vent étoit nord-nord-ouest. Je m'abstiens de tirer aucune conséquence de tout ceci, & j'imiterai en cela la retenue de M. de l'Isle, qui avoit fait à peu-près les mêmes observations en 1724, comme je l'ai dit, & qui n'osoit en rien conclure.

II. Au mois d'Octobre 1770, M. Messier compara les observations du baromètre & du thermomètre, qu'il faisoit à Paris au Collége royal de France, avec de pareilles observations faites à Corbeil, situé à sept lieues de Paris. Il résulte de cette comparaison, que la liqueur du thermomètre se tient à 2 degrés $\frac{1}{2}$ plus bas à Corbeil qu'à Paris, & que le mercure est plus élevé à Corbeil qu'à Paris de 1 ligne $\frac{1}{2}$, n'ayant égard qu'à la position respective des baromètres.

Le baromètre de Corbeil se soutient 1 ligne plus haut que celui de M. Messier; il est élevé à Corbeil au-dessus de l'eau de la Seine de 33 pieds, la rivière étant à 4 pieds au Pont-royal. La pente de la rivière, depuis Corbeil jusqu'à Paris, est de 18 pieds, suivant le nivellement de M. Picard; & au Collége royal, le baromètre se soutient 1 ligne $\frac{3}{12}$ de ligne plus bas qu'au bord de la Seine. D'après ces données, le baromètre de Corbeil se soutiendroit $\frac{1}{12}$ de ligne *plus bas* qu'à Paris, à compter du niveau de la Seine.

III. M. Messier fit, au mois d'Août 1768, une pareille comparaison des observations de son baromètre, avec les observations correspondantes que M. Baudouin, Maître des Requêtes, avoit faites à Compiegne. Il a trouvé que la différence entre ces deux villes étoit de $1^l,4$, dont le mercure est plus élevé à Compiegne qu'à Paris.

IV. Enfin, au mois de Mars 1773, M. de Luc, de Genève, Auteur des excellentes *Recherches sur les Modifications de l'Atmosphère*, vint à Paris & y apporta le baromètre portatif, dont il a fait usage pendant plus de dix ans pour faire toutes les expériences curieuses qui ont servi de fondement à la belle Théorie qu'il a établie dans son Ouvrage. Il le compara avec les baromètres de M.rs

Meſſier & Lavoiſier ; il réſulte de cette comparaiſon, que le baromètre de M. de Luc ſe ſoutient 1 ligne $\frac{2}{16}$ plus haut que celui de M. Meſſier, & une ligne ſeulement plus haut que celui de M. Lavoiſier.

V. M. Meſſier rapporte, au mois de Juin 1772, des expériences qu'il fit à Corbeil, dans la Seine, avec des thermomètres, pour connoître la température de l'eau, ſoit le matin, ſoit le ſoir. Il obſerva à différentes heures de la journée, & il a trouvé qu'en général l'eau eſt plus chaude le matin que le ſoir. Cela vient, je penſe, de ce que l'eau reçoit plus difficilement l'impreſſion de la chaleur que l'air ; mais auſſi, lorſqu'elle l'a reçue, elle la perd plus difficilement, & la conſerve plus long-temps.

VI. On trouve encore, dans le Journal de M. Meſſier, pluſieurs deſcriptions d'Aurores boréales, d'Arcs-en-ciel ſolaires & lunaires, & d'autres météores dont je ne parle pas ici, parce que ces deſcriptions ſe trouvent en partie dans les volumes des *Savans étrangers*, & en partie dans les Papiers publics. Toutes les obſervations que cet Aſtronome laborieux a faites des différentes Comètes qu'il a découvertes, y ſont auſſi exactement marquées, auſſi-bien que la deſcription du météore connu ſous le nom de *globe de feu*, qui parut le 17 Juillet 1771. Le Mémoire que M. le Roi a lû ſur ce ſujet, à la rentrée ſuivante de l'Académie, & qui ſe trouve dans le volume de 1771 *, me diſpenſera d'en parler ici.

On peut juger maintenant des ſoins & des attentions que M. Meſſier apporte aux obſervations météorologiques ; je ſouhaite que ſon exemple contribue à multiplier le nombre des obſervateurs. Et ſi les Savans, au jugement deſquels je ſoumets mon travail, penſent qu'il répande du jour ſur la Science Météorologique, ce ſera un nouveau motif pour engager les Phyſiciens à la cultiver.

---

* Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, *année 1771, page 668.*

QUATRIÈME PARTIE.

Méthode pour rédiger à la fin de chaque mois & de chaque année les Observations Météorologiques.

* Livre V, p. 557 & suiv.

J'ai donné, dans mon *Traité de Météorologie* *, la manière de rédiger les observations météorologiques à la fin de chaque année, & j'ai tracé dans une suite de Tables qui ont rapport à l'année 1771, la méthode que je me suis faite pour cela. Mais ce travail devient très-pénible, si l'on n'a pas eu soin à la fin de chaque mois de rédiger les observations journalières, afin de parvenir à des résultats. Quand on a eu cette précaution, il ne s'agit plus, à la fin de l'année, que de rédiger tous ces résultats, ce qui est bien plus aisé.

Je vais donc développer les différens calculs qu'exige la réduction des observations de chaque mois. Comme j'ai un peu changé la forme de mes Tables météorologiques, j'en donnerai ici un modèle. Je choisis les dix derniers jours du mois de Janvier 1775. Les opérations que je ferai sur les observations faites pendant ces dix jours, feront comprendre de quelle manière on doit rédiger celles du mois entier. J'observe trois fois par jour chacun de mes instrumens; ainsi le diviseur sera ici le nombre 30; il seroit 93 pour tout le mois de Janvier, & 90 pour les mois qui n'ont que 30 jours.

Mes Tables sont divisées en sept colonnes. J'en ai omis une ici, c'est celle du thermomètre que j'appelle *intérieur*, parce qu'il est appliqué sur la planche de mon baromètre. J'omets encore d'autres colonnes où je marque les jours d'élévation ou d'abaissement extrême du mercure; les jours de pluie, de neige, de tonnerre, d'aurores boréales, de lumières zodiacales; les quantités d'eau fournies par la pluie, la neige, la grêle; les quantités d'évaporation, &c. L'inspection de la Table suivante donnera une idée de celle de mon Journal. Je laisse en blanc le *verso* de chaque Table, pour faire différentes notes sur l'état des productions de la Terre, sur l'Électricité de l'air, les Aurores boréales, l'Agriculture, la Physique, l'Histoire naturelle, &c. &c.

EXTRAIT

EXTRAIT de mon Journal d'Observations Météorologiques.

JANVIER 1775.

du Mois.	Heures du jour.	THERM. Degrés.	BAROM. Pouc.	Lign.	Aiguille aimantée. Deg.	Min.	VENT.	ÉTAT DU CIEL.
22	$7\frac{1}{4}$ mat.	$4\frac{3}{8}$	27	7	20	0	S.	Ciel en partie couvert, la nuit aussi.
	$1\frac{1}{2}$ soir.	$8\frac{3}{4}$	27	7	20	0	S. O.	Ciel couvert humide, le mat. aussi.
	$8\frac{1}{4}$ soir.	$5\frac{5}{8}$	27	$6\frac{1}{2}$	19	55	S.	Ciel en part. couv. l'après-midi br.
23	$7\frac{1}{4}$ mat.	$4\frac{1}{4}$	27	5	20	0	N. E.	Ciel couvert, la nuit aussi.
	$1\frac{1}{2}$ soir.	$8\frac{1}{8}$	27	$5\frac{1}{4}$	20	0	N. E.	*Idem.*
	$8\frac{1}{4}$ soir.	$6\frac{1}{2}$	27	7	20	0	N. E.	*Idem.*
24	$7\frac{1}{4}$ mat.	$3\frac{1}{2}$	27	10	20	0	N. E.	*Idem*, pluie fine, la nuit aussi.
	$1\frac{1}{2}$ soir.	$2\frac{3}{8}$	27	$11\frac{1}{4}$	20	0	N. E.	*Idem*, brouillard, le matin aussi.
	$8\frac{1}{4}$ soir.	$-1\frac{1}{4}$	28	1	20	0	N. E.	*Idem.*
25	$7\frac{1}{4}$ mat.	$-8\frac{1}{2}$	28	2	20	0	N. E.	Ciel serein, vent froid, la nuit aussi.
	$1\frac{1}{2}$ soir.	$-4\frac{1}{2}$	28	$1\frac{1}{2}$	20	0	N. E.	*Idem*, quelques nuages.
	$8\frac{1}{4}$ soir.	$-5\frac{1}{4}$	28	$0\frac{1}{4}$	19	55	N. E.	C. couv. en part. serein l'apr.-mid.
26	$7\frac{1}{4}$ mat.	$-5\frac{1}{4}$	27	10	20	0	S.	*Idem*, neige.
	$1\frac{1}{2}$ soir.	$1\frac{1}{2}$	27	$9\frac{1}{4}$	20	0	S. O.	*Idem*, dégel, verglas le matin.
	$8\frac{1}{4}$ soir.	$0\frac{1}{2}$	27	$10\frac{3}{4}$	19	55	S. O.	Ciel serein, l'après-midi aussi.
27	$7\frac{1}{4}$ mat.	$-0\frac{1}{8}$	27	11	19	55	S.	Ciel en partie serein, la nuit aussi.
	$1\frac{1}{2}$ soir.	5	27	$10\frac{1}{4}$	19	55	S.	Ciel serein le matin, brouill. giv.
	$8\frac{1}{4}$ soir.	3	27	9	19	55	S.	C. couv. en part. couv. l'après-midi
28	$7\frac{1}{4}$ mat.	3	27	8	19	55	S. O.	Ciel en part. couv. la nuit aussi.
	$1\frac{1}{2}$ soir.	7	27	$8\frac{1}{4}$	19	55	O.	Ciel en partie couv. le matin aussi.
	$8\frac{1}{4}$ soir.	$3\frac{5}{8}$	27	$9\frac{1}{4}$	19	50	S. O.	*Idem*, pet. aur. bor. à 6 heures $\frac{1}{2}$.
29	$7\frac{1}{4}$ mat.	$7\frac{1}{8}$	27	8	19	50	S. O.	*Idem*, grand vent, pluie la nuit.
	$1\frac{1}{2}$ soir.	10	27	$8\frac{1}{4}$	19	55	S. O.	*Id.* tr. hum. quelq. ray. de ☉ le mat.
	$8\frac{1}{4}$ mat.	$8\frac{1}{4}$	27	$8\frac{1}{2}$	19	50	S. O.	*Idem*, l'après-midi aussi.
30	$7\frac{1}{4}$ mat.	$7\frac{1}{4}$	27	8	19	55	S. O.	*Idem*, grand vent humide.
	$1\frac{1}{2}$ soir.	$8\frac{1}{2}$	27	$8\frac{1}{4}$	20	0	S. O.	Ciel ser. pluie, ouragan le matin.
	$8\frac{1}{4}$ soir.	$8\frac{1}{8}$	27	9	19	50	S. O.	Ciel couv. en part. ser. l'apr.-mid.
31	$7\frac{1}{4}$ mat.	$5\frac{1}{8}$	27	$7\frac{3}{4}$	19	55	S.	C. couv. en part. aur. bor. le matin.
	$1\frac{1}{2}$ soir.	$7\frac{7}{8}$	27	$6\frac{3}{4}$	19	55	S. O.	Ciel couv. gr. vent, le matin aussi.
	$8\frac{1}{4}$ soir.	8	27	7	20	0	S. O.	*Idem*, pluie l'après-midi.

Je ſuivrai l'ordre des colonnes qui renferment les obſervations.

1.° Je marque le plus grand degré de chaleur & le plus grand degré de froid obſervé pendant le mois. Le degré extrême de chaleur pendant ces dix jours a été 10 degrés. Le 29, à 1 heure $\frac{1}{2}$ du ſoir, le vent étant ſud-oueſt & le ciel couvert, le plus grand degré de froid a été $8^d \frac{1}{2}$ de condenſation; le 25 à 7 heures $\frac{1}{4}$ du matin, le vent étant nord-eſt & le ciel ſerein. La différence entre ces deux degrés extrêmes de chaleur & de froid a été 18 degrés $\frac{1}{2}$.

2.° Pour avoir le degré moyen de chaleur de chaque jour, je fais deux ſommes; l'une de tous les degrés de chaleur, & l'autre de tous les degrés de froid obſervés pendant ces dix jours; je retranche la plus petite ſomme de la plus grande, & je diviſe le reſte par le nombre des obſervations. Exemple: je trouve que pendant ces dix jours la ſomme des degrés de chaleur a été de 137 degrés; celle des degrés de froid a été de 25 degrés; je fais ce calcul:

$$137^d - 25^d = \frac{112}{30} = 3 \text{ degrés } \frac{7}{10}.^e$$ *Chaleur moyenne.*

3.° Je paſſe aux obſervations du baromètre. La plus grande élévation du mercure a été de 28 pouces 2 lignes le 25 à 7 heures $\frac{1}{4}$ du matin, le vent étant nord-eſt & le ciel ſerein. La moindre élévation a été de 27 pouces 5 lignes le 23 à 7 heures $\frac{1}{4}$ du matin, le vent étant nord-eſt, & le ciel couvert; la différence entre ces deux extrêmes a été de 9 lignes.

4.° Je détermine l'élévation moyenne du mercure au matin, à midi & au ſoir, en additionnant ſéparément les élévations obſervées à ces différentes heures de la journée, & en diviſant chaque ſomme par le nombre des obſervations. Exemple: Je trouve dans la Table précédente, que la ſomme des élévations du mercure a été, au matin & à midi, 277 pouces 5 lignes; & au ſoir, 277 pouces 8 lignes. Je fais le calcul ſuivant:

$$\left.\begin{matrix}\text{matin}\\ \text{midi}\end{matrix}\right\} \frac{277^{\text{pouc.}}\ 5^{\text{lign.}}}{10} = 27^{\text{pouc.}}\ 8^{\text{lignes}}\ \frac{9}{10}.^e$$ *Élévation moyenne.*

soir $\frac{177^{pouc.}\ 8^{lign.}}{10} = 27^{pouc.}\ 9^{lignes}\ \frac{2}{10}$.e *Élévation moyenne.*

Ainsi, l'élévation moyenne de chaque jour est de 27 pouces $9^{lignes}\ \frac{0}{10}$.e

5.° J'ai soin de noter dans mon registre les jours où j'observe de grandes variations dans les baromètres, & j'en rends compte ensuite dans le détail de mes observations. Ainsi en Janvier 1775, le mercure monta beaucoup les 2, 6, 23 & 24; & il descendit beaucoup les 11, 26 & 31. En général, il a été fort élevé, & il a beaucoup varié vers la fin du mois.

6.° Comme les déclinaisons diurnes de l'aiguille aimantée sont fort importantes, je les donne depuis quelque temps en entier & telles qu'elles se trouvent dans mon registre. Cela ne m'empêche pas de faire un article particulier où je marque la déclinaison moyenne du mois & les variations extraordinaires que j'ai observées, soit dans les circonstances d'une aurore boréale, du tonnerre, &c. soit dans d'autres circonstances. Je détermine la déclinaison moyenne par le même calcul qui me sert à fixer le degré moyen de chaleur & l'élévation moyenne du mercure. Ainsi la Table précédente me fournit le calcul suivant:

$\frac{598^{d}\ 20'}{30} = 19^{deg.}\ 56^{minutes}\ \frac{6}{10}$.e *Déclinaison moyenne.* *

7.° Je cherche quel a été le vent dominant, & pour cela je dresse la Table suivante, dans laquelle je marque le nombre de fois que chaque vent a règné. Le vent dominant pendant les dix derniers jours de Janvier a donc été le sud-ouest, & ensuite le nord-est & le sud. Je marque aussi les jours où il a été violent. Ainsi, en Janvier 1775, le vent souffla avec force les 29, 30 & 31.

* Depuis le 1.er Septembre 1774, jusqu'au 1.er Sept. 1775, la déclinaison moyenne de l'aiguille aimantée a été, le *matin*, de 19d 46′ 12″; à *midi*, de 19d 48′ 16″, & le *soir*, de 19d 45′ 47″.

VENTS.	NOMBRE de Jours où ils ont régné.
Nord	0.
Nord-est	9.
Nord-oueſt	0.
Sud	7.
Sud-eſt	0.
Sud-oueſt	13.
Eſt	0.
Oueſt	1.

8.° Paſſons à la température qui regarde le froid ou le chaud, la ſécheresſe ou l'humidité qu'on a éprouvé. Je commence ordinairement le détail de mes obſervations, en rendant compte de l'influence de la température du mois ſur les productions de la terre ; je parle des progrès de la végétation, du temps où les feuilles, les fleurs & les fruits ſe développent ; de l'arrivée & du départ des oiſeaux de paſſage ; du dégât que peuvent faire les chenilles, les hannetons & autres inſectes. On peut auſſi faire mention du nombre des jours ſereins, couverts, &c.

9.° Je marque les jours où j'ai obſervé quelqu'aurore boréale ou quelque lumière zodiacale ; j'en fais connoître l'eſpèce autant qu'il eſt poſſible. En été, je tiens compte auſſi des tonnerres, des pluies d'orage, & de leur influence ſur le conducteur d'électricité naturelle & ſur l'aiguille aimantée.

10.° Je note les jours de pluie, de neige ou de grêle, & la quantité d'eau qu'elles ont fourni, auſſi-bien que celle qui ſe perd par l'évaporation. Ainſi, en Janvier 1775, il eſt tombé de la pluie les 1, 4, 6, 9, 12, 24, 29, 30 & 31 ; & de la neige, les 2, 3 & 26. La pluie a fourni 14 lignes $\frac{3}{4}$ d'eau, & la neige 1 ligne $\frac{3}{4}$. Total, 16 lignes $\frac{1}{2}$ d'eau. L'évaporation a été de 9 lignes.

11.° Lorsqu'il a régné quelques maladies, j'en rends compte, & je tâche d'en faire connoître les différens symptômes. Je parle aussi du nombre des naissances & des sépultures de ma paroisse; & pour être en état dans la suite de tirer quelque utilité des Tables des naissances & des sépultures, que j'ai insérées dans mon *Traité de Météorologie* *; je me propose de faire un dénombrement exact de tous mes paroissiens, distingués par sexe, par âge, & par l'état du mariage & du célibat.

* Pages 243 & suiv.

Tel est le détail météorologique dans lequel j'entre, & la manière dont je rédige les observations diurnes que je fais chaque mois. J'ai par ce moyen une Table semblable à la suivante, qui répétée chaque mois, me facilite beaucoup le travail que je fais à la fin de l'année pour rendre mes observations dignes de l'attention de l'Académie & de celle du Public.

JANVIER 1775.

THERMOMÈTRE.			BAROMÈTRE.		
Plus grand degré de Chaleur.	Plus grand degré de Froid.	Deg. moy. de Chaleur.	Plus grande élévation.	Moindre élévation.	Élévation moyenne.
Degrés. 10.	*Degrés.* — 8 ½.	*Degrés.* 2,9.	*P. L.* 28. 2,0.	*P. L.* 27. 5,0.	*P. L.* 27. 10,2.

VENT dominant.	QUANTITÉ de pluie.	QUANTITÉ d'évaporat.	Déclin. moy. de l'aiguille aimantée.	TEMPÉRATURE.
S. O.	*Lignes.* 16 ½.	*Lignes.* 9.	*Deg. Min.* 19. 57,0.	Assez douce; humide.

Je fais tous les trois mois une récapitulation de toutes les observations dans la forme suivante:

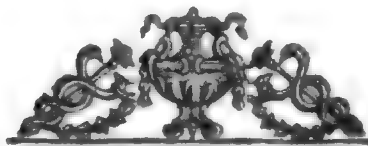
Résultats des trois mois d'hiver 1775.

VENTS dominans.	Degré moyen de Chal.	Élévation moyenne du Mercure.	Nombre de Jours de pluie & de Neige.	Quantité de Pluie.	Quantité d'évapor.	Déclinaison moyenne de l'Aig. aiman.	TEMPÉRATURE.
	Degrés.	*P. L.*		*P. L.*	*P. L.*	*Deg. Min.*	
S. O.	4,6.	27. 9,11.	48.	4. 7½.	6. 7.	19. 58,5.	Douce, humide.

Il est inutile que j'entre ici dans quelque détail sur la manière de rédiger les observations à la fin de l'année; 1.° parce qu'on y doit suivre précisément la même méthode que celle que je viens de décrire en parlant de la réduction des observations de chaque mois; la seule différence est, que pour fixer les termes moyens de chaleur, d'élévation du mercure, &c. le diviseur est toujours 12 ou le nombre des mois; 2.° parce que je me suis fort étendu sur cet article dans mon *Traité de Météorologie* *; on voudra bien le consulter & y lire aussi la description que je fais des instrumens dont je me sers.

* *Liv. V, page 557.*

Si les Physiciens qui s'occupent d'observations météorologiques, veulent se donner la peine de les analyser de la manière que je viens de décrire, ils tireront de leur travail des résultats satisfaisans; & je me chargerai avec plaisir, ainsi que je m'y suis engagé, de les comparer ensemble, & de les présenter sous un même point de vue à l'Académie & au Public.



MÉMOIRE
SUR
L'INCLINAISON MOYENNE DES ORBITES DES COMÈTES;
Sur la figure de la Terre, & sur les Fonctions.

Par M. DE LA PLACE.

I.

UN des phénomènes les plus extraordinaires que nous offre le ſyſtème du monde, eſt le mouvement des Planètes & de leurs ſatellites dans le même ſens & à peu-près dans le même plan; ſi l'on ſe repréſente en effet tous ces aſtres décrivant d'Occident en Orient des orbites preſque circulaires & fort peu inclinées à l'écliptique, tandis que les Comètes paroiſſent ſe mouvoir indifféremment dans tous les ſens & avec toutes les inclinaiſons poſſibles dans des ellipſes fort excentriques, on aperçoit une ſéparation bien marquée entre les Planètes & les Comètes, en ſorte que dans le mouvement de ces grands corps, la Nature ne ſuit point cette gradation par nuances inſenſibles, qu'elle obſerve toujours lorſque ſa marche n'eſt point interrompue par des cauſes particulières.

Nous comptons en tout ſix Planètes & dix Satellites; or, ſi l'on ſuppoſe qu'ils aient été lancés au haſard, il eſt aiſé de voir que la probabilité qu'ils tourneront tous dans le même ſens eſt $\frac{1}{2^{15}} = \frac{1}{32768}$, en ſorte qu'il y a 32767 à parier contre l'unité, que cela n'arrivera pas. Si l'on multiplie la fraction $\frac{1}{32768}$, par celle qui exprime la probabilité que les orbites ſeront compriſes dans une auſſi petite zone que celle qui les renferme, on verra que la diſpoſition actuelle de notre ſyſtème planétaire ſeroit infiniment peu probable ſi elle étoit dûe au haſard, & qu'elle annonce par conſéquent avec une

certitude équivalente ou même ſupérieure à celle d'un grand nombre d'évènemens dont il nous paroîtroit abſurde de douter, l'exiſtence d'une cauſe régulière qui a déterminé les planètes & leurs ſatellites à ſe mouvoir dans le même ſens & preſque dans le même plan; je ſupprime cette analyſe que M. Daniel Bernoulli a donnée depuis long-temps, & qui d'ailleurs eſt fort ſimple.

Quelle eſt préſentement la cauſe qui peut avoir ainſi déterminé le mouvement des Planètes & des ſatellites? a-t-elle été particulière à ces aſtres, ou bien a-t-elle influé ſur le mouvement de tous ceux qui tournent autour du Soleil? la première de ces queſtions me ſemble fort difficile à réſoudre; & j'avoue qu'après y avoir long-temps réfléchi, & après avoir examiné avec attention toutes les hypothèſes imaginées juſqu'ici pour expliquer ce phénomène, je n'ai rien trouvé de ſatisfaiſant. Quant à la ſeconde queſtion, on peut aiſément y répondre; il ſuffit pour cela, 1.° de calculer l'inclinaiſon moyenne des orbites de toutes les Comètes obſervées, & de voir de combien elle s'éloigne de 45 degrés; car en ſuppoſant les Comètes lancées au haſard, il y a autant à parier qu'elle ſera au-deſſus qu'au-deſſous de 45 degrés. 2.° De connoître le rapport du nombre des Comètes directes à celui des rétrogrades, & de voir de combien il s'éloigne de l'unité; car il eſt auſſi probable qu'il ſera plus grand que moindre. Ces calculs ont été faits par M. du Séjour dans ſon excellent Ouvrage ſur les Comètes; ce ſavant Auteur a trouvé que l'inclinaiſon moyenne des ſoixante-trois Comètes obſervées juſqu'à préſent étoit de $46^d\ 16'$, ce qui s'éloigne peu de 45 degrés, & que le rapport des Comètes directes aux rétrogrades étoit $\frac{5}{4}$, ce qui s'écarte peu de l'unité. De-là, il conclud, avec raiſon qu'il n'exiſte pour les Comètes aucune cauſe qui les détermine à ſe mouvoir dans un ſens plutôt que dans un autre, & à peu-près dans le même plan, & qu'ainſi celle qui détermine le mouvement des planètes eſt entièrement indépendante du ſyſtème général de l'Univers.

Cette obſervation intéreſſante de M. du Séjour m'a fait naître

naître l'idée de ſoumettre à l'analyſe, les probabilités que l'inclinaiſon moyenne des Comètes & le rapport du nombre des directes à celui des rétrogrades, ſeront compriſes entre des limites données, en ſuppoſant qu'elles aient été projetées au haſard ; ce calcul eſt même néceſſaire pour donner plus de certitude à cette obſervation ; car ſi, par exemple, l'inclinaiſon moyenne des orbites étoit $45^d + \alpha$, & qu'il y eût un très-grand nombre, comme un million à parier contre l'unité, qu'elle doit être au-deſſous, on pourroit en conclure avec beaucoup de vraiſemblance qu'il exiſte une cauſe qui détermine les Comètes à ſe mouvoir dans un plan plutôt que dans un autre; il eſt donc eſſentiel de connoître les probabilités que l'inclinaiſon moyenne ſera au-deſſus ou au-deſſous de $45^d + \alpha$; le même raiſonnement peut s'appliquer au rapport du nombre des Comètes directes à celui des rétrogrades. Il eſt facile de calculer la probabilité que ce rapport ſera entre deux limites données; il ſuffit pour cela d'élever le binome $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$, à la puiſſance indiquée par le nombre des Comètes; ſoit n ce nombre, en développant $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^n$, le terme $\frac{n.(n-1).....(n-\mu+1)}{1.2.3.....\mu} . (\frac{1}{2})^{n-\mu} . (\frac{1}{2})^{\mu}$, exprimera la probabilité qu'il y aura $n - \mu$ Comètes directes, & μ Comètes rétrogrades; donc, ſi l'on veut déterminer la probabilité que le rapport des directes aux rétrogrades ſera compris entre les deux limites $\frac{n-\mu}{\mu}$ & $\frac{n-\mu'}{\mu'}$, il faut prendre la ſomme des termes du binome $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ élevé à la puiſſance n, compris entre le terme

$$\frac{n.(n-1).....(n-\mu+1)}{1.2.3.....\mu} . (\tfrac{1}{2})^{n-\mu} . (\tfrac{1}{2})^{\mu},$$

& le terme $\frac{n.(n-1).....(n-\mu'+1)}{1.2.3.....\mu'} . (\frac{1}{2})^{n-\mu'} . (\frac{1}{2})^{\mu'}$;

cette ſomme exprimera la probabilité demandée; mais il eſt bien plus difficile de déterminer la probabilité que l'inclinaiſon moyenne des orbites ſera compriſe entre deux limites données; ce Problème me paroît être un des plus compliqués de

toute l'analyse des hasards, sur-tout lorsqu'on se propose, ainsi que je l'ai fait, de trouver une formule générale pour un nombre quelconque de Comètes. J'avoue qu'il m'auroit été impossible d'y parvenir sans le secours d'une méthode que j'ai donnée ailleurs *, pour trouver directement l'expression générale des quantités assujetties à une loi qui sert à les former. J'espère que l'application de cette méthode au Problème dont il s'agit, ne sera pas inutile pour en faire connoître la nature & les avantages.

* Voy. p. 64 de ce Volume.

II.

Je suppose un nombre indéfini de corps lancés au hasard dans l'espace & circulans autour du Soleil; il s'agit de trouver la probabilité que l'inclinaison moyenne de leurs orbites sur un plan donné tel que l'Écliptique, sera comprise entre deux limites données, comme 40^d & 50^d.

Par *inclinaison moyenne*, j'entends la somme de toutes les inclinaisons, divisée par le nombre des orbites.

Pour résoudre ce Problème, je ne considère d'abord que deux corps, M & N, & je suppose que la droite AB *(fig. 1)*, représente 90 degrés ou la plus grande inclinaison moyenne des deux orbites; je commence par tracer une ligne $AZMB$, dont chaque ordonnée soit proportionnelle à la probabilité que l'inclinaison moyenne sera égale à l'abscisse correspondante AY; je nommerai cette ligne, *courbe des probabilités*; or, si l'on fait $AY = x$ & $YZ = y$, y sera proportionnel à $2x$, depuis A jusqu'au milieu P de la droite AB; car si l'inclinaison moyenne des deux orbites est x, x étant moindre que $\frac{1}{2}a$, il est visible que cela peut arriver d'autant de manières qu'il y a de points dans la droite $2x$; en effet, l'inclinaison de l'orbite de M, peut, dans ce cas, être également ou 0, ou ∂x, ou $2\partial x$, ou $3\partial x$, ou &c. jusqu'à $2x$, en représentant par ∂x, l'accroissement infiniment petit de l'inclinaison de cette orbite. On peut donc faire $YZ = 2AY$; & partant, AZM sera une ligne droite, & APM un triangle rectangle tel que $PM = 2AP = a$.

Présentement, la ligne BM doit être entièrement égale

à la droite AM, parce qu'à égale diſtance des points A & B, les ordonnées doivent être égales, vu qu'il eſt auſſi probable que l'inclinaiſon moyenne approche de la limite A, comme de la limite B; la ligne AMB ſera donc composée de deux droites égales AM & BM, telles que $PM = a$.

Si l'on veut avoir maintenant la probabilité que l'inclinaiſon moyenne ſera compriſe entre les deux limites Y & y, il faudra diviſer l'aire $YZMzy$ par l'aire entière AMB, & le quotient repréſentera cette probabilité.

III.

Suppoſons qu'il y ait trois corps M, N & P; ſoit diviſée (*fig. 2*) la droite $AB = a$, en trois parties égales, Aa, ab, bB; & cherchons la probabilité que l'inclinaiſon moyenne ſera égale à l'abſciſſe quelconque AY, ou, ce qui revient au même, traçons la courbe $AmMnB$ des probabilités; ſoit $AY = x$, x étant ſuppoſé d'abord moindre que Aa ou $\frac{1}{3}a$; je ſuppoſe que l'un quelconque des trois corps, M par exemple, ait une inclinaiſon que je déſigne par f; il faut conſéquemment que l'inclinaiſon moyenne des deux autres ſoit $\frac{3x - f}{2}$, puiſque par hypothèſe, l'inclinaiſon moyenne des trois corps eſt x; or, $\frac{3x - f}{2}$, étant moindre que $\frac{a}{2}$, il eſt aiſé de voir, par l'article précédent, que le nombre des cas dans leſquels cela peut arriver eſt $3x - f$; il faut multiplier préſentement cette quantité par ∂f, & en prendre l'intégrale depuis $f = 0$ juſqu'à $f = 3x$, pour avoir le nombre total des cas dans leſquels l'inclinaiſon moyenne des trois corps peut être x, & l'on trouvera $\frac{9}{2}xx$, pour ce nombre; on peut donc, depuis A juſqu'en a, ſuppoſer l'ordonnée YZ égale à $\frac{9}{2} \cdot \frac{xx}{a}$; ce qui donne $a.y = \frac{9}{2}xx$, pour l'équation de la courbe AZM, & partant auſſi pour celle de la courbe Bn, en y faiſant commencer les x au point B.

Déterminons maintenant la nature de la courbe mMn; j'obſerve d'abord qu'elle doit être compoſée de deux parties entièrement égales, mM & Mn, P étant le milieu de la droite AB; ſoit $ay = z$ (*fig. 2*), ou $Ay = \frac{1}{3}a + z$, & ſoit f l'inclinaiſon de l'orbite du corps M; les deux autres corps N & P auront donc enſemble l'inclinaiſon $a + 3z - f$; or, ſoit $3z - f = u$, en ſorte que l'inclinaiſon de ces deux corps ſoit $a + u$, & partant leur inclinaiſon moyenne $\frac{a}{2} + \frac{u}{2}$; le nombre des cas dans leſquels cela peut arriver, eſt par l'*article précédent*, $a - u$, ou $a + f - 3z$; il faut donc multiplier cette quantité par ∂f, & l'intégrer depuis $f = 0$, juſqu'à $f = 3z$, pour avoir le nombre des cas qui ont lieu dans cet intervalle; on aura ainſi $3az - \frac{9}{2}zz$, pour le nombre de ces cas; il faut maintenant déterminer le nombre des cas qui ont lieu depuis $f = 3z$, juſqu'à $f = a$, & pour cela je fais $f = 3z + s$; l'inclinaiſon totale des deux corps N & P ſera donc $a - s$, & partant, leur inclinaiſon moyenne $= \frac{a}{2} - \frac{s}{2}$; or, le nombre des cas dans leſquels cela peut arriver, eſt par l'*article précédent*, $a - s$; multipliant donc cette quantité par ∂s, & l'intégrant depuis $s = 0$ juſqu'à $s = a - 3z$, on aura $\frac{1}{2}a^2 - \frac{9}{2}zz$, pour le nombre des cas qui ont lieu depuis $f = 3z$, juſqu'à $f = a$. Raſſemblant donc tous ces cas, on aura $\frac{1}{2}a^2 + 3az - 9zz$, pour le nombre de ceux qui donnent l'inclinaiſon moyenne des trois corps égale à $\frac{1}{3}a + z$. Ainſi, on peut ſuppoſer l'ordonnée yz égale à $\frac{\frac{1}{2}a^2 + 3az - 9zz}{a}$, & l'équation de la courbe mMn, ſera $a.y = \frac{1}{2}a^2 + 3az - 9zz$.

Si l'on veut préſentement avoir la probabilité que l'inclinaiſon moyenne des trois orbites ſera compriſe entre deux

limites données, on cherchera l'aire comprise entre ces limites, & on la divisera par l'aire entière de la courbe *AMB*, le quotient exprimera la probabilité demandée.

I V.

Supposons maintenant quatre corps *M, N, P, Q*, & divisons la droite *AB* (*figure 3*) en quatre parties égales *Aa, aP, Pb* & *bB*; la courbe *AmMnB*, sera composée de quatre parties *Am, mM, Mn* & *nB*, telles cependant que l'on ait *Am* égal à *Bn*, & *mM* égal à *nM*.

Déterminons la nature de ces courbes, & pour cela, soit comme ci-dessus, $AY = x$, x étant moindre que $\frac{1}{4}a$, $YZ = y$; soit de plus f l'inclinaison de l'orbite du corps *M*; l'inclinaison des orbites des trois autres corps *N, P* & *Q*, sera $4x - f$, & partant leur inclinaison moyenne sera $\frac{4x-f}{3}$; or, par l'*article précédent*, le nombre des cas dans lesquels cela peut arriver est $\frac{9}{2} \cdot \left(\frac{4x-f}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot (4x-f)^2$. Si l'on multiplie cette quantité par ∂f, & qu'on l'intègre depuis $f = 0$ jusqu'à $f = 4x$, on aura $\frac{32}{3}x^3$, pour le nombre des cas dans lesquels l'inclinaison moyenne des quatre orbites peut être x; partant, on peut suppposer que depuis *A* jusqu'en a, l'équation de la courbe *Am*, est $a^2 y = \frac{32}{3}x^3$.

Pour avoir l'équation de la courbe *mM*, je suppose (*fig. 3*) $ay = z$: partant $Ay = \frac{1}{4}a + z$; soit f l'inclinaison du corps *M*, l'inclinaison des trois autres corps sera donc $a + 4z - f$: partant leur inclinaison moyenne sera $\frac{a+4z-f}{3}$; or, tant que $4z - f$ est une quantité positive, le nombre des cas dans lesquels cette inclinaison est possible, est (*art. précéd.*) $\frac{1}{2}a^2 + 3a\left(\frac{4z-f}{3}\right) - 9 \cdot \left(\frac{4z-f}{3}\right)^2 = \frac{1}{2}a^2$

$+ a.(4z - f) - (4z - f)^2$; si l'on multiplie cette quantité par ∂f, & qu'on l'intègre depuis $f = 0$ jusqu'à $f = 4z$, on aura $2a^2 z + 8az^2 - \frac{64}{3} z^3$, pour le nombre des cas qui ont lieu dans cet intervalle.

Pour avoir le nombre de ceux qui répondent à l'intervalle compris entre $f = 4z$, & $f = a$, je fais $f - 4z = s$; $\frac{a + 4z - f}{3}$ devient donc $\frac{a - s}{3}$; soit $a - s = u$, on aura $\frac{u}{3}$ pour l'inclinaison moyenne des trois orbites; or, le nombre des cas dans lesquels cela peut arriver est, par l'*article précédent*, $\frac{1}{2}uu$, ou $\frac{1}{2}(a - s)^2$; multipliant cette quantité par ∂s, & l'intégrant depuis $s = 0$, jusqu'à $s = a - 4z$, on aura $\frac{1}{6}a^3 - \frac{32}{3}.z^3$, pour le nombre de tous les cas possibles depuis $f = 4z$, jusqu'à $f = a$; donc le nombre de tous les cas dans lesquels l'inclinaison moyenne des quatre orbites peut être $\frac{1}{4}a + z$, est $\frac{1}{6}a^3 + 2a^2 z + 8az^2 - 32z^3$; on peut ainsi supposer que depuis a jusqu'en P, l'équation de la courbe mM est $a^2 y = \frac{1}{6}a^3 + 2a^2 z + 8az^2 - 32z^3$.

V.

S'il y avoit cinq corps M, N, P, Q & R, en partageant la droite AB en cinq parties égales, on auroit les courbes correspondantes à chacune de ces parties, au moyen des courbes relatives à quatre corps, comme nous venons de conclure celles-ci, au moyen des courbes relatives à trois corps. De-là on peut inférer généralement que les courbes relatives à n corps peuvent toujours se déduire de celles qui sont relatives à $n - 1$ corps. Pour établir d'une manière générale la relation qui existe entre ces différentes courbes, supposons la droite AB (*figure 3*) divisée en n, parties égales,

& déterminons l'équation de la courbe relative à la partie $r^{ième}$; soit $\frac{r-1}{n} a + z$, la distance d'une de ses ordonnées au point A, z étant moindre que $\frac{a}{n}$; soit encore $\frac{{}_r y_{(n)(z)}}{a^{n-1}}$ cette ordonnée, ou, ce qui revient au même, soit ${}_r y_{(n)(z)}$, le nombre des cas dans lesquels il peut arriver que l'inclinaison moyenne des n corps, soit $\frac{r-1}{n} . a + z$. Cela posé, si l'on désigne par f l'inclinaison du corps M, l'inclinaison des $n-1$, autres corps, sera $(r-1) a + nz - f$; partant, leur inclinaison moyenne sera $\frac{(r-1) a + nz - f}{n-1}$; or, il peut arriver que $nz - f$ soit positif ou négatif; je le suppose d'abord positif; le nombre des cas dans lesquels il peut arriver que l'inclinaison moyenne des $n-1$ corps soit $\frac{(r-1) a + nz - f}{n-1}$ est ${}_r y_{(n-1)\left(\frac{nz-f}{n-1}\right)}$. En multipliant cette quantité par ∂f, & l'intégrant depuis $f = 0$ jusqu'à $f = nz$, on aura $\int \partial f . \left\{ {}_r y_{(n-1)} . \left(\frac{nz-f}{n-1}\right) \right\}_{f=nz}^{f=0}$, pour le nombre des cas qui répondent à cet intervalle; les équations $f = 0$ & $f = nz$, mises l'une au haut & l'autre au bas de la parenthèse, désignent que l'intégrale doit commencer lorsque $f = 0$, & finir lorsque $f = nz$.

Si $nz - f$ est une quantité négative, soit $nz - f = -s$, on aura $\frac{(r-1) a - s}{n-1}$, pour l'inclinaison moyenne des $n-1$ corps; or, $\frac{(r-1) a - s}{n-1} = \frac{r-2}{n-1} a + \frac{a-s}{n-1}$; & le nombre des cas dans lesquels cela est possible, est ${}_{r-1} y_{(n-1)\left(\frac{a-s}{n-1}\right)}$; donc on a $\int \partial s . \left\{ {}_{r-1} y_{(n-1)} \left(\frac{a-s}{n-1}\right) \right\}_{s=a-nz}^{s=0}$ pour le nombre des cas depuis $s = 0$ jusqu'à $s = a - nz$, ou,

ce qui revient au même, depuis $f = nz$ jusqu'à $f = a$; partant

$$\left.\begin{aligned} {}_r y_{(n)(z)} = \int \partial f \cdot \left\{ {}_r y_{(n-1)\left(\frac{nz-f}{n-1}\right)} \right\}_{f=nz}^{f=0} \\ + \int \partial s \cdot \left\{ {}_{r-1} y_{(n-1)\left(\frac{a-s}{n-1}\right)} \right\}_{s=a-nz}^{s=0} \end{aligned}\right\} (\sigma);$$

telle eſt l'équation générale au moyen de laquelle, lorſqu'on connoît les courbes relatives à $n - 1$ corps, on peut déterminer celles qui ſont relatives à n corps.

V I.

Il faut préſentement, au moyen de l'équation (σ), trouver l'expreſſion générale de ${}_r y_{(n)(z)}$; pour cela, j'obſerve que ${}_r y_{(n)(z)}$ a une valeur de cette forme,

$$\left.\begin{aligned} {}_r y_{(n)(z)} = {}_r A_n \cdot z^{n-1} + {}_r B_n \cdot z^{n-2} + {}_r C_n \cdot z^{n-3} \ldots \\ + {}_r G_n \cdot z + {}_r H_n \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (i)$$

où ${}_r A_n$, ${}_r B_n$, &c. ſont des fonctions de r & n, qu'il s'agit de déterminer; pour y parvenir, je ferai uſage d'une méthode que j'ai expoſée ailleurs (*voyez la page 64 de ce Volume*); l'expreſſion précédente de ${}_r y_{(n)(z)}$, donne

$${}_r y_{(n-1)\cdot\left(\frac{nz-f}{n-1}\right)} = {}_r A_{n-1} \left(\frac{nz-f}{n-1}\right)^{n-2} + {}_r B_{n-1} \left(\frac{nz-f}{n-1}\right)^{n-3} \ldots$$

$$\ldots\ldots + {}_r G_{n-1} \left(\frac{nz-f}{n-1}\right)^0;$$

donc on aura

$$\int \partial f \cdot \left\{ {}_r y_{(n-1)\left(\frac{nz-f}{n-1}\right)} \right\}_{f=nz}^{f=0} = {}_r A_{n-1} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \cdot z^{n-1}$$

$$+ {}_r B_{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-2} \cdot z^{n-2}$$

$$+ {}_r C_{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-3} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-3} \cdot z^{n-3} + \text{\&c.} \ldots + {}_r G_{n-1} \cdot nz;$$

on aura pareillement

$${}_{r-1} y_{(n-1)\left(\frac{a-s}{n-1}\right)} = {}_{r-1} A_{n-1} \cdot \left(\frac{a-s}{n-1}\right)^{n-2}$$

$$+ {}_{r-1} B_{n-1} \cdot \left(\frac{a-s}{n-1}\right)^{n-3} + \text{\&c.} \ldots + {}_{r-1} G_{n-1}.$$

Donc,

Donc,

$$\int \partial s \cdot \left\{ {}_{r}y_{(n-1)}\left(\frac{s-1}{n-1}\right) \right\}_{s=a-nz}^{s=0} =$$

$${}_{r-1}A_{n-1}\left[\left(\frac{a}{n-1}\right)^{n-1} - \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \cdot z^{n-1}\right]$$

$$+ \frac{n-1}{n-2} \cdot {}_{r-1}B_{n-1} \cdot \left[\left(\frac{a}{n-1}\right)^{n-2} - \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-2} z^{n-2}\right]$$

$$+ \text{\&c.}$$

$$+ {}_{r-1}G_{n-1} \cdot (a - nz).$$

L'équation (σ) donnera donc

$${}_{r}y_{(n)(z)} = \left\{ \begin{array}{l} z^{n-1} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \cdot [{}_{r}A_{n-1} - {}_{r-1}A_{n-1}] \\ + z^{n-2} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-2} \cdot [{}_{r}B_{n-1} - {}_{r-1}B_{n-1}] \\ + z^{n-3} \cdot \frac{n-1}{n-3} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-3} \cdot [{}_{r}C_{n-1} - {}_{r-1}C_{n-1}] \\ + \text{\&c.} \\ + {}_{r-1}A_{n-1} \cdot \left(\frac{a}{n-1}\right)^{n-1} + \frac{n-1}{n-2} \cdot {}_{r-1}B_{n-1} \cdot \left(\frac{a}{n-1}\right)^{n-2} + \text{\&c.} \end{array} \right.$$

En comparant cette équation avec l'équation (i), on aura les suivantes,

$$\left. \begin{array}{l} {}_{r}A_{n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \cdot [{}_{r}A_{n-1} - {}_{r-1}A_{n-1}] \\ {}_{r}B_{n} = \frac{n-1}{n-2} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-2} \cdot [{}_{r}B_{n-1} - {}_{r-1}B_{n-1}] \\ {}_{r}C_{n} = \frac{n-1}{n-3} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-3} \cdot [{}_{r}C_{n-1} - {}_{r-1}C_{n-1}] \\ \text{\&c.} \\ {}_{r}G_{n} = n \cdot [{}_{r}G_{n-1} - {}_{r-1}G_{n-1}] \\ {}_{r}H_{n} = {}_{r-1}A_{n-1} \cdot \left(\frac{a}{n-1}\right)^{n-1} + \frac{n-1}{n-2} \cdot \left(\frac{a}{n-1}\right)^{n-2} \cdot {}_{r-1}B_{n-1} \\ \quad + \text{\&c.} \end{array} \right\} (\Psi);$$

Ces équations font aux différences finies partielles, excepté la dernière qui donne fans aucune intégration la valeur de ${}_{r}H_{n}$ lorfqu'on connoît ${}_{r}A_{n}$, ${}_{r}B_{n}$, &c.

On peut déterminer encore ${}_{r}H_{n}$ par la considération suivante; il est visible que ${}_{r}y_{(a)(a)} = {}_{r-1}y_{(a)}\left(\frac{a}{n}\right)$; c'est-à-dire que l'ordonnée de la courbe des probabilités, qui répond à l'extrémité de la $(r-1)$.ième partie de la droite AB divisée en n parties égales, est la même que l'ordonnée qui répond au commencement de la r.ième partie; donc on a

$${}_{r}H_{n} = {}_{r-1}A_{n}\cdot\left(\frac{a}{n}\right)^{n-1} + {}_{r-1}B_{n}\cdot\left(\frac{a}{n}\right)^{n-2} + \&c. + {}_{r-1}H_{n}; (\Upsilon)$$

ou ${}_{r}H_{n} - {}_{r-1}H_{n} = {}_{r-1}A_{n}\cdot\left(\frac{a}{n}\right)^{n-1} + {}_{r-1}B_{n}\cdot\left(\frac{a}{n}\right)^{n-2} + \&c.$

Partant, en intégrant par rapport à r seul, on a

$${}_{r}H_{n} = \Sigma\cdot\left[{}_{r-1}A_{n}\cdot\left(\frac{a}{n}\right)^{n-1} + {}_{r-1}B_{n}\cdot\left(\frac{a}{n}\right)^{n-2} + \&c.\right]$$

le caractéristique Σ étant le signe d'intégration pour les différences finies. Déterminons présentement ${}_{r}A_{n}$, ${}_{r}B_{n}$, &c.

La 1.ere des équations (Ψ) donne ${}_{1}A_{n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\cdot{}_{1}A_{n-1}$; & en intégrant, par la méthode de la *page 42* de ce Volume, on aura

$${}_{1}A_{n} = H\cdot\left(\frac{2}{1}\right)^{1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{3}\cdots\cdots\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1};$$

H étant une constante arbitraire; or, posant $n = 2$, ${}_{1}A_{2} = 2$; donc $H = 1$; on a d'ailleurs $\left(\frac{2}{1}\right)^{1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\cdots\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}$

$$= \frac{n^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} = \frac{n^{n-1}}{\nabla\,(n-1)},$$ en désignant, comme je l'ai fait ailleurs (*voyez la page 42 de ce Volume*), le produit $1.2.3\ldots\ldots(n-1)$, par $\nabla\cdot(n-1)$; on aura donc, ${}_{1}A_{n} = \frac{n^{n-1}}{\nabla\,(n-1)}$; partant

$${}_{2}A_{n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left[{}_{2}A_{n-1} - \frac{(n-1)^{n-2}}{\nabla\,(n-2)}\right];$$

soit ${}_{2}A_{n} = \frac{n^{n-1}}{\nabla\,(n-1)}\cdot u_{n}$; on aura $u_{n} = u_{n-1} - 1$;

donc $u_n = -n + H$; partant $_{,}A_n = -\frac{n^{n-1}}{\nabla(n-1)}.[n-H]$; or posant, $n = 2$, $_{1}A_n = 2$, car on a, par l'*article 11*, $_{1}y_{(2)(z)} = -2z + a$; donc $H = 1$ & $_{1}A_n = -\frac{n^{n-1}}{\Delta(n-1)}[n-1]$; partant,

$$_{2}A_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}.\left[_{1}A_{n-1} + \frac{(n-1)^{n-2}}{\nabla(n-2)}.(n-2)\right];$$

soit $_{2}A_n = \frac{n^{n-1}}{\nabla(n-1)}.u_n$, & l'on aura $u_n = u_{n-1} + (n-2)$; d'où l'on tire $u_n = \frac{(n-1).(n-2)}{1.2} + H$; or, posant $n = 2$, $_{2}A_n = 0$; donc $H = 0$ & $_{2}A_n = \frac{n^{n-1}}{\nabla(n-1)}.\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$.

En continuant d'opérer ainsi, on trouvera

$$_{r}A_n = \pm \frac{n^{n-1}}{\nabla(n-1)}.\frac{(n-1).(n-2).....(n-r+1)}{1.2.3.............(r-1)};$$

ou $_{r}A_n = \pm \frac{n^{n-1}}{\nabla(r-1).\nabla(n-r)}$; le signe $+$ ayant lieu si r est impair, & le signe $-$ s'il est pair.

J'observerai ici, relativement au produit $\frac{1}{\nabla(n-1)}$, que l'on a $\frac{1}{\nabla(n-r)} = 1$, lorsque $n - r = 0$, & lorsque $n - r = 1$; en effet $\frac{1}{\nabla(n-r)} = \frac{n.(n-1)...(n-r+1)}{1.2.3..n}$. Or, cette dernière quantité est égale à 1, lorsque $n - r = 1$, & lorsque $n - r = 0$; si r est plus grand que n, ces deux nombres étant supposés positifs & entiers, on a $\frac{1}{\nabla(n-r)} = 0$, parce qu'alors on a évidemment $n.(n-1)...(n-r+1) = 0$. Déterminons maintenant $_{r}B_n$.

Il est facile de voir, par les *articles précédens*, que l'on a $_{1}B_n = 0$, $_{1}C_n = 0$, &c. ensuite la seconde des équations (Ψ) donne $_{2}B_n = \frac{n-1}{n-2}.\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-2}.{}_{2}B_{n-1}$;

d'où je tire en intégrant, ${}_{2}B_{n} = \frac{H.n^{n-2}}{\nabla(n-2)}$; H étant une constante arbitraire; pour la déterminer, j'observe que l'équation différentielle en ${}_{2}B_{n}$, ne commence à exister que lorsque $n = 3$, en sorte que pour avoir H, il faut connoître ${}_{2}B_{3}$; or il est visible que ${}_{2}B_{3}$ est le terme tout constant de l'expression de ${}_{2}y_{(2)(3)}$, & partant, la dernière des équations (Ψ) donne ${}_{2}B_{3} = {}_{1}A_{2}.a = 2a$; donc $H = a$ & ${}_{2}B_{n} = \frac{n^{n-2}.a}{\nabla(n-2)}$.

De-là on aura ${}_{3}B_{n} = -\frac{n^{n-2}.a}{\nabla(n-2)}.[n + H]$, H étant une constante arbitraire; or, posant $n = 2$, ${}_{3}B_{n} = 0$; donc $H = -2$ & ${}_{3}B_{n} = -\frac{n^{n-2}}{\nabla(n-2)}.a.[n-2]$.

On aura, de la même manière,

$${}_{4}B_{n} = \frac{n^{n-2}.a}{\nabla(n-2)}.\left[\frac{(n-2).(n-3)}{1.2} + H\right];$$

or posant $n = 2$, ${}_{4}B_{n} = 0$; donc $H = 0$; en continuant d'opérer ainsi, on trouvera généralement,

$${}_{r}B_{n} = \mp \frac{n^{n-2}.a}{\nabla(n-2)}.\frac{(n-2).(n-3)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots\ldots(r-2)};$$

ou ${}_{r}B_{n} = \mp \frac{n^{n-2}.a}{\nabla(r-2).\nabla(n-r)}$.

La troisième des équations (Ψ) donne

${}_{2}C_{n} = \frac{n-1}{n-3}.\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-3}.{}_{2}C_{n-1}$; d'où je tire en intégrant, ${}_{2}C_{n} = \frac{n^{n-3}.H}{\nabla(n-3)}$; pour déterminer H, j'observe que l'équation différentielle en ${}_{2}C_{n}$, ne commence à exister que lorsque $n = 4$; il faut donc, pour avoir H, connoître ${}_{2}C_{3}$; or il est visible que ${}_{2}C_{3}$ est le terme tout constant de l'expression de ${}_{2}y_{(3)(2)}$; partant, la dernière des équations (Ψ) donne ${}_{2}C_{3} = {}_{1}A_{2}.\left(\frac{a}{2}\right)^{2}$; donc, ${}_{2}C_{3} = \frac{a^{2}}{2}$, & $H = \frac{a^{2}}{1.2}$; ainsi ${}_{2}C_{n} = \frac{n^{n-3}.a^{2}}{1.2.\nabla(n-3)}$.

De-là on tirera ${}_3C_n = -\frac{n^{n-3}.a^2}{1.2.\nabla(n-3)}.[n + H]$.

Pour déterminer H, il faut connoître ${}_3C_3$; or, cette quantité eſt le terme tout conſtant de l'expreſſion de ${}_3y_{(3)(z)}$; ainſi la dernière des équations (Ψ) donne

${}_3C_3 = {}_2A_2.(\frac{a}{2})^2 + 2.{}_2B_2.\frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}$; partant,

$H = -4$, & ${}_3C_n = -\frac{n^{n-3}.a^2}{1.2.\nabla(n-3)}.[\frac{n-3}{1} - 1]$.

De-là je tire

$${}_4C_n = \frac{n^{n-3}.a^2}{1.2.\nabla(n-3)}.[\frac{(n-3).(n-4)}{1.2} - \frac{n-3}{1} + H];$$

or on a ${}_4C_3 = 0$; donc $H = 0$; en continuant d'opérer ainſi, on trouvera généralement

$${}_rC_n = \mp\frac{n^{n-3}.a^2}{1.2.\nabla(n-3)}.[\frac{(n-3).(n-4)...(n-r)}{1.2.3...(r-2)} - \frac{(n-3)...(n-r+1)}{1.2...(r-3)}];$$

ou

$${}_rC_n = \mp\frac{n^{n-3}.a^2}{1.2}.[\frac{1}{\nabla(r-2).\nabla(n-r-1)} - \frac{1}{\nabla(r-3).\nabla(n-r)}],$$

le ſigne ſupérieur ayant lieu ſi r eſt impair, & l'inférieur s'il eſt pair. J'ai trouvé de la même manière,

$${}_rD_n = \mp\frac{n^{n-4}.a^3}{1.2.3}.[\frac{1}{\nabla(r-2).\nabla(n-r-2)} - \frac{4}{\nabla(r-3).\nabla(n-r-1)} + \frac{1}{\nabla(r-4).\nabla(n-r)}];$$

le ſigne ſupérieur ayant toujours lieu ſi r eſt impair, & l'inférieur s'il eſt pair.

VII.

On aura ainſi, par la méthode précédente, la loi de chaque terme, quels que ſoient r & n; mais cela ne ſuffit pas encore, il faut de plus avoir la loi de ces termes les uns par rapport aux autres, c'eſt-à-dire la loi du $q.^{ième}$ terme de la ſuite ${}_rA_n.z^{n-1} + {}_rB_n.z^{n-2} +$ &c. nommons ${}_r\overset{q}{T}_n.z^{n-q}$,

ce terme; ${}_{r}T_{n}$ sera fonction de q, de r & de n; nous pouvons déjà connoître, par ce qui précède, de quelle manière il est fonction de r & de n; il faut présentement déterminer de quelle manière il est fonction de q; pour cela je reprends les termes déjà trouvés,

$$ {}_{r}A_{n} = \pm \frac{n^{n-1}}{\nabla(r-1).\nabla(n-r)}, $$

$$ {}_{r}B_{n} = \mp \frac{n^{n-2}.a}{\nabla(r-2).\nabla(n-r)}, $$

$$ {}_{r}C_{n} = \mp \frac{n^{n-3}.a^{2}}{1.2}.\left[\frac{1}{\nabla(r-2).\nabla(n-r-1)} - \frac{1}{\nabla(r-3).\nabla(n-r)}\right]; $$

$$ {}_{r}D_{n} = \mp \frac{n^{n-4}.a^{3}}{1.2.3}\left[\frac{1}{\nabla(r-2).\nabla(n-r-2)} - \frac{4}{\nabla(r-3).\nabla(n-r-1)} + \frac{1}{\nabla(r-4).\nabla(n-r)}\right], $$

le signe supérieur ayant lieu si r est impair, & l'inférieur s'il est pair. De-là je conclus que l'on a généralement

$$ {}_{r}\overset{q}{T}_{n} = \mp \frac{n^{n-q}.a^{q-1}}{\nabla(q-1)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\nabla(r-2).\nabla.(n-r-q+2)} + \frac{M_{q}}{\nabla(r-3).\nabla(n-r-q+3)} \\ + \frac{{}'M_{q}}{\nabla(r-4).\nabla.(n-r-q+4)} + \&c\ldots \\ + \frac{{}^{q-3}M_{q}}{\nabla(r-q).\nabla(n-r)}; \end{array} \right. $$

expression dans laquelle il faut déterminer M_{q}, ${}'M_{q}$, &c. Pour y parvenir, j'observe que cette valeur de ${}_{r}\overset{q}{T}_{n}$ ne peut commencer à exister que lorsque $n = q$; or, on a... ${}_{3}\overset{q}{T}_{q} = - \frac{a^{q-1}.M_{q}}{\nabla(q-1)}$; d'ailleurs l'équation (Γ) donne

$$ {}_{3}\overset{q}{T}_{q} = {}_{2}A_{q}.\left(\frac{a}{q}\right)^{q-1} + {}_{2}B_{q}.\left(\frac{a}{q}\right)^{q-2} + \&c\ldots + {}_{2}\overset{q}{T}_{q} $$

$$ = a^{q-1}.\left[-\frac{1}{\nabla(q-2)} + \frac{1}{\nabla(q-2)} + \frac{1}{1.2.\nabla(q-3)} + \&c\ldots\ldots + \frac{1}{\nabla(q-1)}\right] $$

$$ = \frac{a^{q-1}}{\nabla(q-1)}.\left[1 + \frac{(q-1)}{1} + \frac{(q-1).(q-2)}{1} + \&c\ldots + 1 - q\right] $$

$$ = \frac{a^{q-1}}{\nabla(q-1)}.\left[2^{q-1} - q\right]; $$

en comparant cette expression de ${}_{1}\overset{q}{T}_{q}$ avec la précédente, on aura $-M_q = 2^{q-1} - q$.

Pour trouver ${}'M_q$, j'observe que l'on a ${}_{2}\overset{q}{T}_{q} = \frac{{}'M_q . a^{q-1}}{\nabla(q-1)}$. D'ailleurs,

$${}_{2}\overset{q}{T}_{q} = {}_{2}A_q . \left(\frac{a}{q}\right)^{q-1} + {}_{2}B_q . \left(\frac{a}{q}\right)^{q-2} \ldots + {}_{2}T_q;$$

ce qui donne

$${}_{2}\overset{q}{T}_{q} = a^{q-1} \left\{ \begin{array}{l} + \frac{1}{1.2.\nabla(q-3)} \\ - \frac{1}{\nabla(q-3)} \\ - \frac{1}{1.2.\nabla(q-4)} + \frac{2^2-3}{1.2.\nabla(q-3)} \\ - \frac{1}{1.2.3.\nabla(q-5)} + \frac{2^3-4}{1.2.3.\nabla(q-4)} \\ - \text{\&c.} \\ - \frac{1}{\nabla(q-2)} + \frac{2^{q-2}-(q-1)}{\nabla(q-2)} \\ + \frac{2^{q-1}-q}{\nabla(q-1)}. \end{array} \right.$$

En sommant cette quantité, on aura

$${}_{2}\overset{q}{T}_{q} = \frac{a^{q-1}}{\nabla(q-1)} . [3^{q-1} - 2^{q-1} . q + \frac{q.(q-1)}{1.2}], \text{\&c.}$$

En comparant cette valeur de ${}_{2}\overset{q}{T}_{q}$, avec la précédente, on trouvera

$${}'M_q = 3^{q-1} - 2^{q-1} . q + \frac{q.(q-1)}{1.2}.$$

J'ai trouvé de la même manière,

$$- {}''M_q = 4^{q-1} - 3^{q-1} . q + 2^{q-1} . \frac{q.(q-1)}{1.2} - \frac{q.(q-1).(q-2)}{1.2.3}.$$

Il est inutile de chercher de nouveaux termes, parce que leur loi est visible, en sorte que l'on a généralement

$$ {}^{s}M_{q} = \pm \left\{ (s+2)^{q-1} - (s+1)^{q-1} \cdot q + s^{q-1} \cdot \frac{q \cdot (q-1)}{1 \cdot 2} - (s-1)^{q-1} \cdot \frac{q \cdot (q-1) \cdot (q-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, + \&c. \right. $$

s ne pouvant excéder $q - 3$, & le ſigne ſupérieur ayant lieu ſi s eſt impair, & l'inférieur s'il eſt zéro ou pair; on aura donc

$$ {}_{r}\overset{q}{T}_{n} = \mp \frac{n^{z-q} \cdot a^{q-1}}{\nabla(q-1)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\nabla(r-2) \cdot \nabla(n-r-q+2)} \\ - \frac{[2^{q-1} - q]}{\nabla(r-3) \nabla(n-r-q+3)} \\ + \frac{[3^{q-1} - 2^{q-1} \cdot q + \frac{q \cdot (q-1)}{1 \cdot 2}]}{\nabla(r-4) \cdot \nabla(n-r-q+4)} - \&c. \ldots \\ \mp \frac{[(q-1)^{q-1} - (q-2)^{q-1} \cdot q + \&c.]}{\nabla(r-q) \cdot \nabla(n-r)} \end{array} \right. ; $$

partant,

$$ {}_{r}y_{(n)(z)} = \pm \frac{(nz)^{n-1}}{\nabla(r-1) \cdot \nabla(n-r)} \mp \frac{a\,(nz)^{n-2}}{\nabla(r-2) \cdot \nabla(n-r)} $$

$$ \mp \frac{a^{2}(nz)^{n-3}}{1 \cdot 2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\nabla(r-2) \cdot \nabla(n-r-1)} \\ - \frac{1}{\nabla(r-3) \cdot \nabla(n-r)} \end{array} \right. $$

. . . .

$$ \mp \frac{a^{q-1} \cdot (nz)^{n-q}}{\nabla(q-1)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\nabla(r-2) \cdot \nabla(n-r-q+2)} \\ - \frac{[2^{q-1} - q]}{\nabla(r-3) \cdot \nabla(n-r-q+3)} \\ + \frac{[3^{q-1} - 2^{q-1} \cdot q + \frac{q \cdot (q-1)}{1 \cdot 2}]}{\nabla(r-4) \cdot \nabla \cdot (n-r-q+4)} - \&c. \ldots \\ \mp \frac{[(q-1)^{q-1} - (q-2)^{q-1} \cdot q + \&c.]}{\nabla(r-q) \cdot \nabla(n-r)} \end{array} \right. $$

$$ \mp \&c. $$

$$ + \frac{a^{n-1}}{\nabla(n-1)} \cdot [(r-1)^{n-1} - \frac{n}{1} \cdot (r-2)^{n-1} + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot (r-3)^{n-1} - \&c.]; $$

le ſigne

le ſigne ſupérieur ayant lieu ſi r eſt impair, & l'inférieur s'il eſt pair, excepté pour le terme

$$\mp \frac{[(q-1)^{q-1} - (q-2)^{q-1} q + \&c.]}{\nabla(r-q) \cdot \nabla(n-r)}$$

pour lequel le ſigne ſupérieur a lieu lorſque q eſt impair, & l'inférieur lorſqu'il eſt pair.

VIII.

Si l'on fait, comme précédemment, $AB = a = 90^d$ (*figure 4*), & qu'on diviſe cette droite en n parties égales, on aura, pour l'équation de la courbe correſpondante à la r.ième partie, $a^{n-2} . y = {}_r y_{(n)(y)}$. Si l'on veut enſuite déterminer la probabilité que l'inclinaiſon moyenne des n orbites eſt compriſe entre deux points quelconques P & Q, on déterminera l'aire $STPQ$, & le quotient de cette ſurface diviſée par l'aire entière $Amm'MSTB$ exprimera la probabilité demandée. On voit ainſi que la ſuperficie entière de la courbe eſt un élément eſſentiel à connoître; pour y parvenir, j'obſerve que l'aire compriſe entre les deux abſciſſes $\frac{r-1}{n} . a$ & $\frac{r}{n} a$ eſt $\frac{1}{a^{n-2}} . [\frac{{}_r A_n}{n} . (\frac{a}{n})^n + \frac{{}_r B_n}{n-1} . (\frac{a}{n})^{n-1} + \&c.]$;

je déſigne par ${}_r K_n$ cette ſurface; or la dernière des équations (Ψ) de l'*article VI*, donne

$${}_{r+1}H_{n+1} = n . [\frac{{}_r A_n}{n} . (\frac{a}{n})^n + \frac{{}_r B_n}{n-1} . (\frac{a}{n})^{n-1} + \&c.];$$

donc on aura ${}_r K_n = \frac{{}_{r+1}H_{n+1}}{n . a^{n-2}}$; partant,

$${}_r K_n = \frac{a^2}{n . \nabla(n)} . [r^n - \frac{n+1}{1} . (r-1)^n + \&c].$$

Préſentement, la ſuperficie entière de la courbe eſt égale à ${}_n K_n + {}_{n-1} K_n + \&c.$ nommant donc S cette ſuperficie, on aura

$$S = \frac{a^n}{n.\nabla(n)} . \begin{cases} n^n - \frac{n+1}{1}.(n-1)^n + \frac{(n+1).n}{1.2}.(n-2)^n - \&c. \\ + (n-1)^n - \frac{n+1}{1}.(n-2)^n + \&c. \\ + (n-2)^n - \&c. \\ + \&c. \end{cases}$$

$$= \frac{a^n}{n.\nabla(n)} . \begin{cases} n^n - n.(n-1)^n \\ + \frac{n.(n-1)}{1.2}.(n-2)^n - \&c. \end{cases}$$

Or, en désignant par la caractéristique Δ, la différence finie d'une quantité, on a, comme l'on sait, $n^n - n.(n-1)^n + \&c. = \Delta^n.\ o^n$; d'ailleurs, on a généralement $\Delta.x^n = \nabla.(n)$; partant $S = \frac{a^n}{n}$

REMARQUE.

L'aire comprise entre les deux abscisses $\frac{r-1}{n}.a$, & $\frac{r}{n}.a$, doit être égale à l'aire comprise entre les deux abscisses $\frac{n-r+1}{n}.a$, & $\frac{n-r}{n}a$; c'est-à-dire, que l'on doit avoir ${}_rK_n = {}_{n-r+1}K_n$, parce que ces deux surfaces sont également situées par rapport aux extrémités A & B; on doit donc avoir

$$r^n - \frac{(n+1)}{1}.(r-1)^n + \frac{(n+1).n}{1.2}.(r-2)^n - \&c.$$
$$= (n-r+1)^n - \frac{(n+1).}{1}(n-r)^n + \&c. \ (\mu)$$

en continuant l'un & l'autre membre de cette équation, jusqu'à ce qu'on arrive à un terme qui soit nul; on peut s'assurer d'ailleurs de la vérité de cette équation, en observant que l'on a $r^n - (n+1).(r-1)^n + \&c.$ $\mp(n+1).(r-n)^n \pm (r-n-1)^n = \Delta^{n+1}.(r-n-1)^n$, le signe $+$ ayant lieu si n est impair, & le signe $-$ s'il

eſt pair ; or $\Delta^{n+1} . r^n = 0$, d'où il eſt facile de conclure l'équation (μ).

I X.

Pour appliquer la théorie précédente à la Nature, il faudroit ſuppoſer $n = 63$, parce qu'il exiſte préſentement ſoixante-trois Comètes dont on a calculé les orbites ; mais ce calcul ſeroit pénible à cauſe de ſa longueur ; ainſi l'abandonnant à ceux qui deſireront de l'entreprendre, je me contenterai de ſuppoſer ici $n = 12$; j'imagine donc la droite AB, partagée en douze parties égales, dont chacune ſoit conſéquemment de $7^d\,\frac{1}{2}$; on trouvera par l'article précédent, que la probabilité que l'inclinaiſon moyenne des douze orbites ſera compriſe entre $45^d - 7^d\frac{1}{2}$ & 45^d, ou entre $45^d + 7^d\frac{1}{2}$ & 45^d, eſt égale à

$$\frac{6^{12}}{\nabla(12)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 - 13 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{12} + \frac{13 \cdot 12}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{12} \\ - \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^{12} + \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^{12} \\ - \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{12}. \end{array} \right.$$

Or, en faiſant le calcul, je trouve cette quantité égale à 0,339 ; d'où il ſuit, 1.° qu'il y a 839 à parier contre 161, que l'inclinaiſon moyenne de douze orbites ſera au-deſſus de $37^d\,\frac{1}{2}$; 2.° qu'il y a autant à parier qu'elle ſera au-deſſous de $52^d\,\frac{1}{2}$; 3.° qu'il y a 678 à parier contre 322, qu'elle ſera entre les deux limites $37^d\,\frac{1}{2}$, & $52^d\,\frac{1}{2}$.

Maintenant, ſi l'on ajoute enſemble les inclinaiſons des douze dernières Comètes obſervées dont voici le Tableau :

Comètes des Années	*Inclinaison des Orbites.*		
1774	82^d	48'	0"
1773	61.	25.	21.
1772	18.	59.	40.
1771	11.	15.	29.
1771	31.	25.	55.
1770	1.	44.	30.
1769	40.	42.	30.
1766	8.	20.	0.
1766	40.	50.	20.
1764	53.	54.	19.
1763	73.	39.	29.
1762	85.	3.	2.

on trouvera que leur inclinaiſon moyenne eſt de 42^d 31'. Pour ſoupçonner dans ces Comètes une cauſe qui tende à les faire mouvoir dans le plan de l'écliptique, il faudroit qu'il y eût un très-grand nombre à parier contre l'unité, que ſi elles étoient lancées au haſard, leur inclinaiſon moyenne ſurpaſſeroit 42^d 30'; or, nous venons de trouver qu'il y a 839 contre 161, ce qui ne fait pas ſix contre un, à parier qu'elle ſera au-deſſus de 37^d $\frac{1}{2}$, & il y a conſidérablement moins à parier qu'elle ſera au-deſſus de 42^d 30'.

X.

Sur la figure de la Terre.

Lorſque Newton voulut déterminer la figure de la Terre, il conſidéra cette Planète comme une maſſe fluide homogène, & il ſuppoſa que la figure qu'elle a priſe en vertu de ſon mouvement de rotation eſt celle d'un ſphéroïde elliptique. Cette ſuppoſition étoit fort précaire; les Géomètres en ont enſuite démontré la poſſibilité; mais ſi la figure néceſſaire pour l'équilibre, au lieu d'être elliptique, eût été d'un autre genre, on auroit été fort embarraſſé pour la déterminer, parce qu'il eſt beaucoup plus facile de s'aſſurer ſi une figure donnée convient à l'équilibre, que de chercher immédiatement

celles qui peuvent y convenir. Ce dernier Problème est sans contredit un des points les plus intéressans du Système du Monde ; voici quelques recherches qui y sont relatives.

PROBLÈME.

Si une masse fluide homogène dont toutes les parties s'attirent en raison réciproque du quarré des distances, tourne autour d'un de ses axes quelconques, on propose de déterminer la figure qu'elle doit prendre.

Je supposerai ici deux choses, 1.° que cette figure diffère infiniment peu de la sphère, 2.° qu'elle est une surface de révolution. Cela posé.

Soit AMB, la courbe qui par sa révolution autour de l'axe AB, engendre la surface proposée, & ATB un cercle décrit sur AB, comme diamètre ; soit R un point quelconque du corps dont V soit la projection sur le plan AMB, & que l'on mène par le point M, & dans le plan AMB, la tangente MN à la courbe AMB, la droite MQ, parallèle à AB, & la droite MP perpendiculaire sur AB ; que l'on mène ensuite AQ & LV, parallèles à PM, & que l'on élève perpendiculairement au plan AMB, la droite MZ, qui sera visiblement tangente à la surface de révolution ; soit q l'angle VMN, ϖ l'angle NMQ, φ l'arc AT, $CB = CA = 1$; soit encore $RM = r$ & p l'angle RMZ, on trouvera facilement que la molécule R est égale à $r^2 . \sin. p . \partial p . \partial q . \partial r$; ainsi l'action de cette molécule sur le point M est . . . $\sin. p . \partial p . \partial q . \partial r$; en la décomposant en trois, la première parallèlement à MN & de M vers N ; la seconde, perpendiculairement à cette droite ; & la troisième, parallèlement à MZ ; on aura, pour la première, $\sin. p^2 . \cos. q . \partial p . \partial q . \partial r$; d'où en intégrant successivement, par rapport aux trois variables p, q & r, on aura l'action entière de la masse sur le point M, parallèlement à MN, & de M vers N ; mais Fig. 5.

mais on a généralement $\int\int P \partial p \, \partial q \, . \, \text{cof.}\, q = 0$, en ſuppoſant que cof. q ne ſe trouve point dans P, élevé à une puiſſance impaire, & prenant les intégrales depuis $q = 0$ juſqu'à $q = 180^d$, & depuis $p = 0$ juſqu'à $p = 180^d$; car dans cette ſuppoſition il eſt viſible que l'élément $P \partial q$ ſera le même pour deux valeurs de q priſes à égales diſtances de part & d'autre de 90 degrés; mais cof. q ſera le même dans les deux cas, avec des ſignes contraires; d'où l'on voit que la ſomme des deux élémens $P \partial q \, . \text{cof.}\, q$ correſpondans, l'un à $q = 90^d - \alpha$, l'autre à $q = 90^d + \alpha$, ſera nulle, & qu'ainſi $\int\int P \partial p \, \partial q \, . \, \text{cof.}\, q = 0$; l'équation précédente deviendra donc

$$+ \int\int 2 \, . \, \text{ſin.}\, p^3 \, . \, \text{cof.}\, q^2 \, . \, \partial p \, \partial q \, . \left[\frac{\partial \mu}{\partial \varphi} \, . \, \text{ſin.}\, \varphi + \mu \, . \, \text{cof.}\, \varphi \right]$$

$$+ \int\int . \frac{\text{ſin.}\, p \, . \, \text{cof.}\, q \, . \, \partial p \, . \, \partial q}{\text{ſin.}\, q} \, . \left\{ \begin{array}{l} \Pi \, . [\text{cof.}\, \varphi + 2 \, . \, \text{ſin.}\, p^2 \, \text{ſin.}\, q (\text{cof.}\, q \, . \, \text{ſin.}\, \varphi - \text{ſin.}\, q \, . \, \text{cof.}\, \varphi)] \\ - \Pi \, . \, (\text{cof.}\, \varphi) \end{array} \right\} = h \, . \, \text{ſin.}\, \varphi \, \text{cof.}\, \varphi;$$

mais on a

$$\frac{\partial \mu}{\partial \varphi} \, . \, \text{ſin.}\, \varphi + \mu \, . \, \text{cof.}\, \varphi = \frac{\partial . (\mu \, . \, \text{ſin.}\, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial . \Pi \, . \, (\text{cof.}\, \varphi)}{\partial \varphi};$$

ſoit donc $\text{cof.}\, \varphi = x$, & $\Pi \, . \, (\text{cof.}\, \varphi) = y$; partant

$$\frac{\partial . \Pi \, . \, (\text{cof.}\, \varphi)}{\partial \varphi} = - \frac{\partial y}{\partial x} \, . \, \text{ſin.}\, \varphi; \; \&$$

$$\Pi \, . \left[\text{cof.}\, \varphi + 2 \, . \, \text{ſin.}\, p^2 \, . \, \text{ſin.}\, q \, . (\text{cof.}\, q \, . \, \text{ſin.}\, \varphi - \text{ſin.}\, q \, . \, \text{cof.}\, \varphi) \right]$$

$$= y + 2 \, . \, \text{ſin.}\, p^2 \, . \, \text{ſin.}\, q \, . (\text{cof.}\, q \, . \, \text{ſin.}\, \varphi - \text{ſin.}\, q \, . \, \text{cof.}\, \varphi) \, . \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$+ 4 \, \text{ſin.}\, p^4 \, . \, \text{ſin.}\, q^2 \, . (\text{cof.}\, q \, . \, \text{ſin.}\, \varphi - \text{ſin.}\, q \, . \, \text{cof.}\, \varphi)^2 \, . \frac{\partial \partial y}{1 \, . \, 2 \, . \, \partial x^2} + \&c.$$

de plus, ſi l'on nomme π le rapport de la demi-circonférence au rayon, on aura

$$\int\int 2 \, \partial p \, . \, \partial q \, . \, \text{ſin.}\, p^3 \, . \, \text{cof.}\, q^2 = \frac{4}{3} \pi;$$

donc,

donc,

$$-\frac{4}{3}\pi \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \iint \frac{\partial p \cdot \partial q}{\text{fin.}\, \varphi} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \text{fin.}\, p^1 \cdot \text{cof.}\, q \cdot (\text{cof.}\, q \cdot \text{fin.}\, \varphi - \text{fin.}\, q \cdot \text{cof.}\, \varphi) \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \\ + 4 \cdot \text{fin.}\, p^5 \cdot \text{fin.}\, q \cdot \text{cof.}\, q \cdot (\text{cof.}\, q \cdot \text{fin.}\, \varphi - \text{fin.}\, q \cdot \text{cof.}\, \varphi)^2 \frac{\partial \partial y}{1 \cdot 2 \cdot \partial x^2} \\ + 8 \cdot \text{fin.}\, p7 \cdot \text{fin.}\, q^2 \cdot \text{cof.}\, q \cdot (\text{cof.}\, q \cdot \text{fin.}\, \varphi - \text{fin.}\, q \cdot \text{cof.}\, \varphi)^3 \cdot \frac{\partial^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial x^3} \\ + \&c. \end{array} \right\} = hx \quad (\text{A}).$$

Or, il eſt aiſé de voir, par ce qui précède, que l'on ne doit admettre dans le développement des puiſſances de $(\text{cof.}\, q \cdot \text{fin.}\, \varphi - \text{fin.}\, q \cdot \text{cof.}\, \varphi)$, que les termes dans leſquels cof. q ſe trouve élevé à une puiſſance impaire, d'où l'on tire

$$hx = -\frac{4}{3}\pi \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \iint \partial p \cdot \partial q \cdot \text{fin.}\, p^3 \cdot \text{cof.}\, q \cdot$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \text{cof.}\, q \\ + 4 \cdot \frac{\partial \partial y}{1 \cdot 2 \cdot \partial x^2} \cdot \text{fin.}\, p^2 \cdot \text{fin.}\, q \cdot (-2x \cdot \text{fin.}\, q \cdot \text{cof.}\, q) \\ + 8 \cdot \frac{\partial^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial x^3} \text{fin.}\, p^4 \cdot \text{fin.}\, q^2 \cdot [(1 - xx)\, \text{cof.}\, q^3 + 3x^2 \cdot \text{cof.}\, q \cdot \text{fin.}\, q^2]; \\ + \&c. \end{array} \right.$$

mais on a

$$\int \partial p \cdot \text{fin.}\, p^{2i+1} = \frac{2 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2i)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2i+1)}; \int \partial q \cdot \text{cof.}\, q^{2i} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2i-1)}{2i \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots i}\, \pi;$$

$$\int \partial q \cdot \text{fin.}\, q^{2n+2i} \cdot \text{cof.}\, q^{2n-2i} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+2i-1)}{(2n-2i+1) \cdot (2n-2i+3) \ldots (4n-1)} \cdot \int \partial q \cdot \text{cof.}\, q^{4n};$$

$$\int \partial q \cdot \text{fin.}\, q^{2n+2i-2} \cdot \text{cof.}\, q^{2n-2i} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+2i-3)}{(2n-2i+1) \cdot (2n-2i+3) \ldots (4n-3)} \cdot \int \partial q \cdot \text{cof.}\, q^{4n-2};$$

on aura donc

$$o = \frac{h}{\pi} + 2^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{1 \cdot 2 \cdot \partial x^2} \cdot \frac{4}{15} - 2^3 \cdot \frac{\partial^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \partial x^3} \cdot \frac{2}{35 \cdot x} \cdot (1 + 2xx) + \&c.$$

$$+ \frac{2^{2n+1} \cdot \partial^{2n} y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2n \cdot \partial x^{2n}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots\ldots (2n-1)}{(2n+1) \cdot (2n+3) \ldots (4n+1)}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} 2n(1-xx)^{n-1} + \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{2n+1}{2n-1} \cdot x^2 (1-xx)^{n-2} \\ + \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot (2n-3) \cdot (2n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{2n+1}{2n-1} \cdot \frac{2n+3}{2n-3} \cdot x^4 (1-xx)^{n-3} + \&c. \end{array} \right.$$

$$-\frac{2^{2n+2}.\partial^{2n+2}y}{1.2.3\ldots 2n.\partial x^{2n+2}}\cdot\frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{(2n+3).(2n+5)\ldots(4n+3).x}$$

$$\times\begin{cases}(1-xx)^n+\dfrac{(2n+1).2n}{1.2}.x^2(1-xx)^{n-1}; \quad (Z)\\ +\dfrac{(2n+1).2n.(2n-1).(2n-2)}{1.2.3.4}\cdot\dfrac{2n+3}{2n-1}.x^4(1-xx)^{n-2}+\&c.\end{cases}$$

$+$ &c.

Voilà l'équation infinie qu'il faut résoudre pour avoir la valeur de y; il est évident que l'équation $\partial^3 y = 0$, en est une intégrale particulière, ce qui donne une ellipse pour la courbe du méridien; on aura dans ce cas, $y = cx^2 + bx + a$; or, il est visible, à l'inspection de la *figure 5*, que $y = 0$ lorsque $x = 1$, & lorsque $x = -1$, ce qui donne, $0 = c + b + a$, & $0 = c - b + a$; d'où l'on tire $b = 0$ & $a = -c$; partant $y = -c(1 - xx)$; or, l'équation (Z) donne, en y substituant au lieu de y cette valeur, $c = -\frac{15}{16}\cdot\frac{h}{\pi}$; partant

$y = \frac{15}{16}\cdot\frac{h}{\pi}.(1 - xx) = \frac{15}{16}\cdot\frac{h}{\pi}.\text{sin.}\,\phi^2 = \mu.\text{sin.}\,\phi$.

Donc, $\mu = \frac{15}{16}\cdot\frac{h}{\pi}.\text{sin.}\,\phi$; d'où l'on tire ....

$PM = \text{sin.}\,\phi\left(1 + \frac{15}{16}\cdot\frac{\alpha h}{\pi}\right)$; je suppose que la force centrifuge à l'équateur soit à la pesanteur, comme $\alpha m : 1$; on pourra, en regardant la masse comme sphérique, supposer la pesanteur égale à la masse divisée par le quarré du rayon CB, ce qui donne $\frac{4}{3}\pi$ pour l'expression de cette force; partant $\alpha h = \alpha m.\frac{4}{3}\pi$; & $PM = \text{sin.}\,\phi.\left(1 + \frac{5}{4}\alpha m\right)$; d'où il suit que le rayon de l'équateur, est $1 + \frac{5}{4}\alpha m$,

& par conséquent l'aplatissement de la masse est égal à $\frac{5}{4}\alpha m$; ce que l'on sait d'ailleurs.

Je suppose maintenant $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2c + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; on aura,

$$o = \frac{h}{\pi} + \frac{16}{15} c + \frac{4}{15} . 2^2 . \frac{\partial^2 z}{1.2.\partial x^2} + \&c.$$

& déterminant c de manière que $o = \frac{h}{\pi} + \frac{16}{15} . c$; on aura l'équation

$$o = 2^2 . \frac{\partial^2 z}{1.2.\partial x^2} . \frac{4}{15} - 2^3 . \frac{\partial^3 z}{1.2.3.\partial x^3} . \frac{2}{35.x} . (1 + 2xx) + \&c.$$

Je suppose que l'intégrale de cette équation soit $z = \varphi(x)$, on aura $y = \varphi(x) + cx^2 + bx + a$; la supposition de $h = o$, donne $y = z = \varphi(x)$; on voit donc que le mouvement de rotation du corps ne fait qu'ajouter à la valeur de y la quantité, $cx^2 + bx + a$; ainsi toutes les figures de révolution dans lesquelles l'équilibre a lieu lorsque la masse est immobile, ont également lieu lorsqu'elle tourne autour de son axe de révolution, pourvu qu'on ajoute à l'expression de y, $cx^2 + bx + a$. Mais lorsque $h = o$, existe-t-il d'autre cas d'équilibre que la figure sphérique? il paroît difficile de prononcer sur cet objet; voici cependant une remarque fort générale qui exclut un grand nombre de figures.

Je suppose que dans le cas de $h = o$ on ait,

$$y = H + ax^r + bx^s \ldots\ldots + qx^\mu . r, s, \mu, \&c.$$

étant des nombres quelconques, & x^μ étant la puissance de μ la plus haute; si l'on substitue cette valeur dans l'équation (Z), le terme qx^μ en donnera une de cette forme,

$$qx^{\mu-2} . [\frac{\mu.(\mu-1)}{1.2} . 2^2 . \frac{4}{15} - 2^3 . \frac{\mu.(\mu-1).(\mu-2)}{1.2.3} . \frac{4}{35} + \&c.]$$

& comme il sera le plus élevé par rapport à x, il faut que

l'on ait

$$o = 2^2 \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{\mu.(\mu-1)}{1.2} - 2^3 \cdot \frac{\mu.(\mu-1).(\mu-2)}{1.2.3} \cdot \frac{4}{35} + \&c. \; (t).$$

Voyons donc quelles ſont les valeurs de μ qui peuvent ſatisfaire à cette équation ; en la conſidérant ſous cette forme, il ſeroit fort difficile de déterminer ces valeurs, mais on peut la mettre ſous une forme beaucoup plus ſimple de la manière ſuivante.

Je reprends pour cela l'équation (A), & j'obſerve qu'elle ſe réduit à celle-ci, en faiſant, $h = o$

$$o = \iint \frac{\partial p \partial q}{\text{ſin.}\varphi} \cdot \begin{cases} 2^2.\text{ſin.}p^5.\text{ſin.}q.\text{coſ.}q.(\text{coſ.}q.\text{ſin.}\varphi - \text{ſin.}q.\text{coſ.}\varphi)^2 \cdot \frac{\partial\partial y}{1.2.\partial x^2} \\ + 2^3.\text{ſin.}p^7.\text{ſin.}q^3\,\text{coſ.}q.(\text{coſ.}q.\text{ſin.}\varphi - \text{ſin.}q.\text{coſ.}\varphi)^3 \cdot \frac{\partial^3 y}{1.2.3.\partial x^3} \\ + \&c. \end{cases}$$

Si l'on ſuppoſe dans cette équation, $y = q x^{\mu}$, & $\text{ſin.}\varphi^2 = -x^2$, il eſt viſible qu'elle donnera l'équation (t) ; or, dans cette ſuppoſition, on a $\text{ſin.}\varphi = x\sqrt{(-1)}$; partant

$$(\text{coſ.}q.\text{ſin.}\varphi - \text{ſin.}q.\text{coſ.}\varphi)^i = x^i(\sqrt{-1})^i . \times [\text{coſ.}q + \sqrt{(-1)}\,\text{ſin.}q]^i = x^i.(\sqrt{-1})^i . \times [\text{coſ.}iq + \sqrt{(-1)}.\text{ſin.}iq].$$

Le terme $\iint \frac{\partial p \partial q}{\text{ſin.}\varphi} \cdot \frac{\partial^{2n} y}{1.2.3 \ldots 2n.\partial x^{2n}} . 2^{2n}.\text{ſin.}p^{4n+1}.\text{ſin.}q^{2n-1}.\text{coſ.}q.(\text{coſ.}q.\text{ſin.}\varphi - \text{ſin.}q.\text{coſ.}\varphi)^{2n}$ deviendra donc $\frac{\mu.(\mu-1).(\mu-2)\ldots(\mu-2n+1)}{1.2.3 \ldots 2n} \iint \frac{\partial p \partial q}{\sqrt{(-1)}} . x^{2n-1}.(-1)^n \text{ſin.}p^{4n+1}.2^{2n}.\text{ſin.}q^{2n-1}.\text{coſ.}q.[\text{coſ.}2nq + \sqrt{(-1)}.\text{ſin.}2nq]$; or on a $2^{2n-2}.\text{ſin.}q^{2n-1} = \pm .[\text{ſin.}(2n-1)q - (2n-1)\,\text{ſin.}(2n-3)q + \&c.]$, le ſigne + ayant lieu ſi n eſt impair, & le ſigne − s'il eſt pair ; de-là on aura, en intégrant depuis $q = o$ juſqu'à $q = 180^d$, $\int 2^{2n-1}.\text{ſin.}q^{2n-1}.\partial q.\text{coſ.}q.\frac{(-1)^n}{\sqrt{(-1)}}.[\text{coſ.}2nq + \sqrt{(-1)}.\text{ſin.}2nq] = -\frac{1}{2}\pi$;

partant

$$\iint \frac{\partial p.\partial q}{\text{fin.}\,\varphi} \cdot \frac{2^{2n}.\partial^{2n}y}{1.2.3\ldots 2n.\partial x^{2n}} \cdot \text{fin.}\,p^{4n+1}\ \text{fin.}\ q^{2n-1}\ \text{cof.}\ q\ .$$

$$(\text{cof.}\,q\,.\,\text{fin.}\,\varphi - \text{fin.}\,q\,.\,\text{cof.}\,\varphi)^{2n} = -\pi\,.\frac{\mu.(\mu-1)\ldots(\mu-2n+1)}{1.2.3\ldots 2n}.$$

$x^{2n-1}\,.\int\partial p\,.\,\text{fin.}\,p^{4n+1}$; on trouvera de même . . . . .

$$\iint \frac{\partial q.\partial p}{\text{fin.}\,\varphi} \cdot \frac{2^{2n+1}.\partial^{2n+1}y}{1.2.3\ldots(2n+1).\partial x^{2n+1}} \cdot \text{fin.}\,p^{4n+3}\,.\,\text{fin.}\ q^{2n}\,.$$

$$\text{cof.}\,q(\text{cof.}\,q\,.\,\text{fin.}\,\varphi - \text{fin.}\,q\,.\,\text{cof.}\,\varphi)^{2n+1} = \frac{\pi.\mu.(\mu-1)\ldots(\mu-2n)}{1.2.3\ldots(2n+1)}.$$

$x^{2n}\,.\int\partial p\,.\,\text{fin.}\,p^{4n+3}$; l'équation (A) devient ainfi,

$$0 = \int\partial p.\text{fin.}\,p\left[\frac{\mu.(\mu-1)}{1.2}.\text{fin.}\,p^4 - \frac{\mu.(\mu-1).(\mu-2)}{1.2.3}\text{fin.}\,p^6 + \&c.\right]$$

ce qui donne

$$0 = \int\partial p\,.\,\text{fin.}\,p\,.(1-\text{fin.}\,p^2)^\mu - \int\partial p\,.\text{fin.}\,p\,.(1-\mu\,.\,\text{fin.}\,p^2)$$

$$= \int\partial p\,.\text{fin.}\,p\,.\text{cof.}\,p^{2\mu} - (1-\mu)\int.\partial p.\text{fin.}\,p - \mu\int\partial p\,.\text{fin.}\,p\,.\text{cof.}\,p^2;$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$0 = C - \frac{1}{2\mu+1}.(\text{cof.}\,p)^{2\mu+1} + (1-\mu).\text{cof.}\,p + \tfrac{1}{3}\mu.\text{cof.}\,p^3;(y)$$

il faut déterminer la conftante arbitraire C de manière que l'intégrale foit nulle lorfque $\text{cof.}\,p = 1$, & faire enfuite dans l'équation (y), $\text{cof.}\,p = -1$; or il peut arriver deux cas; 1.° la valeur de μ peut être telle que $(-1)^{2\mu+1} = (1)^{2\mu+1}$, dans ce cas l'équation (y) donne. . . . $0 = 2(1-\mu) + \frac{2}{3}\mu$, ou $\mu = \frac{3}{2}$, mais cette valeur doit être rejetée par la nature du Problème, puifque le terme qx^μ deviendroit imaginaire lorfque x feroit négatif; 2.° la valeur de μ peut être telle que $(-1)^{2\mu+1} = -(1)^{2\mu+1}$; dans ce cas l'équation (y) donne, $\frac{2}{2\mu+1} - 2(1-\mu) - \frac{2}{3}\mu = 0$; d'où l'on tire, $\mu\mu - \mu = 0$; partant, $\mu = 0$ & $\mu = 1$; d'où il fuit que l'expreffion de y ne peut avoir que cette

forme $y = a + bx + cx^r + fx^s +$ &c. $r, s,$ &c. étant moindres que l'unité; or, en substituant cette valeur dans l'équation (Z), il est visible que l'équation..... $y = cx^r + fx^s +$ &c. y satisfera séparément; d'où il suit par l'analyse précédente, que r étant supposé le plus grand des exposans $r, s,$ &c. ne peut être que 0 ou 1; donc, toutes les fois que la valeur de y peut être exprimée par un nombre fini de termes, elle ne peut avoir que cette forme $y = a + bx$; maintenant il est aisé de voir que dans ce cas, la figure du corps doit être sphérique; car on a *(figure 5)*, $y = 0$, lorsque $x = 1$ & lorsque $x = -1$; d'où l'on tire, $a + b = 0$ & $a - b = 0$, partant $y = 0$. Je dois observer ici que M. d'Alembert a déjà fait une remarque semblable pour le cas où les exposans de x sont des nombres entiers & positifs, *(voyez le tome V des Opuscules* de ce grand Géomètre).

Il seroit utile d'étendre ces recherches au cas où les couches de la masse fluide sont inégalement denses; c'est ce que je me propose de faire dans un autre Mémoire.

X I.

Sur les Fonctions.

M. de la Grange a donné dans le volume de l'Académie de Berlin, pour l'année 1772, un très-beau Mémoire sur l'analogie qui règne entre les puissances positives & les différences, aussi-bien qu'entre les puissances négatives & les intégrales; (voyez dans le volume cité, un Mémoire qui a pour titre *(sur une nouvelle espèce de calcul relatif à l'intégration & à la différentiation des quantités variables)*; en suivant cette analogie, il est parvenu à plusieurs théorèmes fort intéressans sur les fonctions; mais comme cette voie est indirecte, & que d'ailleurs ce grand Géomètre semble reparder comme difficile la démonstration directe de ces théorèmes; je vais ici les démontrer par une méthode assez simple, & qui

de plus a l'avantage de faire voir pourquoi l'analogie des puissances & des sommes ou des différences a lieu.

Pour simplifier le calcul, je ne considérerai qu'une seule variable; il est facile d'étendre les recherches suivantes à tant de variables que l'on voudra; soit donc u une fonction quelconque de x, on peut chercher l'intégrale ou la différence finie $n.^{ième}$ de u, en fonction des intégrales & des différences infiniment petites de cette quantité; on peut chercher l'intégrale ou la différence infiniment petite $n.^{ième}$ de u en fonction de ses intégrales & de ses différences finies; or voici comme M. de la Grange résout ces deux problèmes.

En désignant par les caractéristiques Δ & Σ les différences & les intégrales finies, & supposant x croître de α dans u, cet illustre Auteur trouve d'une manière directe & fort élégante, l'équation $\Delta . u = e^{\frac{\partial u}{\partial x} . \alpha} - 1$; (1), en observant dans le développement du second membre d'appliquer les exposans à la caractéristique ∂; c'est-à-dire au lieu de $(\frac{\partial u}{\partial x})^2$, décrire $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, & ainsi de suite; e est le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. De l'équation (1) M. de la Grange conclut en vertu de l'analogie entre les puissances positives & les différences, $\Delta^n . u = [e^{\frac{\partial u}{\partial x} \alpha} - 1]^n$; (2), & supposant n négatif, & changeant $\Delta^{-n} . u$, en $\Sigma^n . u$, il conclut en vertu de l'analogie entre les puissances négatives & les intégrales, $\Sigma^n . u = \frac{1}{(e^{\frac{\partial u}{\partial x} \alpha} - 1)^n}$; (3), en observant toujours d'appliquer les exposans à la caractéristique ∂, & de changer les différences négatives en intégrales; c'est-à-dire, au lieu de $\partial^{-1} . u . \partial x$, d'écrire $\int u \partial x$, & ainsi du reste.

Au moyen des équations (2) & (3), on aura donc la différence finie $n.^{ième}$, & l'intégrale finie $n.^{ième}$ de u, en fonction de ses intégrales & de ses différences infiniment petites.

Préfentement l'équation (1) donne $e^{\frac{\partial u}{\partial x}\alpha} = 1 + \Delta . u$; donc, en prenant les logarithmes, $\frac{\partial u}{\partial x}\,\alpha = l.(1 + \Delta . u)$; d'où, en vertu de l'analogie des puiffances pofitives & des différences, on aura $\frac{\partial^n . u}{\partial x^n} . \alpha^n = [l.(1 + \Delta u)]^n$; (4), en obfervant dans le développement du fecond membre de cette équation, d'appliquer à Δ les expofans des puiffances de u. Si l'on fait n négatif dans l'équation (4), & que l'on change $\partial^{-n} . u . \partial x^n$, en $\int^n . u \partial x^n$, on aura....... $\int^n . u \partial x^n = \frac{1}{[l(1 + \Delta u)]^n}$; (5), en obfervant dans le développement du fecond membre de cette équation d'appliquer les expofans des puiffances de $\Delta . u$ à la caractériftique Δ, & de changer en intégrales finies, les différences finies négatives.

X I I.

Voici maintenant une méthode directe pour trouver ces théorèmes.

Je repréfente par u' la quantité u, lorfqu'on y fuppofe x devenir $x + \alpha$; foit $u' = u + s$, on aura, en différentiant par rapport à α, $\frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial \alpha}$; donc $s = \int \partial \alpha . \frac{\partial u'}{\partial x}$; & $u' = u + \int \partial \alpha . \frac{\partial u'}{\partial x}$; on aura pareillement, $\frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \int \partial \alpha . \frac{\partial \partial u'}{\partial x^2}$; & ainfi de fuite; d'où l'on tire,

$$u' = u + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + h . \alpha^2 . \frac{\partial \partial u}{\partial x^2} + h' . \alpha^3 . \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \&c.$$

$$\& \ \Delta . u = \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + h . \alpha^2 . \frac{\partial \partial u}{\partial x^2} + h' . \alpha^3 . \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \&c. \ (\sigma);$$

h, h', &c. étant des coëfficiens conftans & indépendans de α, on

on aura pareillement $\Delta u' - \Delta u = \Delta^2 . u = \alpha . [\frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}]$ $+ h . \alpha^2 . [\frac{\partial\partial u'}{\partial x^2} - \frac{\partial\partial u}{\partial x^2}]$ + &c.; d'où je conclus, $\Delta^2 . u = \alpha^2 . \frac{\partial\partial u}{\partial x^2} + p . \alpha^3 . \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ + &c. en ſuivant ce procédé, on aura généralement $\Delta^n . u = \alpha^n . \frac{\partial^n . u}{\partial x^n}$ $+ q . \alpha^{n+1} . \frac{\partial^{n+1} . u}{\partial x^{n+1}} + q' . \alpha^{n+2} . \frac{\partial^{n+2} . u}{\partial x^{n+2}}$ + &c. *(a)*; l'équation *(σ)*, donne $u = \alpha . \Sigma . \frac{\partial u}{\partial x} + h . \alpha^2 . \Sigma . \frac{\partial\partial u}{\partial x^2}$ + &c. ſoit $\frac{\partial u}{\partial x} = z$, on aura $\Sigma . z = \frac{1}{\alpha} \int z \partial x - h\alpha . \Sigma . \frac{\partial z}{\partial x}$ — &c. on aura pareillement $\Sigma . \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\alpha} z - h\alpha . \Sigma . \frac{\partial\partial z}{\partial x^2}$ — &c. & ainſi de ſuite; d'où je tire $\Sigma . z = \frac{1}{\alpha} . \int z \partial x - m z$ $- \alpha m' . \frac{\partial z}{\partial x}$ — &c. on aura pareillement $\Sigma^2 . z = \frac{1}{\alpha} \Sigma .$ $\int z \partial x - m \Sigma z - \alpha m' . \Sigma . \frac{\partial z}{\partial x}$ — &c. or, $\Sigma . \int z \partial x$ $= \frac{1}{\alpha} \int^2 . z \partial x^2 - m \int z \partial x$ — &c. d'où l'on voit que $\Sigma^2 . z$, a une expreſſion de cette forme, $\Sigma^2 . z = \frac{1}{\alpha^2} .$ $\int^2 . z \partial x^2 + \frac{K}{\alpha} . \int z \partial x + K' z + K'' . \alpha . \frac{\partial z}{\partial x}$ + &c. en ſuivant ce procédé, on conclura généralement,

$$\Sigma^n . u = \frac{1}{\alpha^n} . \int^n . u \partial x^n + \frac{r}{\alpha^{n-1}} . \int^{n-1} . u \partial x^{n-1}$$
$$+ \frac{r'}{\alpha^{n-2}} . \int^{n-2} . u \partial x^{n-2} + \&c. \; (b);$$

r, r', &c. étant des coëfficiens conſtans & indépendans de α. Je ſuppoſe dans les équations *(a)* & *(b)*, $u = e^x$, ce qui donne,

$$u = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial\partial u}{\partial x^2} = \&c. = \int u \partial x = \int^2 . u \partial x^2 = \&c.$$

& $\Delta . u = e^x . (e^\alpha - 1)$; $\Delta^2 . u = e^x . (e^\alpha - 1)^2$, & généralement $\Delta^n . u = e^x . (e^\alpha - 1)^n$; enſuite $\Sigma . u = \frac{e^x}{e^\alpha - 1}$, $\Sigma^2 . u = \frac{e^x}{(e^\alpha - 1)^2}$; & généralement $\Sigma^n . u = \frac{e^x}{(e^\alpha - 1)^n}$; cela poſé, les équations *(a)* & *(b)* donneront;

la première, $(e^\alpha - 1)^n = \alpha^n + q . \alpha^{n+1} + \&c.$

la ſeconde, $\frac{1}{(e^\alpha - 1)^n} = \frac{1}{\alpha^n} + \frac{r}{\alpha^{n-1}} + \&c.$

donc on aura,

$$\Delta^n . u = (e^{\alpha . \frac{\partial u}{\partial x}} - 1)^n, \text{ \& } \Sigma^n . u = \frac{1}{(e^{\alpha . \frac{\partial u}{\partial x}} - 1)^n};$$

pourvu qu'en développant les ſeconds membres de ces équations, on applique les expoſans des puiſſances, à la caractériſtique ∂, & qu'on change les différences négatives en ſommes.

L'équation *(a)* donne

$$\Delta^n . u = \alpha^n . \frac{\partial^n . u}{\partial x^n} + \alpha^{n+1} . q . \frac{\partial^{n+1} . u}{\partial x^{n+1}} + \&c.$$

$$\Delta^{n+1} . u = \alpha^{n+1} . \frac{\partial^{n+1} . u}{\partial x^{n+1}} + \alpha^{n+2} . q . \frac{\partial^{n+2} . u}{\partial x^{n+2}} + \&c.$$

$$\Delta^{n+2} . u = \alpha^{n+2} . \frac{\partial^{n+2} . u}{\partial x^{n+2}} + \&c.$$

d'où l'on voit que $\alpha^n . \frac{\partial^n . u}{\partial x^n}$, ſera donné par une équation de cette forme,

$$\alpha^n . \frac{\partial^n u}{\partial x^n} = \Delta^n . u + s . \Delta^{n+1} . u + s' . \Delta^{n+2} . u + \&c. \; (c);$$

l'équation *(b)* donne pareillement,

$$\frac{1}{\alpha^n} . \int^n . u \partial x^n = \Sigma^n . u + f . \Sigma^{n-1} . u + f' . \Sigma^{n-2} . u + \&c. \; (\partial),$$

s, s', &c. f, f', &c. étant des coëfficiens conſtans & indépendans de α; ſoit donc $u = e^x$, & l'équation *(c)* donnera,

$$\alpha^n = e^\alpha - 1 + s.(e^\alpha - 1)^2 + s'.(e^\alpha - 1)^3 + \&c.$$

or, on a, $\alpha^n = [l(1 + e^\alpha - 1)]^n$; donc, si on développe le second membre de cette équation par rapport aux puissances de $e^\alpha - 1$, il donnera, $e^\alpha - 1 + s(e^\alpha - 1)^2 + \&c.$ partant l'équation (c) est la même que celle-ci,

$$a^n . \frac{\partial^n . u}{\partial x^n .} = [l.(1 + \Delta u)]^n;$$

pourvu que dans le développement du second membre, on applique les exposans à la caractéristique Δ.

L'équation (∂) donne, en y faisant $u = e^x$........

$$\frac{1}{\alpha^n} = \frac{1}{(e^\alpha - 1)^n} + \frac{f}{(e^\alpha - 1)^{n-1}} + \&c.$$

or, $\frac{1}{\alpha^n} = \frac{1}{[l(1 + e^\alpha - 1)]^n}$; d'où il est facile de conclure $\frac{1}{\alpha^n} . \int^n . u \partial x^n = \frac{1}{[l(1 + \Delta . u)]^n}$, pourvu que dans le second membre de cette équation on applique à la caractéristique Δ, les exposans des puissances, & qu'on change les différences négatives en intégrales.

XIII.

Reprenons l'équation $e^{\frac{\partial u}{\partial x} \alpha} - 1 = \Delta . u$, ou $e^{\frac{\partial u}{\partial x} . \alpha} = 1 + \Delta . u$; M. de la Grange en conclut en vertu de l'analogie des puissances & des différences, $e^{\frac{\partial u}{\partial x} \alpha'} = (1 + \Delta . u)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}$; or, $e^{\frac{\partial u}{\partial x} \alpha'}$ représente ici l'unité, plus la différence finie de u, lorsqu'on y suppose x devenir $x + \alpha'$; cette équation renferme la théorie générale des interpolations, & elle est facile à démontrer par ce qui précède; car puisqu'on a

$$\alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \Delta . u + f . \Delta^2 . u + \&c.$$

$$\alpha^2 . \frac{\partial\partial u}{\partial x^2} = \Delta^2 . u + {}'f . \Delta^3 . u + \&c.$$

&c.

on aura

$$\alpha' . \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\alpha'}{\alpha} . \Delta . u + f . \frac{\alpha'}{\alpha} . \Delta^2 . n + \&c.$$

$$\alpha'^2 . \frac{\partial\partial u}{\partial x^2} = \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} . \Delta^2 . u + \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} . {}'f . \Delta^3 . u + \&c.$$

&c.

Donc, nommant $'\Delta . u$ la différence finie de u, lorsqu'on y suppose x devenir $x + \alpha'$, on aura

$$1 + {}'\Delta . u = 1 + \alpha' . \frac{\partial u}{\partial x} + \&c.$$

$$= 1 + \frac{\alpha'}{\alpha} . \Delta . u + \Delta^2 . u . (g \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} + g' . \frac{\alpha'}{\alpha} + g'') + \&c.$$

g, g', &c. étant des coëfficiens constans & indépendans de α & de α'. Soit $u = e^x$, & l'on aura

$$e^{\alpha'} = 1 + \frac{\alpha'}{\alpha} . (e^\alpha - 1) + (e^\alpha - 1)^2 . (g \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} + g' . \frac{\alpha'}{\alpha} + g' .) + \&c.$$

Or, $e^{\alpha'} = (1 + e^\alpha - 1)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}$; développant donc le second membre de cette équation par rapport aux puissances de $e^\alpha - 1$, on aura

$$1 + \frac{\alpha'}{\alpha} . (e^\alpha - 1) + (e^\alpha - 1)^2 . [g \frac{\alpha'^2}{\alpha^2} + g' . \frac{\alpha'}{\alpha} + g'' + \&c.];$$

donc on aura $1 + {}'\Delta . u = e^{\frac{\partial u}{\partial x} \alpha'} = (1 + \Delta u)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}$; en observant toujours d'appliquer aux caractéristiques Δ & ∂ les exposans des puissances.



Fig. 1.

M
z z
A Y P y B

Fig. 2.

M
z
m n
z
A Y a y P b B

Fig. 3.

M
z
m n
z
A Y a y P b B

Fig. 4.

M
S
m'
T
m
A P Q B

Fig. 5.

A N Q
Z
L V
R
P M
T
C
S
B

Elth Haussard Sc.

EXTRAIT

D'une Lettre écrite à M. l'Abbé Nollet, le 20 Juillet 1765, par M. DE CAIRE, Chevalier de l'Ordre de Saint-Louis, & Capitaine au Corps du Génie, sur la cause du Froid en Canada.

VOUS avez dû voir, Monsieur, dans les Relations de la Nouvelle-France, qui ont été publiées jusqu'ici, l'étonnement des Voyageurs sur le froid excessif qu'il y fait, plutôt que des raisonnemens solides, pour en expliquer la cause. Je crois même qu'à l'exception des Pères Bressany & de Charlevoix, Jésuites, tout ce qu'en disent les autres Voyageurs ne mérite aucune considération. La plupart ne parlent de ce phénomène que pour exprimer seulement la sensation qu'ils en ont éprouvée, sans rien dire qui puisse en indiquer le principe; & les autres croyant en avoir trouvé la cause, raisonnent sans connoissance; mais cela ne m'étonne point: il est des gens qui ne savent rien voir & beaucoup qui voyent mal, ce qui est peut-être encore pis; de sorte que le nombre des bons Observateurs de la Nature est toujours fort petit, sur-tout dans nos Colonies, qui joignent à leur éloignement des Pays savans, le peu de ressources d'une Terre nouvellement peuplée d'hommes policés.

La partie habitée du Canada se trouvant placée sous les mêmes parallèles que la France, on ne peut être que fort étonné que la différence de température de deux pays dont les climats semblent devoir être les mêmes, soit cependant si considérable qu'elle peut passer pour un phénomène. En effet, c'en est un que de voir à Paris la liqueur du thermomètre à 15 degrés $\frac{1}{2}$ au-dessous de la congélation en 1709, tandis qu'en 1743 elle est descendue en Canada au 33e degré.

L'étonnement devient encore bien plus grand lorsqu'on

fait attention que la progreſſion du froid ne ſuit pas celle des degrés du thermomètre, & qu'un pays où cet inſtrument marqueroit un nombre de degrés double de celui qu'il indiqueroit dans un autre, ne ſeroit pas ſeulement du double plus froid, mais peut-être quinze à vingt fois davantage, & même au-delà, ſuivant que les deux nombres reſpectifs de degrés ſeroient l'un plus près & l'autre plus éloigné du terme de la glace: car on peut conſidérer la liqueur du thermomètre comme un reſſort, ou ſi l'on aime mieux, comme un bâton dont on voudroit rapprocher les deux extrémités. Il eſt bien aſſuré qu'après les avoir fait concourir l'une vers l'autre juſqu'à un certain point, il faudroit enſuite autant ou plus de force pour les approcher d'un pouce de plus qu'il n'en avoit fallu pour les 20, 30, 40, &c. premiers pouces dont on les avoit rapprochées en premier lieu.

Il en eſt de même de la liqueur du thermomètre. Le *froid* eſt la force qui la condenſe ou qui preſſe ſon reſſort; d'où l'on voit que ſi à meſure qu'elle baiſſe, le froid augmente, c'eſt dans une progreſſion bien différente de celle du nombre de degrés. On peut juger maintenant quelle énorme différence il y a eu entre l'hiver de 1709 à Paris, & celui de 1743 à Québec; ſur quoi il eſt bon d'obſerver encore que cette dernière ville eſt plus près du Soleil que la première de près de deux degrés, celle-ci étant par les 48ᵈ 50′ 11″ de latitude, & l'autre, par les 46ᵈ 55′.

Avant de vous donner mes conjectures, Monſieur, ſur la cauſe d'un phénomène auſſi ſingulier, je crois devoir auparavant examiner celles des Pères Breſſany & de Charlevoix, comme étant les deux ſeuls Voyageurs qui en aient parlé avec des connoiſſances, & que je montre en quoi il me paroît qu'ils ſe ſont trompés.

Le premier de ces deux Miſſionnaires qui a publié, en Italien, une Relation du Voyage qu'il a fait dans la Nouvelle France, attribue à trois cauſes principales la rigueur du froid de cet immenſe pays; 1.° à la quantité de neige qu'il y tombe; 2.° à la proximité de la mer du Nord, & 3.° à

l'élévation du terrein qu'il prétend prouver par la profondeur de la mer à mesure qu'on approche de la côte, & par la hauteur des chutes d'eau qui se trouvent en fort grand nombre dans les rivières. Mais certainement la profondeur de la mer ne prouve absolument rien, & les chutes d'eau ne prouvent pas plus, comme dit fort bien M. l'Abbé Prevost dans son Histoire générale des Voyages, que les cataractes du Nil, sur-tout si on fait attention que le fleuve Saint-Laurent, depuis la ville de Montreal où finissent les rapides jusqu'à la mer qui en est à cent quatre-vingts lieues, n'a pas plus de rapidité que la plupart de nos rivières d'Europe, & c'est de quoi je me suis assuré. On peut d'ailleurs en juger par l'étendue des marées qui, si le pays étoit assez élevé pour produire par cette seule raison de si grands froids, ne seroient sûrement pas sensibles dans le lac Saint-Pierre, qui est à cent cinquante-quatre lieues de la mer. J'alléguerai encore contre cette opinion du Père Bressany, que le climat bien loin de devenir de plus en plus rigoureux à mesure qu'on remonte le fleuve, comme cela devroit être dans son hypothèse, devient au contraire toujours plus tempéré.

A l'égard de la seconde cause qu'adopte le Père de Charlevoix, & à laquelle le Père Bressany attribue en partie le froid du Canada, non-seulement je la trouve mal énoncée, mais aussi moins recevable qu'aucune autre; car certainement quand je jette les yeux sur une mappemonde, je ne vois pas que Québec soit plus près de la mer du Nord que Paris; mais au contraire, puisque l'Océan septentrional dont les mers de France & du Canada, comprises d'ailleurs sous les mêmes parallèles, font partie, suivant à peu-près le nord-est, se rapproche de Paris & s'éloigne de Québec. C'est apparemment à cause des glaces qui couvrent, pendant un certain temps de l'année, la mer qui borne le Canada à l'est, qu'il a cru pouvoir appeler en particulier, *Mer du Nord*, cette portion de l'Océan. Erreur géographique singulière si, comme il y a apparence, elle n'est fondée que sur cette raison. Mais comme dans le fond c'est moins au nom qu'aux glaces de cette

mer qu'il attribue la rigueur des hivers de la Nouvelle France; j'aurai à cet égard une objection à lui faire, qui sans doute est sans replique; c'est qu'il n'y a exactement point de glace sur les mers du Canada pendant l'hiver. C'est à quoi les deux Religieux n'ont pas fait attention, & c'est apparemment ce qui les a jetés dans l'erreur, & leur a fait commettre l'anachronisme, si j'ose m'exprimer ainsi, dont ils ont conclu leur assertion, en supposant dans un temps de l'année des glaces sur une mer où elles n'existent que dans un autre temps. Car on sait positivement que les glaces ne paroissent guère avant le mois de Mars, qu'elles augmentent jusqu'en Juin, & que diminuant ensuite peu-à-peu jusqu'à l'automne, elles disparoissent enfin tout-à-fait jusqu'au retour du printemps. Cela vient de ce que ce n'est point de l'eau de la mer qu'elles sont formées, & que produites par les ruisseaux & les sources qui coulent sur les bords des côtes, fort élevées sans doute, du nord de ce continent, leurs propres masses, aidées du dégel de la belle saison, les détachent de la terre & les précipitent dans l'Océan où les courans & les vents les faisant errer au loin, les anéantissent enfin par les chocs & les différens mouvemens qu'ils leur font éprouver. La chaleur du Soleil ne contribue pas peu aussi à réduire, dans leur premier état de liquidité, ces monstrueuses glaces qui font l'étonnement des Voyageurs, & dont ces mers sont couvertes dans les temps que nous venons d'indiquer.

Cette explication, qui est aussi vraisemblable qu'elle est simple & naturelle, fait trouver d'autant plus extraordinaire celle d'un Savant du premier ordre sur le même sujet. Le célèbre M. Halley pense que l'Amérique septentrionale a été autrefois très-près du pôle; qu'un changement arrivé, on ne sait pas quand, l'en a éloignée, & que les glaces dont nous venons de parler sont les restes de celles que la proximité du pôle avoit autrefois produites dans cette partie du Nouveau-Monde. Il regarde aussi le froid qu'on y éprouve comme un reste de celui qui s'y faisoit sentir avant qu'elle eût été déplacée.

On

On ne peut douter que notre Globe n'ait essuyé de grands changemens; mais n'est-ce pas abuser des notions que nous en avons que de nous en servir, comme M. Halley, pour expliquer les phénomènes de la Nature?

Une autre observation, qui est comme la conséquence du fait que je viens d'établir, & qui ne sert pas moins que lui à détruire le sentiment des deux Voyageurs Jésuites, c'est que les vents de Nord-est, qui soufflent pendant l'hiver, & qui viennent nécessairement de la mer du Nord, bien loin de refroidir l'air, occasionnent au contraire une diminution considérable de froid. Il arrive même que quand ils succèdent tout-à-coup au Nord-ouest, le thermomètre monte dans l'espace d'une matinée, quelquefois de 10 à 12 degrés. Cela seul prouveroit assez que la mer n'est pas couverte de glaces pendant l'hiver, si on n'en étoit pas assuré d'ailleurs.

Le Père Bressany, en attribuant, en premier lieu, ces étonnantes gelées à la neige & au séjour qu'elle fait pendant six à sept mois sur la terre, ne s'est pas aperçu qu'il ne faisoit que changer la question; car on pouvoit lui demander pourquoi il tombe cette quantité de neige dans un pays situé sous les mêmes parallèles que le Languedoc & la Provence, & pourquoi elle y séjourne si long-temps? Quand même on lui accorderoit que les vapeurs de ce prodigieux nombre de lacs & de rivières dont le Canada est rempli, sont suffisantes pour les fournir (ce qui cependant peut être contesté, comme je le montrerai plus bas), son hypothèse n'en seroit pas mieux étayée. On lui demanderoit encore quel est le véhicule qui réduit ces vapeurs en neige à des latitudes où l'on n'en voit ordinairement point ou rarement? D'ailleurs, en faisant même abstraction de toutes ces objections, il s'en faut de beaucoup qu'on puisse conclure le froid du Canada de la quantité de neige qu'il y tombe. Il est des cantons dans nos montagnes de Provence & du Dauphiné où elle est tout aussi abondante, & qui sont même entourés de montagnes qui en sont éternellement couvertes; cependant il s'en faut bien que le froid qu'il y fait puisse entrer en comparaison avec celui de la

Nouvelle-France. Je ne citerai que le Briançonnois; la neige y eſt au moins en auſſi grande quantité qu'à Québec, elle y ſéjourne preſque auſſi long-temps, & les ſommets de ſes montagnes n'en ſont jamais dégarnis; néanmoins, dans les hivers ordinaires, la liqueur du thermomètre ne deſcend qu'au 6.ᵉ ou 7.ᵉ degré au-deſſous du terme de la glace; en 1760, elle ne deſcendit qu'au 6.ᵉ degré ½.

D'ailleurs, ſi le ſéjour de la neige pouvoit être la cauſe de ce grand froid, ſeroit-ce au bout d'un mois & demi qu'elle couvre la terre, qu'elle feroit deſcendre la liqueur au 24ᵉ degré après celui de la congélation, tandis qu'à Briançon, après cinq à ſix mois de ſéjour, à peine la fait-elle deſcendre juſqu'au 7.ᵉ degré? En 1759, la neige ne commença à tomber dans la partie de Québec que du 25 au 30 Octobre, & le thermomètre, vers le milieu de Décembre, ſe trouva au 24.ᵉ degré au-deſſous de la glace.

Je crois qu'en voilà aſſez, Monſieur, pour prouver que les trois cauſes auxquelles le Père Breſſany attribue le froid du Canada ne réſolvent point la queſtion.

Le Père de Charlevoix en donne une quatrième, en avouant cependant qu'il ne la croit pas ſeule capable de produire un auſſi grand effet, mais qui doit, *ſelon lui*, y contribuer beaucoup. C'eſt d'un côté, cette étrange multitude de lacs & de rivières dont on ſait que la Nouvelle-France eſt remplie; de l'autre, ſes bois & ſes montagnes. Le Père Breſſany prétend qu'aucun de ces trois objets n'y ſauroit avoir part, & je penſe comme lui.

Quelqu'abondantes que puiſſent être les vapeurs qui s'élèvent des eaux, il eſt bien certain qu'elles ſeroient toujours inſuffiſantes pour produire ſeulement un degré de froid égal à celui de la glace, ſi quelqu'autre cauſe n'y coopéroit avec elle. Je n'examinerai point ſi Gaſſendi & quelques autres Philoſophes corpuſculaires ont raiſon de ſéparer la cauſe du froid de celle de la gelée, & de ſoutenir qu'il exiſte des parties frigorifiques ignées, ou ſi ce n'eſt pas gratuitement que M. Muſſchenbroëck, qui diſtingue auſſi ces deux cauſes,

regarde la gelée comme l'effet d'une matière étrangère qui penétrant dans les interstices des liquides en arrête les mouvemens & en attache, pour ainsi dire, les parties ensemble. L'opinion la plus généralement reçue aujourd'hui, qui est aussi la vôtre, Monsieur, & la plus admissible à mon sens, donne également pour cause de la gelée, ainsi que du froid, la simple privation de la matière du feu; mais comme cette privation ne sauroit être assez considérable à des latitudes comme celles du Canada, pour être la cause du froid rigoureux qu'on y éprouve; voyons si ce froid & ces gelées extraordinaires ne proviendroient pas du refroidissement de l'atmosphère, causé par le mélange des vapeurs avec quelque sel, tel que le nitre, le sel ammoniac ou quelqu'autre sel volatil ou alkalisé. Cette conjecture paroît plausible, puisqu'il est certain que ces sortes de mélanges peuvent opérer un froid excessif.

S'il est vrai que les eaux dormantes fournissent beaucoup de vapeurs, il n'est guère moins assuré que celles qui sont constamment en mouvement n'en fournissent que très-peu. Leur agitation perpétuelle émoussant la pointe des rayons solaires, empêche sans doute qu'il ne puisse s'en élever beaucoup; & c'est vraisemblablement par cette raison que les pluies sont fort rares en pleine mer. Or, les eaux des rivières & des lacs du Canada, toujours agitées comme celles de la mer, par les courans & les vents qui causent même sur ces mers douces des tempêtes, coulant d'ailleurs sur des fonds de sable, doivent, comme la mer, fournir très-peu de vapeurs; aussi le Canada est-il un des pays du monde où il pleut le moins & où l'on voit le moins de brouillards; ce qui seroit tout l'opposé, si en effet les vapeurs aqueuses y étoient aussi abondantes qu'on est porté à le croire en voyant la grande quantité d'eau que ce pays contient.

La sécheresse de son terrein contribue aussi infiniment à rendre les pluies si rares. Il y a peu de pays où la terre soit plus généralement mêlée de sable & de pierres & qui contienne moins d'humidité; c'est ce que les deux Religieux

Voyageurs ont très-bien remarqué, & ils en donnent même pour preuve la ſalubrité ſingulière de l'air qui rend le Canada le pays de l'Univers peut-être le plus ſain.

Les ſels ne ſe trouvant que dans les terres graſſes ou très-compactes, telles qu'on nous repréſente celles de la Sibérie & de l'Arménie, qui par cette raiſon en abondent *(voyez Tournefort, Voyage du Levant)*, la légèreté du terrein du Canada eſt une preuve certaine qu'il n'en contient point du tout; mais quand même ils y ſeroient abondans, dès que les corpuſcules qui s'en éleveroient ne pourroient ſe joindre à des molécules d'eau que la ſéchereſſe du ſol, comme je viens de l'obſerver, rend très-rares, ainſi que le peu de vapeurs des lacs & des rivières, le refroidiſſement de l'atmoſphère qui ſeroit proportionné au peu de parties aqueuſes qu'il contient, n'opéreroit jamais qu'un froid très-ordinaire, puiſque c'eſt de l'union de ces deux objets que doit, dans ce cas-ci, réſulter la gelée. *(Diſſertation ſur la Glace, par M. de Mairan)*.

La conjecture que j'avois formée comme la plus vraiſemblable ne peut donc point avoir lieu.

Si les bois paroiſſent devoir entrer en conſidération dans la queſtion dont il s'agit, ce n'eſt peut-être que par les vapeurs qu'ils empêchent d'ordinaire de s'élever; mais puiſque j'ai prouvé qu'il n'eſt guère de pays qui en fourniſſe auſſi peu que le Canada, & qu'il eſt certain que les véhicules pour les refroidir n'y ſont pas moins rares; je crois que cet article des conjectures du Père de Charlevoix, ſe trouve ſuffiſamment réfuté par l'expoſé ci-deſſus.

Je n'ai pas été peu étonné que ce Miſſionnaire ait avancé que le froid diminue dans la Nouvelle-France à meſure qu'on la défriche. Pour peu qu'il eût réfléchi ſur cet objet, il en auroit aperçu l'inconſéquence. La Nouvelle-France eſt une forêt immenſe, auſſi grande que l'Europe; les bords ſeuls du fleuve Saint-Laurent, dans l'étendue d'environ 150 lieues & ſur une largeur moyenne de 3 à 400 toiſes, ſont à peu-près les ſeules parties défrichées de ce vaſte pays; je demande

d'après cela, si un si petit objet peut apporter quelque différence dans le climat d'une forêt aussi grande, comme je viens de le dire, que l'Europe? L'autorité dont s'appuie le Père de Charlevoix, c'est l'assurance que lui en ont donné les habitans. Eh! comment peuvent-ils en juger? quel est leur terme de comparaison dans un pays où il s'en faut bien qu'il y ait eu une suite d'observations? Cependant ceci ne peut se transmettre que par des observations, comme tout phénomène qui a des degrés d'augmentations & de diminutions; & ce n'est pas sur le dire d'un vieillard qu'on peut sur de pareils objets établir un fait.

Mais quand même on accorderoit que le défrichement de cette petite portion des bois du Canada a apporté quelque changement dans son climat, ne fût-il, ce changement, que d'un demi-degré, quel étonnant résultat n'auroit-on point si on vouloit conclure, comme cela devroit être sur ce principe, le froid actuel du Canada par cette analogie: *La partie défrichée est à celle qui ne l'est pas, comme un demi-degré de froid que la partie défrichée opéroit, est au froid inconnu dont la partie en friche est capable.* Certainement l'existence de ce quatrième terme ne laisseroit la vie à aucun individu, & vous observerez, Monsieur, qu'il seroit bien plus absurde, ce quatrième terme, si je n'avois pas supposé, contre la vérité dans l'analogie, que le froid est dans la même proportion que les nombres respectifs des degrés.

Les montagnes que le Père de Charlevoix donne pour le troisième objet de la collection de ses opinions particulières sur la cause du froid du Canada, sont beaucoup plus éloignées de Québec que les Alpes & les Pyrénées ne le sont de Paris. D'ailleurs, quelles montagnes que les Apalaches en comparaison de celles-ci! elles seroient des côteaux auprès de ces masses énormes qui s'élèvent au-dessus des nues, & au pied desquelles se trouvent nos Provinces du midi de la France, sans en éprouver ce froid extrême que le Père de Charlevoix veut que les Apalaches soient capables d'opérer en Canada. Il ne fait pas même attention qu'elles sont dans

la partie méridionale de ce pays; mais il y a tant de choſes à dire pour réfuter cet article, que je ne crois pas devoir m'y arrêter plus long-temps.

Je penſe, Monſieur, qu'il eſt aſſez prouvé par tout ce que je viens d'expoſer, qu'il s'en faut de beaucoup que les deux Voyageurs Jéſuites aient trouvé la cauſe du froid de la Nouvelle-France. On peut dire qu'ils ont épuiſé les hypothèſes pour la découvrir, & quoiqu'elles ſoient preſque toujours auſſi nombreuſes qu'on le veut, quand on ne raiſonne que ſur les effets d'une cauſe inconnue, je ne chercherai point à les imiter. Newton donne pour premier principe, que ceux qui veulent étudier la Nature, ne doivent adopter pour rendre raiſon des effets naturels, que des cauſes réellement exiſtantes & qui peuvent ſervir à expliquer ces mêmes effets. Perſuadé que c'eſt-là véritablement la marche que l'eſprit humain doit ſuivre pour aller aux découvertes, j'ai fait en ſorte de ne point m'en écarter, en conſidérant le vent de nord-oueſt comme la ſeule & unique cauſe de tout le froid du Canada. Vous allez juger, Monſieur, ſi je me ſuis trompé.

On voit dans toutes les relations des voyages faits au Canada, ainſi que dans celles des deux Jéſuites, que les plus fortes gelées n'ont lieu que lorſque c'eſt le vent de Nord-oueſt qui règne. Un fait auſſi frappant n'a point échappé non plus aux gens du pays; mais ni eux, ni les Voyageurs n'ont cherché à examiner ſi ce vent ne ſeroit pas lui ſeul la vraie cauſe du froid exorbitant de ce continent. Cela vient ſans doute de ce que ni les uns ni les autres n'ont pu imaginer que cette cauſe pût ſe trouver ailleurs que dans le pays même où elle opère. Il étoit aſſurément bien juſte de penſer de la ſorte, tant qu'on n'avoit pas fait l'examen des objets qui, ſans aller au loin, pouvoient ſervir à expliquer ce phénomène. On auroit eu tort en effet de procéder autrement & de négliger ce que les qualités du ſol & ſa ſituation pouvoient faire mettre en conſidération pour en rendre raiſon. La terre du Canada pouvoit, par exemple, être fort compacte & fort humide, chargée de ſels volatils ou autres,

tels que le nitre & le ſel ammoniac naturel, comme il s'en trouve dans quelques endroits de l'Arménie : le pays pouvoit auſſi être fort élevé au-deſſus du niveau de la mer. Or, il eſt bien certain que le concours de quelques-uns de ces objets ſeroit très-capable de produire un degré de froid très-conſidérable, comme cela arrive en Sibérie & dans quelques cantons de l'Arménie, où ce concours a lieu; mais il s'en faut de beaucoup, après les faits que j'ai établis, qu'il ait lieu en Canada. C'eſt donc hors de ce pays qu'exiſte la cauſe de ce froid prodigieux qui s'y fait ſentir; j'ai avancé qu'elle réſidoit uniquement dans le vent de Nord-oueſt, il me reſte à le prouver.

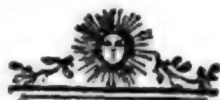
On ne peut diſconvenir que les vents n'influent ſingulièrement ſur les viciſſitudes des ſaiſons. Capables d'acquérir un degré très-conſidérable de froid ou de chaud, il eſt aſſez naturel de penſer, & même différentes obſervations conſtatent la choſe, qu'ils apportent dans un pays l'air froid ou chaud des régions qu'ils ont traverſées. C'eſt par les vents qui viennent de la Sibérie, qu'à Aſtracan, ville ſituée au 46^{d} 22′ de latitude, la liqueur du thermomètre deſcend juſqu'au 24.e degré $\frac{1}{2}$ au-deſſous de la congélation; & c'eſt auſſi par le même principe, quoique l'effet ſoit différent, que le vent qui vient d'Afrique apporte à Malte, pendant l'été, une chaleur inſupportable. On pourroit citer d'autres lieux de la terre, où les vents produiſent encore les mêmes effets.

Donnez-vous maintenant la peine, Monſieur, de jeter les yeux ſur la carte, & d'y ſuivre la route que tient le vent de Nord-oueſt pour arriver en Canada. Vous verrez que depuis les côtes où échouèrent les Ruſſes en 1743, & qui ſont à-peu-près par les 71 degrés $\frac{1}{2}$ de latitude Nord, ce vent parcourt, avant d'arriver à Québec, un eſpace d'environ 1200 lieues d'une terre qui tient de plus en plus du Nord, & qui n'eſt interceptée par aucune mer, circonſtance qu'il eſt eſſentiel de remarquer, comme je le ferai voir tout à-l'heure. Il ne l'eſt pas moins d'obſerver auſſi que tout cet eſpace ne contient aucune chaîne de grandes montagnes capable de

détourner ce vent; & vous voudrez-bien, Monſieur, faire attention que le froid par le 71.e degré ½ de latitude, eſt encore bien plus conſidérable que celui de Québec.

Tous ces faits étant inconteſtables, je crois pouvoir en conclure avec certitude, que le vent de Nord-oueſt refroidi à l'excès par les climats conſtamment glacés d'où il vient, eſt la ſeule & unique cauſe du froid exorbitant du Canada; ce que je ſuis d'autant plus en droit de penſer, que j'ai ſuffiſamment prouvé, à ce que j'imagine, que ni les eaux, ni les bois, non plus que les qualités & la diſpoſition du terrein de ce pays-là, ne pouvoient être les principes d'un phénomène auſſi extraordinaire,

J'ai dit qu'il étoit eſſentiel d'obſerver que le Nord-oueſt ne rencontroit aucune mer dans ſon trajet; c'eſt qu'il eſt certain que s'il en parcouroit une ſurface conſidérable, ſon degré de froid pourroit en être beaucoup affoibli, parce que la mer moins denſe que la terre, & conſtamment expoſée aux rayons du ſoleil, tandis que les premières neiges leur dérobent la ſurface de celle-ci, eſt par ces raiſons ſuſceptible d'un refroidiſſement moins conſidérable qu'elle; d'autant plus qu'elle ne contient point comme la terre, de ces ſortes de ſels, les plus propres à opérer ces froids ſinguliers que les procédés chimiques nous font connoître: d'où il réſulte que ſon atmoſphère, latitudes égales, doit être beaucoup plus tempéré que celui de la Terre, & diminuer conſéquemment le degré de froid d'un vent qui venant des environs du pôle, le traverſeroit. C'eſt ſans doute pour cette raiſon qu'on éprouve en effet beaucoup moins de froid l'hiver ſur la mer que ſur la terre; & c'eſt ſur-tout lorſqu'en venant de la pleine mer on approche des côtes qu'on s'en aperçoit. Il n'y a guère de Marin qui n'ait fait cette remarque.



MÉMOIRE

MÉMOIRE
SUR
LES NERFS DE LA DIXIÈME PAIRE.

Par M. SABATIER.

RIEN ne mérite plus de fixer l'attention des Anatomistes, que les nerfs, organes du mouvement & du sentiment, & desquels dépendent la plupart des fonctions de l'économie animale. Mais il est aussi difficile qu'important d'en connoître la marche & la distribution. La petitesse des fibrilles qui s'en séparent, leurs entrelassemens multipliés, leurs communications réciproques ou avec celles des nerfs voisins, leur situation tantôt profonde & tantôt superficielle, & sur-tout les variétés que la Nature présente dans la manière de naître & de se ramifier de quelques-uns, sont autant d'obstacles qui empêchent d'y parvenir. Il n'est donc pas étonnant que leur histoire n'ait pas été aussi approfondie que celle des autres parties qui entrent dans la composition du corps humain. Ces organes sont devenus depuis quelque temps l'objet de mes recherches particulières. Le Mémoire que l'on va lire est le premier fruit de ce nouveau travail. Il ne contient point de ces découvertes intéressantes qui assurent la réputation de ceux qui les ont faites. L'Anatomie a été cultivée par un si grand nombre d'habiles Gens, qu'il est difficile d'en faire de cette espèce; mais comme il renferme la description exacte d'un nerf peu connu, & sur l'origine duquel les sentimens des Auteurs sont partagés, j'ai pensé qu'il pourroit être utile.

Les nerfs de la dixième paire, ou autrement, les nerfs sous-occipitaux, n'ont commencé à être placés au nombre de ceux qui naissent de la moelle alongée, que depuis Willis qui a mis en doute s'ils devoient être comptés parmi les nerfs qui sortent du crâne, ou parmi ceux que la moelle

épinière produit. Vieussens, qui est venu ensuite, ayant embrassé la première opinion, elle a été adoptée par la plus grande partie des Modernes. Il y en a cependant eu plusieurs qui ont cru trouver à ces nerfs le caractère propre à ceux de la moelle de l'épine, & qui les ont regardés comme la première paire cervicale. Tels sont entr'autres Santorini, Heister, Garengeot, & ce qui est du plus grand poids, le célèbre M. Haller, qui les a décrits sous ce nom dans son grand Ouvrage de Physiologie. S'il étoit certain qu'ils naquissent hors du crâne & non pas au-dedans de cette cavité, & qu'ils fussent composés de deux faisceaux de fibres, l'un antérieur & l'autre postérieur, & non pas d'un seul qui s'élève de la partie antérieure de la moelle, la question seroit décidée en faveur de ces derniers; mais c'est ce qu'il est impossible de déterminer d'une manière positive, d'après les descriptions qui en ont été données.

Willis dit, en parlant des nerfs dont il s'agit, qu'ils commencent à naître vis-à-vis l'extrémité de l'occipital, par un grand nombre de filets qui s'élèvent des côtés de la moelle alongée, lorsqu'elle est prête à s'enfoncer dans le canal des vertèbres; Vieussens, qu'ils tirent leur origine de la partie inférieure des tubercules pyramidaux & olivaires, au-dessous des nerfs de la neuvième paire; Ridley, qu'ils viennent en partie de la moelle alongée & de celle de l'épine; & M.rs Winslow & Lieutaud, que leur naissance répond à l'extrémité de la moelle alongée, vis-à-vis la partie postérieure des condyles de l'occipital. Santorini au contraire assure que ces nerfs s'élèvent de la moelle de l'épine, entièrement hors du crâne, en quoi il a été suivi par M. Morgagni, lequel fait observer que s'ils paroissent sortir du dedans de cette cavité, ce n'est qu'une apparence qui dépend de ce que la première vertèbre du col étant assez fermement attachée à l'occipital, & ces deux os étant également recouverts de la dure-mère, il est assez difficile de distinguer les limites de l'un & de l'autre.

Le nombre de faisceaux qui forment les nerfs de la dixième paire n'est pas mieux connu. Selon Ridley, ce qui les fait

essentiellement différer des nerfs qui viennent de la moelle épinière, c'est qu'ils n'en ont qu'un seul, dont les fibres sortent de la partie antérieure de cette moelle. M. Morgagni pensoit déjà de même dès le temps où il écrivoit ses *Adversaria Anatomica;* mais comme dans une dissection ultérieure il avoit vu trois fibres extrêmement minces répondre de chaque côté à la partie postérieure de ces nerfs, & aller se joindre à l'accessoire de Willis, il les a cherchées sur sept autres sujets. Deux fois il a été obligé de suspendre son jugement. Quatre fois il s'est assuré que les fibres en question n'avoient point lieu. Enfin il a trouvé une fois, du côté droit seulement, deux fibrilles nerveuses, qui après avoir embrassé le nerf accessoire de Willis sans avoir aucune communication avec lui, se portoient vers le lieu où celui de la dixième paire, formé par des filets qui naissoient de la partie antérieure de la moelle de l'épine, perçoit la dure-mère pour sortir du canal des vertèbres; de sorte que s'il eût toujours rencontré ce qu'il n'a vu que sur un sujet unique, & du côté droit seulement, il n'auroit pas douté que les nerfs de la dixième paire n'eussent deux racines comme les nerfs vertébraux. M. Winslow dit aussi que ces nerfs viennent de côté & d'autre de la partie antérieure de la moelle, par un plan simple de petits filets. Cependant si l'on en croit Santorini, Heister, & un Auteur Italien anonyme, sur lequel ce dernier s'appuie, ils ont pour le moins trois racines en arrière, lesquelles viennent s'y réunir; & M. Haller, après avoir douté qu'ils eussent une double origine, s'en est enfin assuré.

Une diversité de sentimens aussi marquée, demandoit de nouvelles observations, & j'y ai eu recours. J'ai vu que les nerfs de la dixième paire sortent de la moelle de l'épine, dans l'intervalle qui sépare l'occipital d'avec la première vertèbre du cou, & par conséquent hors du crâne, & quelquefois aussi vis-à-vis les parties latérales de la première vertèbre. Les filets qui leur donnent naissance, viennent pour le plus souvent de la partie antérieure de la moelle seulement, comme ceux de la moelle alongée. Cependant, il y a au moins un

tiers des sujets chez lesquels ils sont formés, à leur origine, de deux plans de fibres, l'un antérieur & l'autre postérieur: ce qui justifie les auteurs qui ont embrassé l'une ou l'autre opinion, d'après des observations bien faites, mais pas assez réitérées. Lorsque les nerfs de la dixième paire ne sont formés que d'un seul plan de fibres, celles qui les composent sont au nombre de huit à neuf, rassemblées en trois faisceaux pour l'ordinaire, & quelquefois en deux, assez écartés l'un de l'autre, & qui ne se réunissent qu'à sa sortie à travers le prolongement de la dure-mère qui tapisse le canal de l'épine. Lorsqu'ils en ont deux, l'antérieur est le plus considérable. Pour le postérieur, il n'est fait que d'un, & tantôt de deux filets, dont l'inférieur est assez gros. Les deux plans sont séparés l'un de l'autre par le ligament dentelé & par le nerf accessoire de Willis, qui, comme on sait, remonte le long de la partie supérieure de la moelle de l'épine, entre ce ligament & le plan postérieur des filets qui donnent naissance aux nerfs cervicaux. J'ai cependant trouvé quelques sujets, où le plan postérieur des nerfs de la dixième paire, étoit situé au-devant de l'accessoire de Willis, entre ce nerf & le ligament dentelé; ce plan est toujours situé un peu plus bas que l'antérieur. Les nerfs de la dixième paire, formés comme il vient d'être dit, s'écartent de la moelle de l'épine de dedans en dehors, & un peu en arrière, & se portent vers le lieu où l'artère vertébrale perce la dure-mère & s'introduit dans le crâne. Les deux plans de fibres, quand il y en a deux, s'unissent & se rencontrent pour passer au-dessous de cette artère, & par la même ouverture. Le tronc même de l'accessoire de Willis est presque toujours si adhérent à leur sortie, qu'on diroit qu'il s'en détache quelques filets qui vont s'y joindre. Cependant j'ai trouvé, que dans le plus grand nombre de sujets, il n'y étoit que collé sans continuité de substance, quoiqu'en plusieurs il me semblât y être vraiment continu. J'ai même remarqué en deux ou trois occasions, que ce nerf au lieu d'être uni avec ceux de la dixième paire, leur donnoit un filet assez considérable, qui descendoit s'y

joindre de dedans en dehors. La ſituation des derniers nerfs, eſt ordinairement tranſverſale depuis leur naiſſance juſqu'à leur ſortie du canal de l'épine. Quelquefois auſſi elle eſt un peu oblique de bas en haut, à contre-ſens de la première paire cervicale, & il eſt très-peu de ſujets chez leſquels les fibres inférieures de l'un & de l'autre plan deſcendent, pendant que les ſupérieures montent.

A peine les nerfs de la dixième paire ſont-ils ſortis du canal de l'épine, qu'ils ſe gliſſent au-deſſous de l'artère vertébrale, entre cette artère & l'échancrure ſupérieure de la première vertèbre du cou, circonſtance d'autant plus remarquable, que Willis & Ridley ont cru qu'ils paſſoient entre la première & la ſeconde vertèbre, & qu'Heiſter, auteur fort moderne, & qui n'ignoroit pas que Vieuſſens, Santorini & M. Morgagni avoient avancé le contraire, a dit auſſi qu'ils ſortoient entre ces vertèbres. Ils groſſiſſent un peu dans leur trajet, & forment une eſpèce de ganglion fort alongé, qui eſt courbé de bas en haut, & qui paroît comme bifurqué lorſqu'on l'examine par-dehors. Quand ces nerfs ſont parvenus vis-à-vis le bord poſtérieur de la première vertèbre, ils ſe partagent en deux branches d'égale groſſeur, dont une eſt antérieure & aſſez longue, & l'autre eſt poſtérieure & beaucoup plus courte.

La première ſe porte d'arrière en avant, & de dedans en dehors, le long du bord poſtérieur de l'artère vertébrale, juſqu'au lieu où cette artère ſort du canal pratiqué à travers les vertèbres du cou; elle monte enſuite de bas en haut, & va paſſer entre l'apophyſe tranſverſe de la première vertèbre, & celle du temporal qui eſt connue ſous le nom de *maſtoïde*, au dedans de l'artère en queſtion. Après cela, elle deſcend au-devant de la première vertèbre, & forme une eſpèce d'anſe nerveuſe, avec un des rameaux antérieurs de la première paire cervicale, qui remonte de bas en haut, & qui vient s'y terminer par deux filets aſſez peu écartés l'un de l'autre. L'anſe dont il vient d'être parlé embraſſe la partie antérieure de l'apophyſe tranſverſe de la première vertèbre, à ſa racine.

La branche antérieure de la dixième paire, après avoir formé cette communication, se partage pour l'ordinaire en trois rameaux qui se jettent dans le tronc de la huitième paire, dans celui de la neuvième & dans la partie supérieure du premier ganglion de l'intercostal; souvent elle n'a que deux rameaux à son extrémité, lesquels vont à la neuvième paire & à l'intercostal; souvent aussi celui qui doit s'unir à la huitième paire, se détache de cette branche avant qu'elle ait reçu les deux filets de la première paire cervicale, & se glissant obliquement d'arrière en avant & de bas en haut, derrière la veine jugulaire interne, il va se perdre dans le tronc même de la huitième paire, au passage de ce nerf à travers le trou déchiré postérieur.

La branche antérieure de la dixième paire donne quelques filets dans le trajet qu'elle parcourt. Le premier s'élève de sa partie supérieure, derrière le trou de l'apophyse transverse de la première vertèbre, & vis-à-vis le muscle droit latéral de la tête, auquel il se distribue. Il est peu considérable, & j'en ai quelquefois trouvé deux fort près l'un de l'autre, qui avoient la même destination. Celui qui vient ensuite est beaucoup plus petit: il se détache de sa partie inférieure & descend le long de la partie interne du canal *dans lequel* l'artère est renfermée. Ce filet, indiqué par Garengeot & ensuite par M.[rs] Winslow & Tarin, est rejeté par M. Haller qui dit ne l'avoir jamais pu rencontrer, non plus que deux de ses Disciples qui ont beaucoup travaillé sur les nerfs, & dont un, nommé M. Asche, a donné sur les nerfs qui sont l'objet de ce Mémoire, une Dissertation que je n'ai pu me procurer. Il est si mince qu'il m'a souvent échappé; mais je l'ai vu trop distinctement sur des sujets de tout âge, pour pouvoir le révoquer en doute. Il se partage en plusieurs filamens d'une finesse extrême qui vont se jeter sur les parois du canal qui le contient & sur l'artère qui y est logée avec lui, & parmi lesquels il y en a toujours un ou deux qui se terminent dans le tronc de la première paire cervicale, à son passage entre la première & la seconde vertèbre du cou. Il

sembleroit que M. Tarin auroit connu ces derniers filamens; mais la description qu'il en donne, & même celle qu'il fait de la dixième paire en général est si succincte & si peu exacte, qu'on ne voit pas clairement ce qu'il a voulu dire. Le filet dont il vient d'être parlé ne descend pas au-delà de la première vertèbre, & ne contribue en rien à la formation des nerfs cardiaques, comme on pourroit le présumer d'après un passage du Traité *de motu cordis & anevrismatibus* de Lancisy. Quoique le nerf dont cet illustre Anatomiste fait mention sous le nom de *vertébral* ait quelque rapport avec lui, on ne peut certainement pas les confondre. On ne voit même pas trop ce que c'est que ce nerf vertébral, qui naît au-dedans du crâne près les nerfs de la dixième paire desquels il reçoit différens filets, qui descend le long du canal où l'artère vertébrale est logée, & qui après avoir grossi dans ce canal par l'union de plusieurs filets que la moelle de l'épine lui fournit, sort de dessous la septième vertèbre du cou, & se termine en un ganglion duquel viennent plusieurs ramifications pour la veine-cave supérieure, le péricarde & la propre substance du cœur. Il naît un troisième filet de la branche antérieure de la dixième paire, lorsque cette branche est parvenue au-devant de l'apophyse transverse de la première vertèbre, & ce filet qui est grêle & assez alongé, monte obliquement en dedans pour le muscle petit droit antérieur de la tête. Le grand droit antérieur qui est situé plus intérieurement en reçoit un quatrième un peu plus gros & un peu plus long, qui s'y porte dans la même direction. Ces deux derniers paroissent souvent plutôt appartenir au rameau antérieur de la première paire cervicale, qui se jette dans la branche antérieure de la dixième paire, qu'à cette branche même; & quelquefois il y a une si grande confusion parmi les nerfs assemblés en cet endroit, qu'on auroit toute la peine du monde à déterminer duquel d'entr'eux les filets dont il s'agit tirent leur origine.

La seconde des branches ou la branche postérieure de la dixième paire se porte obliquement en arrière & en haut. Elle se partage après environ quatre lignes de chemin en sept

ou huit rameaux qui s'écartent les uns des autres en manière de rayons, & qui font, par leur épanouiſſement, une patte-d'oie aſſez ſemblable à celle de la branche ſupérieure de la portion dure de la ſeptième paire. Ces rameaux vont gagner les parties du voiſinage. Le premier monte vers le bord inférieur du muſcle petit oblique ou oblique ſupérieur. Il paſſe bientôt au-deſſous de ce muſcle, & ſe perd à la partie poſtérieure & inférieure de l'apophyſe maſtoïde. Il m'a ſemblé voir pluſieurs fois qu'il s'introduiſoit dans la propre ſubſtance de cette apophyſe, ſans doute pour pénétrer dans les cavités qu'elle renferme, & ſe diſtribuer au périoſte qui les tapiſſe; mais ſa fineſſe & ſon peu de conſiſtance m'ont empêché de le pourſuivre comme je l'aurois deſiré. Le ſecond rameau accompagne le premier juſqu'au muſcle petit oblique, auquel il donne un grand nombre de filamens. Je l'ai ſouvent trouvé double ou triple, de ſorte que ce muſcle recevoit une quantité prodigieuſe de nerfs, eu égard à ſon peu de groſſeur. Le troiſième & le quatrième ſe portent dans une direction preſque tranſverſale derrière la partie moyenne & ſupérieure du muſcle grand droit poſtérieur; le premier s'y termine entièrement par pluſieurs ramifications fort fines qui ſe répandent dans ce muſcle; le ſecond traverſe toute ſa largeur en arrière, & s'enfonce enſuite dans le muſcle petit droit ſitué beaucoup plus en dedans & plus profondément. Un cinquième rameau, qui eſt ſouvent double, & qui par ſa direction & ſa groſſeur paroît être la continuation de la branche dont il part, ſe jette dans la partie moyenne du muſcle grand complexus qui les recouvre tous. Il ne s'en ſépare aucun filament pour le ſplenius qui eſt ſitué derrière le grand complexus, & qui lui eſt aſſez adhérent. Le ſixième deſcend obliquement en arrière juſqu'au bord ſupérieur & à la partie moyenne du grand oblique ou oblique inférieur auquel il eſt entièrement deſtiné. Enfin le ſeptième & le huitième ont à peu-près la même direction, & deſcendent derrière le muſcle qui vient d'être nommé pour ſe terminer dans le tronc même de la première paire cervicale, lequel gliſſe le

long

long du bord inférieur de ce muſcle, & pour monter enſuite ſur la région de l'occiput où il ſe diſtribue par un grand nombre de ramifications. Ces deux derniers rameaux ſont ſouvent de groſſeur fort inégale. J'ai trouvé des ſujets en qui ils s'enfonçoient dans l'épaiſſeur du grand oblique & paroiſſoient s'y terminer; mais ils ne faiſoient que le traverſer, & après lui avoir donné quelques filamens fort minces, ils alloient à leur deſtination ordinaire. Ce ſont ſans doute ces deux derniers rameaux dont M. Haller veut parler lorſqu'il dit avoir vu, mais par un travail difficile, la branche poſtérieure des nerfs de la dixième paire, faire avec celle de la première paire cervicale, une arcade ſemblable à l'anſe nerveuſe qui répond à la partie antérieure de l'apophyſe tranſverſe de la première vertèbre, & dont il a été parlé précédemment. Il eſt vrai qu'il y a des ſujets chez qui ces rameaux ſont ſi fins qu'on ne les pourſuit qu'avec peine juſqu'au bord inférieur du muſcle petit oblique; mais il s'en rencontre d'autres où on les trouve avec aſſez de facilité. Cet illuſtre Auteur & ſes Diſciples cités plus haut ſont les ſeuls qui en aient fait mention; encore ne paroiſſent-ils connoître qu'un de ces rameaux pendant que je les ai conſtamment trouvés tous les deux.

M. Winſlow a avancé que la partie ſupérieure de l'arcade formée par la branche antérieure des nerfs de la dixième paire, ou le ganglion même de ces nerfs, jetoit en haut un rameau conſidérable, qui groſſit d'abord par l'union d'un rameau court de la première paire cervicale, & qui monte en arrière ſur la ſommité de l'occiput, ſous le nom de nerf occipital, où il ſe diſtribue par pluſieurs ramifications, juſque ſur le ſommet & ſur les parties latérales de la tête. J'ai ſouvent cherché ce rameau, tant parmi ceux qui appartiennent à cette branche antérieure, que parmi ceux qui appartiennent à la poſtérieure, ſans rien apercevoir qui y eût le moindre rapport. Les nerfs qui montent ſur l'occiput & qui ſont fort gros, m'ont toujours paru procéder de la première & de la ſeconde paire cervicale. Ils ſont au nombre de deux. Le premier formé par la première paire dont il eſt la principale branche, gliſſe

en arrière, entre les apophyses transverses des deux premières vertèbres du cou, au-dessous des muscles accessoires du long dorsal & du sacro-lombaire, de la portion supérieure de l'angulaire de l'omoplate, de la partie cervicale du splenius & des petit & grand complexus, & se porte entre ce dernier muscle & le bord inférieur du grand oblique de la tête, jusque près l'apophyse épineuse de la seconde vertèbre du cou. Là, il perce obliquement l'épaisseur du *biventer cervicis* & de la partie la plus supérieure du trapèse, pour monter sur la partie moyenne de l'occipital. C'est ce premier nerf avec lequel les rameaux inférieurs de la branche postérieure de la dixième paire vont communiquer, après avoir passé derrière le grand oblique, & quelquefois après avoir traversé l'épaisseur de ce muscle. Le second nerf est situé un peu plus bas & plus en dehors; il appartient à la seconde paire cervicale. Il passe entre les apophyses transverses de la seconde & de la troisième vertèbre du cou, & sous les muscles ci-dessus nommés, & perce enfin le complexus comme le précédent. Quelque attention que j'aie apportée à mes dissections, je n'ai vu qu'une seule fois la branche postérieure de la dixième paire communiquer par un rameau de grosseur médiocre avec le premier de ces nerfs, & s'unir avec lui pour former les nombreuses ramifications qui se perdent sur la partie postérieure, & jusque sur le sommet de la tête. Peut-être ce rameau a-t-il toujours lieu; mais si cela est, il faut qu'il soit d'une finesse bien prodigieuse, puisque je n'ai pu l'apercevoir sur plus de dix sujets où je l'ai cherché de suite, & que M. Haller n'a pas été plus heureux dans les recherches qu'il en a faites.

Les deux branches de la dixième paire sont situées fort profondément, & ne peuvent être bien vues que par le procédé que voici. Il faut commencer par mettre la postérieure à nu, en enlevant les muscles trapèse & splenius qui seront détachés de l'occipital & des apophyses épineuses des vertèbres du cou, à la manière ordinaire, ou, ce qui revient au même, de dedans en dehors. On lèvera ensuite le petit complexus & une partie du grand, dans un sens

contraire, c'eſt-à-dire de dehors en dedans, puis on ira chercher la branche dont il s'agit, dans la partie la plus profonde de l'angle que les muſcles petit & grand oblique de la tête forment à leur inſertion, à l'endroit de l'apophyſe tranſverſe de la première vertèbre. On ſe procurera plus de facilité, ſi on détruit la partie de ces muſcles qui eſt fixée à cette apophyſe, & l'on aura en même temps l'avantage de voir le tronc des nerfs de la dixième paire & leur branche antérieure qui gliſſe derrière & ſous l'artère vertébrale, comme il a été dit plus haut. Pour ſuivre cette ſeconde branche, il faudra ſéparer le petit droit latéral de la tête d'avec la même apophyſe tranſverſe, briſer & emporter cette apophyſe, couper en travers l'artère vertébrale à la ſortie du canal qui la renferme, & ſcier l'extrémité de l'apophyſe maſtoïde. Mais on ne pourra la conduire juſqu'au lieu où elle ſe termine dans le tronc de la huitième paire, dans celui de la neuvième, & dans le ganglion ſupérieur de l'intercoſtal, qu'autant que l'on aura mis à découvert tous ces nerfs par le retranchement de la branche de la mâchoire inférieure, du muſcle digaſtrique, de ceux qui prennent naiſſance à l'apophyſe ſtyloïde, & même de la partie ſupérieure de la carotide & de la veine jugulaire interne.

Ce que j'ai dit dans le cours de ce Mémoire, montre que les nerfs de la dixième paire ont plus de reſſemblance avec ceux de la moelle de l'épine, qu'avec les nerfs de la moelle alongée. En effet, ils naiſſent hors du crâne; ils ſont quelquefois formés à leur origine de deux faiſceaux nerveux; ils paſſent entre la première vertèbre du cou & l'occipital, & non pas à travers une des ouvertures pratiquées dans l'épaiſſeur du crâne; enfin ils ſe perdent en entier dans les petits muſcles antérieurs & poſtérieurs de la tête, ſi on en excepte les rameaux par leſquels ils communiquent avec la huitième paire, la neuvième, le grand nerf intercoſtal, & ſur-tout avec la première paire cervicale, & quelques autres très-fins, dont je n'ai pas fait une mention expreſſe, parce qu'ils n'ont rien de régulier, & que de la branche antérieure de ces

nerfs, d'où ils partent, ils vont se répandre dans les graisses du voisinage & sur les ligamens qui entourent de chaque côté l'articulation de l'occipital avec les apophyses articulaires supérieures de la première vertèbre du cou. Cependant comme il y a beaucoup de sujets chez qui ces nerfs n'ont à leur principe qu'un seul faisceau de fibres, & que le nom sous lequel on les désigne, est consacré par l'usage, on peut le leur conserver, pourvu qu'en les décrivant, on ait soin de rectifier par une exposition exacte de la manière la plus ordinaire dont ils prennent naissance, & par celle de leur distribution, les idées fausses que ce nom pourroit en donner.



VOYAGE SOUTERRAIN

OU

DESCRIPTION des Grottes de Lombrive & de Bedeilhac, dans le pays de Foix; du Minier des Indes près Arles en Rouſſillon; du Minier de Sournia en Languedoc, & de Saint-Dominique aux environs de Caſtres dans la même province; avec des Remarques ſur les Priapolites qu'on trouve au voiſinage de cette dernière Grotte.

Par M. MARCORELLE, de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Toulouſe, & Correſpondant de l'Académie.

TOUT le monde ſait que les grottes ſont des cavernes, des creux, des eſpaces vides qui ſe rencontrent dans le ſein de la terre, & principalement dans l'intérieur des montagnes. On attribue leur formation à celle même du globe que nous habitons, ou au changement qui y eſt ſurvenu dans le temps du Déluge, ou à divers bouleverſemens cauſés ſoit par des feux ſouterrains, ſoit par les eaux qui en pénétrant au travers des montagnes & des rochers, ont entraîné la terre & le ſable qui leur ont préſenté le moins de réſiſtance; elles peuvent avoir été produites encore par les variations continuelles qu'éprouvent les êtres matériels, par des révolutions auxquelles les loix de la Nature les aſſujettiſſent, & par des changemens particuliers qui quoique l'effet d'une cauſe inſenſible, deviennent cependant très-grands après une longue ſuite d'années; mais comme on ne ſauroit former là-deſſus que des conjectures, je ne m'y arrête pas davantage.

Les grottes du royaume & des pays étrangers entrent dans le dessein d'une Histoire naturelle, & en sont partie. Aussi l'Académie recueille-t-elle avec soin les descriptions qui lui en sont présentées *(a)*. Mais dans celles qu'on lit dans les Volumes qu'elle publie chaque année, il n'est fait aucune mention des grottes de Lombrive & de Bedeilhac dans le pays de Foix, du minier des Indes en Roussillon, du minier de Sournia en Languedoc, & de Saint-Dominique aux environs de Castres dans la même province. Elles mériteroient cependant, à raison de leur grandeur & des singularités qu'elles offrent, d'avoir autant de célébrité que bien d'autres. Je vais essayer de crayonner dans ce Mémoire l'esquisse des principaux traits des grands tableaux de ces grottes.

ARTICLE PREMIER.

Grottes de Lombrive, dans le pays de Foix.

La montagne de Lombrive, remplie de rochers, de pierre calcaire fort dure, est à demi-quart de lieue & au midi de Tarascon en Foix; elle renferme dans son sein plusieurs grottes qui communiquent entr'elles, & dont les unes sont au-dessus des autres. Pour y parvenir, il faut passer par un sentier escarpé & plein de cailloux. Comme ils sont mouvans, ils roulent sous les pieds & rendent pénible & difficile l'accès

(a) Il est parlé, dans les Mémoires de l'Académie, de plusieurs grottes; de celles de Besançon, *Anciens Mém. tome II, page 2; Histoire de 1712, pages 92 & suiv. Histoire de 1726, page 16; Savans étrangers, tome I.er, page 195:* de la Balme, *Histoire de 1700, page 3; Savans étrang. tome II, page 149:* de Saint-Pons, *Observ. d'Histoire naturelle;* Suite des *Mém. de 1740, page 217:* d'Arcy, de Canmont, de Villecrose, de Barjols, des Sévennes, de Vésoul, *année 1754, Mémoires, pages 132 & suiv.* de Roquefort, de Cornus, de Fodamente, de Saint-Baulize, de Coterouge, d'Alric, de Senones, *Savans étrang. tome III, page 591 & suiv.* de Soligno en Italie, *Histoire de 1771, page 14:* de Pouzols près de Naples, *année 1745; Hist. page 16, année 1750; Mémoires, page 68, année 1757; Mémoires, page 370:* de Stirie en Allemagne, *année 1754, Mémoires, page 158:* d'Antiparos dans l'Archipel, *année 1702, Mémoires, page 229:* du Labyrinthe de Candie, *ann. 1702, Mémoires, page 217, &c.*

de ces grottes. L'entrée est une ouverture irrégulière de 32 pieds de hauteur & de 96 de largeur.

A la distance de 200 pieds de l'entrée, on trouve à main droite une vaste salle de 800 pieds de longueur sur 80 pieds de largeur, qui a une sortie au levant; le sol est uni en certains endroits, raboteux & plein de concrétions dans d'autres. Les parois qui forment des portions de cercles sont tantôt du rocher nu, tantôt du rocher couvert d'incrustations. Le plafond est voûté en berceau, on y voit beaucoup de stalactites.

L'eau qui suinte à travers les rochers de la grotte, & qui en distille goutte à goutte, produit sans doute ces concrétions; en traversant les rochers, elle doit nécessairement détacher des particules de pierre qui sont la matière du spath, les entraîner avec elle & les déposer dans sa route: là ces particules s'amassent d'abord en pointe, & puis en manière de tuyaux par l'apposition à plusieurs reprises du sédiment pierreux à son extrémité. Ces tuyaux s'alongent & s'épaississent ensuite par les différentes couches que l'eau amène successivement l'une sur l'autre, & forment ainsi les stalactites, les incrustations qu'on voit au plafond & aux parois; souvent l'eau en passant lentement dans les scissures des rochers, n'y laisse pas toutes les molécules de la matière solide dont elle s'est chargée, elle en emporte des parties, & en tombant sur le sol immédiatement au-dessous de chaque stalactite elle s'y dépose; ces dépôts successifs s'épaississent après l'évaporation de l'eau, & produisent les concrétions, les éminences, les bosses qui sont au sol de la grotte. Ces éminences & ces bosses sont plus ou moins grosses, suivant que les stalactites auxquelles elles répondent sont plus ou moins grandes & qu'il se distribue sur leur surface convexe plus ou moins de suc pierreux. La manière dont se forment en général les stalactites est si bien développée & si clairement expliquée dans les savans Mémoires donnés par M.[rs] Daubenton & Guettard, dans le volume de l'Académie pour l'année 1754, qu'il seroit superflu & même téméraire de traiter après eux cette matière;

il suffit de dire que la Nature toujours semblable à elle-même, agit dans les mêmes cas par les mêmes principes, & qu'elle suit ceux exposés par ces deux célèbres Académiciens dans la formation des stalactites de la grotte de Lombrive.

Leur figure y varie à l'infini. Si on veut laisser agir l'imagination, ces stalactites représentent, comme celles des autres grottes, des tuyaux d'orgue, des culs-de-lampe, des tombeaux, des draperies, des piliers, des pyramides, des colonnes, des fleurs, des fruits, des arbrisseaux, &c. mais sans m'occuper de la bizarrerie de leurs formes, je me contente d'exposer les remarques auxquelles a donné lieu leur examen.

Parmi les stalactites de la première salle des grottes de Lombrive, il y en a de grises & d'autres blanches; la surface de quelques-unes est unie, polie, & celle de quelques autres chagrinée & remplie de petites éminences: ces variétés viennent sans doute des différentes matières dont sont composées les stalactites; elles tiennent plus ou moins de la nature & de la qualité des unes & des autres de ces matières, selon les différentes proportions & combinaisons dans lesquelles sont faits leurs mélanges dans l'eau qui est l'agent de leur formation.

Au sol de cette grotte, on trouve en certains endroits des élévations, des bosses, & en d'autres des enfoncemens, des creux. Ici il y a des congélations faites des différentes couches concentriques qui ressemblent, par leur forme & leur blancheur à des mamelles qui ont au milieu un bout pointu & un peu humide; là, & principalement au fond de la salle, on voit un nombre infini de colonnes blanches, de différente hauteur & de différente grosseur; il y en a qui ont 4, 5, 6, 7 & 8 pieds de hauteur, sur 1, 2, 3, 4 & 5 pieds de diamètre, & d'autres qui s'élèvent jusqu'à la voûte: ces colonnes se touchent par leurs bases, mais leurs sommets sont très-distincts; en en cassant, on s'aperçoit aisément que leur section est oblique & qu'elles sont faites par couches à différentes reprises par les chutes successives de l'eau.

Les parois de la grotte offrent des variétés sans nombre, on y voit des masses de la matière du spath dont sont faites les

les ſtalactites: ces maſſes de différente épaiſſeur ſont preſque toutes adhérentes au rocher, il en eſt pourtant qui en ſont un peu éloignées; les unes ſont plates, unies, liſſes; les autres ondées, pliſſées & luiſantes: l'inégalité & la courbure des parois ne contribuent pas peu à faire prendre aux ſtalactites qui s'y forment des figures différentes & irrégulièrement contournées; tantôt ce ſont des congélations, qui, à raiſon de leur pente, ſemblent des caſcades, tantôt elles imitent des grapes de raiſin, des pierres de différente groſſeur & de différente forme, tantôt elles repréſentent des rideaux, des broderies d'ornemens, d'architecture, produits par les dépreſſions que l'eau laiſſe en s'évaporant.

Les ſtalactites qui pendent de la voûte en manière de glaçons, paroiſſent des pyramides renverſées; pour l'ordinaire elles ſont creuſées par le milieu dans toute leur longueur & forment des tuyaux plus ou moins gros, plus ou moins longs; il y en a qui deſcendent de la voûte juſqu'à terre, & d'autres qui n'atteignent pas le ſol; ces ſtalactites ſont sèches à leur ſurface, & ce n'eſt qu'à la pointe d'où découle la goutte d'eau qu'on y trouve de l'humidité; il en eſt dont les tuyaux ſe ſont obſtrués & remplis, celles-là ſont ſolides: ces différences ſont vraiſemblablement occaſionnées par la différente poſition de l'orifice du canal des ſtalactites dans le rocher.

Dans la même ſalle où ſont les ſtalactites dont on vient de parler, on trouve à main droite de l'entrée & à la diſtance de 227 pieds, une ouverture arquée; cette ouverture conduit à une galerie voûtée de 840 pieds de longueur, la largeur & la hauteur ne ſont pas par-tout les mêmes; la largeur qui à l'entrée eſt de 30 pieds, n'eſt plus vers la fin que de 12 pieds; la hauteur eſt d'abord de 10 pieds, mais elle diminue peu à peu, parce que le terrein va en montant; elle devient ſi petite à l'extrémité de la galerie, que l'on a de la peine à s'y gliſſer: on eſt obligé de ramper ſur le ventre & de garder cette ſituation incommode durant l'eſpace de 40 pieds.

En ſortant de ce pénible défilé, on ſe trouve dans une

seconde salle dont la longueur est de 200 pieds, & la largeur de 80 pieds, la voûte en est fort élevée: cette salle n'offre rien de remarquable; on y voit à main droite une ouverture par où l'on entre dans une galerie de 50 pieds de longueur & qui va toujours en montant; on la parcourt avec moins de peine que la première.

Au bout de cette galerie se présente un vaste banc de rochers de 224 pieds de hauteur, qui semble barrer absolument tout passage: ces rochers sont revêtus d'une quantité innombrable de congélations de différentes formes & d'une couleur roussâtre; il est à présumer que ces congélations se sont étendues insensiblement dans cet endroit, & qu'en s'étendant elles se sont touchées les unes les autres, n'ont fait qu'une même masse & ont bouché par la suite des temps les issues & les passages qui étoient entre ces rochers.

Les salles & les galeries qu'on vient de décrire, peuvent être considérées comme le rez-de-chaussée du grand édifice que la Nature a construit dans la montagne de Lombrive; celles qui sont au-dessus composent l'appartement du premier étage, & le banc de rocher couvert de congélations est l'escalier qui y conduit.

On le monte en partie en gravissant ces rochers escarpés, & en partie, au moyen d'une échelle à main dont on se sert à plusieurs reprises; quelquefois on est obligé de l'établir sur des pointes aiguës de rocher, sans qu'on puisse l'assujettir solidement: en montant on aperçoit de tous côtés d'affreux précipices dont la vue excite la plus grande frayeur; l'obscurité de ces lieux qu'on ne visite qu'à la lueur des flambeaux, aide beaucoup à l'augmenter.

Après avoir franchi cette route scabreuse & périlleuse, on se trouve au sommet du rocher; là deux appartemens s'offrent à la vue; celui de la droite n'a qu'une seule pièce, c'est un salon voûté qui a 100 pieds de longueur & 33 pieds de largeur: le sol est d'un sable blanchâtre & durci; on y trouve des enfonçures & des rehaussemens: ces inégalités produisent

des figures qui imitent en quelque ſorte les compartimens d'un parterre.

L'appartement de la gauche eſt composé de pluſieurs pièces: d'abord, c'eſt un ſalon qui a 300 pieds de longueur & 27 pieds de largeur; il eſt voûté comme le précédent, & le fond eſt auſſi d'un ſable blanc qui s'eſt durci avec le temps; il y a de l'eau en certains endroits: la voûte & le ſol des autres ſalles étant à peu-près les mêmes, je me bornerai à rapporter les meſures qui ont été priſes.

De ce ſalon on paſſe, en ſe tournant à droite, dans une ſalle de 100 pieds de longueur & de 24 de largeur. Il y a plus de chauve-ſouris dans cette ſalle que dans les autres, elles ſe logent dans les creux des rochers qui forment la voûte.

Du même ſalon, en ſe tournant à gauche, on entre dans une autre ſalle de 650 pieds de longueur, & 30 de largeur, on y fait remarquer un écho aſſez fidèle.

Cette dernière ſalle conduit à une autre qui a 112 pieds de longueur & 33 pieds de largeur; le ſol n'eſt qu'un baſſin rempli d'une eau claire, fraîche & bonne à boire: comme il y a par-tout 8 pouces d'eau, on ne peut y marcher ſans ſe mouiller les pieds; on pourroit appeler cette grotte la ſalle des bains.

Celle qui ſuit eſt remarquable par ſa grandeur; elle a 1500 pieds de longueur, & 33 pieds de largeur; cette ſalle communique à deux autres, & forme avec elles la figure d'une croix.

Celle qui eſt à droite a 100 pieds de longueur & 33 pieds de largeur, elle eſt terminée par un abîme.

La ſalle qui eſt à gauche a 510 pieds de longueur & 33 pieds de largeur, c'eſt la moins élevée de toutes; ſa hauteur n'eſt que de 10 pieds; la voûte eſt formée par des pierres de marbre de différente couleur.

L'air eſt tempéré dans les grottes de la montagne de Lombrive; le mercure du thermomètre de M. de Reaumur, qui, expoſé à l'air extérieur, étoit au 21.e degré au-deſſus de la glace,

descendit au 9.e degré au-dessus du même terme dans les grottes inférieures, & au 12.e degré dans les grottes supérieures; la liqueur n'éprouva pas de variations fort sensibles pendant le temps de la visite de ces grottes.

ARTICLE DEUXIÈME.

Grottes de Bedeilhac, dans le pays de Foix.

NON loin des grottes de Lombrive sont celles de Bedeilhac; leur situation est près du village de ce nom & à demi-lieue de Tarascon en Foix: l'entrée de ces grottes qui est au nord, est une voûte surbaissée, de 109 pieds de largeur, & de 52 pieds de hauteur; la voûte s'élève à mesure qu'on avance dans la grotte, elle est revêtue de stalactites & de concrétions pierreuses qui offrent aux yeux une infinité de figures bizarres, singulières, & que l'imagination prévenue rend peut-être encore plus merveilleuses; le spectacle qu'elles présentent est pourtant frappant & propre à exciter la surprise.

A la distance de 65 pieds de l'entrée de cette grotte, on passe dans une salle qui a au midi une autre issue extérieure également voûtée, dont la hauteur est de 16 pieds, & la largeur de 27 pieds; cette salle a 600 pieds de longueur & 40 pieds de largeur: on n'y trouve aucun objet capable de fixer l'attention.

De cette salle, on entre dans une galerie longue de 560 pieds, qui conduit à une autre salle voûtée comme la précédente; on admire dans cette dernière salle une grande masse de pétrifications qui a la forme d'un tombeau; aussi la nomme-t-on *le tombeau de Rolland,* & on débite mille fables à ce sujet: ce tombeau est placé à la partie la plus large de la salle qui est de 230 pieds; la plus grande hauteur est de 36 pieds.

Dans la même salle & à 200 pieds du tombeau de Rolland, on remarque un gros pilier, & au côté gauche de ce pilier, un grand nombre de colonnes qu'on appelle *le jeu d'orgues;* c'est sans doute à cause de leur ressemblance avec les tuyaux

de cet inſtrument; lorſqu'on frappe ſur ces colonnes, elles rendent un ſon à peu-près ſemblable à celui que rendent des pierres creuſes ſur leſquelles on heurte, ce ſon n'eſt pas celui de l'orgue.

En continuant de marcher, & après avoir parcouru un autre eſpace de 400 pieds, on trouve dans la même ſalle qui n'a alors que 130 pieds de largeur, un gros pilier dont la circonférence eſt de 36 pieds; aſſez près de ce pilier, eſt une maſſe de pétrifications qui n'a aucune figure déterminée.

Cette ſalle dans laquelle on marche encore 400 pieds, eſt terminée par une belle colonnade compoſée d'une infinité de gros piliers qui ſemblent ſoutenir la voûte; ils ſont rangés dans la largeur de la ſalle, & y rempliſſent une étendue de 80 pieds; ils ſemblent être l'ouvrage de l'art plutôt que celui de la Nature; & on ſeroit tenté de croire qu'ils y ont été rapportés de deſſein pour orner ce lieu & lui ſervir de décoration.

Entre ces piliers, il y a pluſieurs paſſages qui conduiſent à une ſalle qui eſt derrière, & dont la largeur eſt de 200 pieds; on voit dans cette ſalle, la dernière de celles de la grotte, deux pyramides, l'une à droite qui eſt petite, & l'autre à gauche qui eſt la plus grande de toutes; elle a 82 pieds de circonférence.

Au fond de la grotte de Bedeilhac eſt un ruiſſeau d'une eau claire & limpide; après avoir coulé dans la grotte & y avoir parcouru une étendue de 60 pieds, il ſe perd ſous terre: de la même grotte on tire une terre glaiſe propre à ôter les taches d'huile; les gens du pays s'en ſervent pour les enlever & dégraiſſer leurs habits.

La température des grottes de Bedeilhac eſt à-peu-près la même que celle des grottes de Lombrive: le mercure du thermomètre, gradué ſelon la méthode de M. de Reaumur, y deſcendit au 8.e degré au-deſſus de la glace, tandis qu'étant expoſé à l'air libre, il étoit au 20.e degré au-deſſus du même terme.

Ce qui a été dit des ſtalactites, de leur différente longueur

& de leur différente grosseur, fait assez voir qu'elles s'accroissent journellement, & qu'elles s'étendent au point d'occuper de grands espaces dans les grottes qui auparavant étoient vides. Il y a lieu de croire qu'elles parviendroient à remplir entièrement ces espaces, si l'eau y charioit assez de matière pour opérer cet effet. Plusieurs Naturalistes, du nombre desquels est M. Daubenton, pensent qu'alors ces grottes seroient changées en carrières d'albâtre ; les piliers & les masses énormes des stalactites qui sont dans celles de Lombrive & de Bedeilhac, semblent favoriser cette opinion. Je fis détacher des morceaux d'une des masses de la grotte de Bedeilhac; je les emportai pour les faire polir & les comparer à une pièce d'albâtre.

C'étoit une table ovale de 3 pieds de longueur, de 22 pouces de largeur & 20 lignes d'épaisseur; elle étoit dans la maison d'un particulier de Toulouse, depuis environ deux siècles; elle avoit été donnée à un de ses aïeux par un Procureur général du Parlement de cette ville qui la tenoit d'un Ambassadeur de France à Rome: son épaisseur permettant qu'on la sciât par le milieu dans toute sa longueur, j'en fis faire deux tables qui sont actuellement dans mon cabinet.

Cet albâtre a les caractères qui peuvent le faire reconnoître pour tel; son poli est gras & moins vif que celui du marbre; il a une demi-transparence; ses veines sont dirigées en ondes, s'anastomosent entr'elles, & font un tout uni & compacte: elles sont contournées de différentes manières, présentent de belles taches en forme de plis concentriques, & offrent une couleur tantôt roussâtre, tantôt blanchâtre, tantôt grisâtre: la couleur roussâtre un peu obscure est pourtant la dominante. En sciant cet albâtre, on y a trouvé des vides entre les couches qu'on a bouché avec la même matière ; des marbriers Italiens lui donnent le nom d'*albastro fiorito.*

Après en avoir fait faire deux tables à la mode, il en est resté des morceaux sur lesquels j'ai fait quelques épreuves; le résultat a été qu'ils ont fait effervescence avec l'eau-forte, & qu'ils se sont réduits en chaux par la calcination; il en a

été de même des morceaux de la maſſe de la grotte de Bedeilhac; loin de ſe vitrifier, ils ſe ſont convertis en chaux & ont fait effervefcence avec l'eau-forte; leur effervefcence étoit pourtant moins grande & moins longue que celle des morceaux d'albâtre: après avoir poli ceux de la grotte de Bedeilhac, on reconnut que leurs parties étoient plus groſſières, moins tranſparentes que celles de l'albâtre auquel on les comparoit; on reconnut encore que leur poli, quoique gras & terne, avoit moins de fineſſe. Ces obſervations viennent à l'appui du ſentiment de M. Daubenton, ſur la formation de l'albâtre.

Dans la même chaîne des montagnes du pays de Foix où ſont les grottes de Lombrive & de Bedeilhac, & aſſez près de ces grottes eſt la mine de fer de Gudanes, dont M. de Reaumur a donné la deſcription dans les Mémoires de l'Académie pour l'année 1718. J'ai dans mon cabinet d'Hiſtoire naturelle, un morceau tiré de cette mine; il eſt incruſté par-dehors d'une eſpèce d'émail dur, poli, luiſant & noir comme du jais; l'intérieur ne diffère point pour la couleur, la forme & la matière des morceaux des autres mines; les rayons de la croûte émaillée ſont dirigés vers cette matière comme vers leur centre: on voit à la ſuperficie de cette couche d'émail, quelques inégalités relevées en boſſe, plus larges & plus épaiſſes en certains endroits qu'en d'autres: ces inégalités pareillement noires, ſont pourtant mêlées de quelques particules d'une matière rouſſâtre, telle qu'on en trouve dans l'intérieur; ce qui prouve bien que ce morceau de mine n'eſt pas l'ouvrage de l'art. Il me paroît ſemblable à celui qui fut envoyé à S. A. R. M.gr le Duc d'Orléans, Régent du Royaume, & à celui que M. le Monnier, Médecin, a trouvé à la mine de Lapinoze, dans la montagne de Batere en Rouſſillon, & qu'il a décrit dans ſes Obſervations d'Hiſtoire naturelle faites dans les Provinces méridionales de la France en 1739.

Suivant M. de Reaumur, l'émail de ces morceaux de mine a dû être formé de la même matière du criſtal, mais imprégnée

des particules de fer diſſoutes par l'eau. Ce célèbre Académicien infère de-là que la formation des mines de fer eſt la même que celle des ſtalactites, que lorſque l'eau charie une matière ferrugineuſe, elle produit des mines de fer, & que lorſqu'elle eſt chargée d'une matière pierreuſe ou criſtalline, elle produit des ſtalactites.

Les morceaux des mines de Gudanes & de la Pinoze, & ceux des ſtalactites des grottes de Lombrive & de Bedeilhac, ſemblent fortifier ces conjectures; les uns & les autres ont le même pays natal, ſont formés dans la même chaîne des montagnes des Pyrénées, dans les cavernes de ces montagnes où l'eau arrive en petite quantité, où elle tombe goutte à goutte, & où ſon cours dure long-temps; ils ſont faits par l'addition ſucceſſive des nouvelles parties & diſpoſés par couches d'une forme orbiculaire bien marquée; ils ont la même direction, le même arrangement, & n'ont d'autre diſtinction que celle de leurs noms, qu'ils tirent de la nature des matières dont ils ſont compoſés. Plus il y a d'analogie & d'uniformité dans ces opérations de la Nature, & plus on eſt fondé à penſer qu'elles ſont faites ſur les mêmes principes; auſſi en examinant attentivement & avec ſoin la manière dont les ſtalactites ſe forment dans *les grottes*, & en analyſant les eaux qui les produiſent, il y a lieu de préſumer qu'on parviendroit à connoître non-ſeulement leur formation, mais encore celle des criſtaux, des pierres, des marbres, des albâtres, des minéraux & des autres corps qui leur ſont analogues; mais cette connoiſſance ne ſauroit être que le fruit d'une foule d'obſervations faites pendant une longue ſuite d'années.

ARTICLE TROISIÈME.

Grotte du Minier des Indes, près Arles en Rouſſillon.

UNE des plus belles grottes qu'on puiſſe voir eſt celle du minier des Indes. Il y avoit autrefois, ſi l'on en croit la tradition

tradition du pays, une mine de fer d'où elle a pris ſon nom; elle eſt dans une des montagnes des Pyrénées qu'on nomme *Batère*, & qui eſt voiſine de celle du Canigou: cette montagne renferme dans ſon ſein la mine de fer de la Pinoze, dont il a été parlé, & eſt couverte de gras pâturages; on y mène paître de France & d'Eſpagne beaucoup de chèvres & de moutons qui ont un goût exquis; leur laine eſt fine, d'une bonne qualité, & vaut celle d'Eſpagne. La grotte creuſée dans cette montagne eſt dans la paroiſſe de Corſevi, & à la diſtance d'environ trois lieues d'Arles en Rouſſillon; on ne peut la viſiter qu'avec le ſecours des flambeaux de poing; l'entrée qui a 120 pieds de longueur & 2 pieds de largeur eſt aſſez difficile, & il eſt des endroits où on ne peut aller qu'en rampant ſur le ventre. Il n'y a pas de pétrifications dans cette entrée; elle peut être regardée comme le veſtibule des belles chambres qu'on rencontre enſuite.

On en trouve deux à droite & cinq à gauche qui ſe communiquent entr'elles; les unes ont 2 toiſes de longueur ſur une de largeur; la longueur de quelques autres eſt de 4 toiſes, & leur largeur de 3 toiſes; toutes n'ont guère plus de 2 ou 3 pieds de hauteur: leurs voûtes ne ſont point ſoutenues par des piliers ni par d'autres ſupports qui puiſſent en empêcher l'écroulement; auſſi s'en détache-t-il quelquefois des parties. Quand on eſt dans ces chambres, on a ſur ſa tête environ 540 pieds de terre, & on entend le murmure des eaux qui coulent par-deſſus entre deux terres, ſans qu'on puiſſe en voir le cours; l'eau pourtant ſuinte toujours du plafond & des parois de ces grottes.

Les ſtalactites dont elles ſont garnies offrent un magnifique ſpectacle; celles des grottes de Lombrive & de Bedeilhac ne ſauroient leur être comparées; la matière qui forme ces dernières, quoique ſouvent claire & brillante, n'eſt pas à beaucoup près auſſi pure; ici elles ſont blanches, luiſantes & brillent comme le criſtal: toute la ſurface de ces grottes, la voûte & les parois en ſont tapiſſées, il y en a même ſur le ſol, qui eſt en partie de rochers & en partie de terre

glaiſe. Dans certains endroits il eſt couvert d'une grande nappe de ſpath ſemblable à une glace unie, & épaiſſe d'un ou de deux pouces; s'il étoit aiſé d'en détacher des pièces, on pourroit en faire des deſſus de commodes qui auroient l'épaiſſeur du marbre. Dans d'autres endroits du ſol, cette nappe de ſpath eſt variée par une quantité innombrable de figures irrégulières; & de la ſurface, il ſort des arbriſſeaux pareils à ceux qui pendent de la voûte & des parois.

Ces ſtalactites ont ordinairement pour baſe une plaque de la même matière dont elles ſont compoſées: de cette plaque ſortent différens troncs; leur longueur & leur groſſeur varient infiniment; il y en a qui ont demi-pied, 1 pied, 1 pied $\frac{1}{2}$, 2 pieds de longueur, ſur 6, 8, 10 lignes & 1 pouce de diamètre: il en eſt de plus longs & de plus gros, & d'autres qui le ſont moins. De ces troncs partent un grand nombre de branches de différentes longueur & groſſeur qui s'entrelaſſent entr'elles; les vides qu'elles laiſſent ſont remplis d'une infinité de petits rameaux vermiculaires qui naiſſent les uns des autres en tout ſens; il y en a qui ſont auſſi déliés & auſſi fins qu'un cheveu. La ſurface des troncs, des branches & des rameaux eſt hériſſée de petites pointes luiſantes qui, à les conſidérer de près, ſemblent être des pyramides de la même matière; les ſtalactites, ſous ce regard, reſſemblent aſſez à ces eſpèces de plantes qu'on voit dans un temps de gelée ſur les vitres des fenêtres ou aux ficoïdés chargés de glaçons; la matière ſeule dont elles ſont compoſées eſt un objet agréable à la vue, mais la beauté des formes ſous leſquelles elle ſe fait apercevoir, l'emporte de beaucoup ſur elle; ſon éclat eſt encore relevé par la lumière des flambeaux, qui étant réfléchie en même-temps du haut, du bas & des côtés, & renvoyée d'angle en angle parmi cette innombrable quantité de pointes luiſantes, préſente diverſes couleurs, & produit un effet ſurprenant.

J'ai déjà obſervé que ces ſtalactites ſont d'une couleur blanche; néanmoins après les avoir tirées de la grotte & expoſées à l'air extérieur, la couleur de leur ſurface ſe terni

un peu, & de blanche devient d'un gris-cendré, mais elles conservent dans leur intérieur toute leur blancheur; si on en casse, on remarque à leurs cassures que leurs parties forment des petits rayons qui partent d'un centre & aboutissent, en se divergeant, à une circonférence, & que ces rayons très-fins & très-multipliés sont d'un blanc brillant qui a quelque chose de gras comme celui du spath; leur dureté est assez grande; pour les casser, il faut employer une certaine force; elles se calcinent & se dissolvent dans les acides minéraux. On trouve pourtant dans la grotte, des stalactites d'une couleur terne, tirant même un peu sur le noir. On pense dans le pays que la fumée de la poudre à canon employée pour arracher d'un dur rocher du voisinage la mine qui y étoit enchâssée, & la poussière qu'a dû produire une telle opération, leur ont donné cette couleur; il est pourtant plus naturel de l'attribuer aux différentes substances dont elles sont composées, & aux différentes façons dont ces substances ont été déposées & arrangées.

Les stalactites des grottes du minier des Indes, sont qualifiées dans le pays, de *flos ferri*. La persuasion où l'on est qu'il y avoit autrefois dans ce lieu des mines de fer, les fait regarder comme une végétation de ce minéral; mais outre qu'on ne trouve pas actuellement dans ces grottes des mines de cette espèce, M. Guettard a fait voir, de la manière la plus évidente, que le *flos ferri* n'étoit pas une végétation de fer. Les preuves qu'il en a données sont si fortes, qu'elles détruisent pour toujours cette erreur.

Cependant les stalactites du minier des Indes en Roussillon, paroissent avoir les mêmes caractères du *flos ferri* de Styrie en Allemagne; comme celui-ci elles sont formées d'un spath à filets fins & déliés, très-beau & fort blanc; & la définition du *flos ferri* donnée par M. Guettard, qui est la plus exacte de toutes, & celle qui le caractérise le plus, leur convient & peut fort bien leur être appliquée; ce n'est que depuis peu qu'on les a découvertes; on en a envoyé à Paris & dans différentes villes des Provinces un grand nombre de groupes

qu'on voit dans plufieurs Cabinets : il y en a dans celui de l'Hiftoire Naturelle du Roi ; j'en ai un, dans le mien, de 1 pied 2 pouces de longueur & de largeur ; il jette en tout fens une quantité innombrable de branches de différentes hauteur & groffeur ; il eft en petit la repréfentation d'une forêt épaiffe remplie de brouffailles ; fes ramifications font fi nombreufes, fi variées, & fe montrent fous tant de formes différentes, qu'il feroit prefque impoffible de le décrire. Le peu d'élévation des grottes où croiffent ces ftalactites, leur adhérence à la voûte, aux parois & au fol de ces grottes, & la fituation gênée qu'on eft obligé de garder lorfqu'on veut en détacher, empêchent d'en avoir de beaux groupes ; pour l'ordinaire, on les caffe, on les réduit en petits morceaux, & ce n'eft que très-difficilement qu'on peut s'en procurer de belles pièces ; il feroit à defirer qu'on élargît les ouvertures & les chemins de ces grottes.

L'air y eft affez tempéré. Le mercure du thermomètre de M. de Reaumur, qui à l'air extérieur fe tenoit au 29.e degré au-deffus de la glace, étoit dans les grottes au 14.e degré au-deffus du même terme.

A une certaine diftance de la grotte du Minier des Indes, eft la petite caverne d'En-pey : fa fituation eft *près de Lafon*, précipice affreux qui fépare la paroiffe de Corfevi de celle de Montferré : elle eft creufée dans un maffif de rocher fort dur, d'une couleur rouffâtre : l'eau naît au fond de cette caverne, & y eft ftagnante. On pourroit croire qu'elle forme & opère l'accroiffement des rochers, en dépofant fucceffivement la matière dont ils font compofés : les cafcades qu'ils repréfentent, & qui ne peuvent avoir été faites que par des dépôts fucceffifs, femblent favorifer cette idée ; d'autres dépôts pourtant, faits par des eaux étrangères à la caverne, peuvent avoir contribué auffi à la formation des rochers dans lefquels elle eft percée : on y trouve des ftalactites, des pétrifications remarquables par leur grandeur & leur figure : pour l'ordinaire ce font des pyramides triangulaires qui font réunies & forment des groupes de différentes hauteur & épaiffeur ;

quelquefois ces pyramides ſont ſéparées les unes des autres; lorſqu'elles ſont groupées dans un bloc, il en eſt dont on voit diſtinctement les trois faces, & qui ne tiennent que par leur baſe à la baſe commune; il en eſt d'autres dont on diſtingue ſeulement deux faces; la troiſième eſt appliquée à la face d'une autre pyramide qui la cache. Cependant toutes les faces ſont diſtinctes au ſommet de chaque pyramide; ſouvent il y a un grand nombre de petites pyramides adhérentes à chacune des faces extérieures des grandes pyramides, & qui leur ſont parfaitement ſemblables; leur figure eſt toujours la même, non-ſeulement dans les maſſes conſidérables, mais dans chaque partie de ces maſſes. Il eſt évident qu'il doit réſulter différentes figures de la façon dont ces pyramides ſont unies & rangées entr'elles: celles qui ſont iſolées & qui ne ſont pas attachées à une baſe commune, offrent par rapport à la groſſeur, plus de variétés que celles qui ſont réunies. Ces ſtalactites ſont calcaires & de la nature du ſpath; ce ſpath même eſt criſtalliſé dans preſque toutes: jeté au feu, il pétille, & il ſaute par éclats lorſqu'on le calcine. Cela vient de ce que ce ſpath étant compoſé de lames appliquées les unes ſur les autres, l'air qui eſt renfermé entr'elles, les écarte quand il eſt dilaté par les parties de feu qui s'introduiſent entre ces lames: mis en diſſolution dans les acides, il y excite une efferveſcence, tandis qu'il n'en produit aucune dans l'eau commune. La réunion de ces propriétés démontre clairement que les ſtalactites de la grotte d'En-pey ſont véritablement calcaires & de la nature du ſpath.

ARTICLE QUATRIÈME.

Grotte du Minier de Sournia en Languedoc.

DES montagnes des Pyrénées où ſont les grottes dont on vient de donner la deſcription, ſe détachent d'autres montagnes appelées *Corbières*, qui en ſe joignant à celles des Sévennes & du Dauphiné, forment une chaîne continuelle qui lie les Pyrénées avec les Alpes: c'eſt dans une de ces

montagnes des Corbières qu'eſt la grotte du Minier de Sournia au diocèſe d'Aleth; elle eſt à demi-lieue & au levant du village de ce nom; elle a pris ſans doute le ſien d'une mine de fer qu'on trouve au côté oppoſé à ſon entrée: vis-à-vis eſt un coteau fort rapide couvert de vignes & d'oliviers. La grotte creuſée dans un rocher eſcarpé & aſſez élevé, eſt compoſée de pluſieurs rues ou galeries. On ne ſauroit mieux la repréſenter que par une montagne miſe en pièces à force de mines; les rochers en croulant & en tombant les uns ſur les autres, ont dû dans leur rencontre mutuelle former les cavernes dont on va donner les dimenſions.

Au-devant de la grotte eſt un veſtibule ouvert par en haut & fermé de tous les côtés par de gros rochers; il a 26 pieds de longueur, 12 de largeur moyenne & 10 pieds de profondeur; on ne peut y deſcendre qu'avec une échelle: ce veſtibule s'élargit à meſure qu'on avance dans la grotte.

L'entrée a 13 pieds de largeur & 10 de hauteur; les rochers qui la forment ſont nus en quelques endroits, & couverts dans d'autres de ſtalactites qui imitent des grappes de raiſin; il y a à la voûte une ouverture en forme d'un œil-de-bœuf, qui a 4 pieds en tout ſens; elle ſert à éclairer l'intérieur de la grotte.

En entrant, la première choſe qui ſe préſente eſt une chambre voûtée, de figure preſque ovale; elle a 16 pieds de longueur & 10 pieds de largeur; le plafond qui eſt à 8 pieds d'élévation du ſol, eſt coupé au milieu par une plate-bande chargée d'incruſtations qui ſemblent des ornemens d'architecture: ce plafond, ainſi que les côtés, ſont couverts de congélations infiniment variées: ici, ce ſont des maſſes pendantes comme des groſſes grappes de raiſin ſuſpendues à la voûte: là, ces maſſes ſont feſtonnées & forment diverſes repréſentations de feuilles, de fleurs & de fruits; on croit y voir des plantes, des coquilles, des morilles, des choux-fleurs. Ces congélations prennent différentes figures, ſelon la différente courbure des parois où elles ſont attachées; il en eſt qui d'un de leurs bouts ſont contiguës à un rocher,

atteignent de l'autre à un autre rocher assez éloigné du premier, & forment par cet arrangement des espèces de cabinets. Au côté droit de la chambre, il y en a un remarquable, à raison des belles stalactites qu'il renferme. Pendant le temps sec il n'y coule point d'eau, mais elle y pénètre à travers les rochers lorsque les pluies ont humecté la terre; la matière qu'elle y charie alors, sert à l'accroissement des stalactites dont il est revêtu: ces stalactites sont d'un bleu clair, tandis que celles de la chambre sont jaunâtres; néanmoins il y en a quelques-unes de blanches, & quelques autres de brunes tirant même sur le noir. Cette diversité de couleurs des stalactites provient vraisemblablement de la différente qualité des matières dont elles sont composées, & des différentes combinaisons que ces matières reçoivent entr'elles.

Cette chambre a trois ouvertures, une de chaque côté & la troisième au fond en face de l'entrée; celle qui est à gauche fait une saillie de deux pieds dans la chambre & la rend par-là irrégulière; elle conduit dans une rue dont l'entrée qui est à 3 pieds d'élévation du sol, a 6 pieds de longueur & autant de largeur; cette rue, qui n'a que 10 pieds de long, se rétrécit insensiblement, & n'a tout au plus vers le fond que 3 pieds de large & autant de haut. Les congélations du toit sont très-variées; quelques-unes sont formées de parties ondées, disposées en belle symétrie les unes sur les autres; il y en a qui imitent des plantes telles que la *branche-ursine*: on voit aux côtés des cylindres courts, unis, arrondis par le bout & creux, d'où découlent quelques gouttes d'une eau claire & sans goût; ces diverses congélations sont fragiles, cassantes & de couleur de safran. Comme cette rue & celle dont on va parler sont obscures, & que le jour n'y pénètre pas, on ne peut les visiter qu'avec des flambeaux.

L'ouverture du fond n'est séparée de celle du côté gauche que par des rochers qui font un angle rentrant dans la chambre, dont la pointe a deux pieds de face: cette ouverture, qui a 6 pieds de haut sur 6 de large, conduit à une autre rue; dès qu'on y est entré, on trouve un rocher qui

rétrécit extrêmement le paſſage & le rend difficile ; mais à la diſtance de 12 pieds de l'entrée, la rue eſt large & il eſt aiſé de la parcourir dans toute ſa longueur qui eſt de 60 pieds; l'élévation de la voûte au-deſſus du ſol eſt tantôt de 10 pieds, tantôt de 6 & tantôt de 4 ; le plafond & les côtés de cette rue ſont tapiſſés de concrétions plus grandes & mieux finies que celles des autres rues. Quelle variété infinie de beautés n'offrent-elles pas ! Dans certains endroits elles ſont ſemblables à une grande glace étendue uniment par-deſſus; dans d'autres elles repréſentent une quantité innombrable de figures irrégulières, & ſur toute la ſurface, ce ſont des tartes au ſucre, des pralines, des choux-fleurs; ailleurs, où des rochers ſont aſſez ſaillans pour que les gouttes d'eau tombant de la voûte puiſſent y atteindre, il s'eſt formé ſur les parties avancées des concrétions qui, en s'étendant inſenſiblement, ſe ſont trouvées à une certaine diſtance du mur & ont figuré des *eſpèces* de niches, il y en a une aſſez régulière, dont l'étendue eſt d'environ une toiſe & demie; les ſtalactites qui la tapiſſent ſont dures, tandis que celles qu'on trouve dans la rue après avoir paſſé la niche, ſont tendres, friables & plus blanches que la neige; ces dernières ne repréſentent que des choux-fleurs. Au fond de la rue & au côté gauche, il y a *un trou d'un* pied en tout ſens d'où ſort un vent froid & aſſez fort pour éteindre une chandelle qu'on approche de l'ouverture ; ce trou, orné de concrétions, paroît être le commencement d'une autre rue.

La troiſième ouverture du côté droit de la chambre a 5 pieds de hauteur ſur autant de largeur. Par cette ouverture on entre dans une ſeconde chambre qui a 10 pieds de long ſur 7 de large & 14 de hauteur; ſon ſol eſt élevé de 3 pieds au-deſſus de celui de la première chambre : cette pièce qui n'a rien de bien remarquable, préſente à ſon fond une grande ouverture, au côté gauche de laquelle eſt une congélation de la forme d'un cul-de-lampe qui pend du plafond ; ce cul-de-lampe, qui a 4 pieds de circonférence, eſt orné dans toutes ſes faces d'une belle guirlande ; de la même ouverture

ouverture partent cinq rues diſpoſées preſque en quinconce. On va les parcourir les unes après les autres, ſans trop s'arrêter dans chacune.

La première de ces rues a 60 pieds de longueur; le marcher y eſt aſſez difficile, parce qu'elle n'eſt pas large & que la voûte n'a que 3 pieds d'élévation; on trouve d'eſpace en eſpace des enfoncemens aux parois, faits par de grandes maſſes de roche qui avancent dans la rue & qui même ont des rebords coupans: ces enfoncemens forment de petits cabinets fort agréables; l'humidité de cette rue, qui à peine produit des gouttes d'eau, fait croître ſur les rochers une mouſſe verte, elle donne auſſi aux ſtalactites une couleur verdâtre; ces ſtalactites marquetées de taches blanches ſont courtes & moins belles que celles des autres galeries.

L'ouverture de la ſeconde rue eſt de 3 pieds; cette rue entièrement taillée dans le roc, n'a que 20 pieds de long; ſon plafond eſt revêtu de congélations unies & tortueuſes qui imitent des couleuvres; les premières couches de ces congélations ſont blanches & farineuſes; l'eau qui coule ſur le ſol par une pente aſſez rapide, le rend extrêmement gliſſant.

La troiſième rue n'a également que 20 pieds de long ſur 3 pieds de large, & autant de haut: elle eſt humide & obſcure comme les autres; les ſtalactites qu'on y voit forment une belle rocaille.

La quatrième rue eſt fort étroite, & il eſt pénible de la parcourir; elle a 36 pieds de longueur; une quantité immenſe de petits cylindres pendent de la voûte, & il y a quelques concrétions ſur les parois; on en remarque une à l'entrée qui eſt en forme de guirlande & qui ſert de couronne à un champ d'armorial qui n'a pas reçu les armes.

La cinquième rue eſt de 20 pieds de long; ſon plafond eſt ſuperbement orné de beaucoup de ſtalactites; quelques-unes ſont feſtonnées, & quelques autres repréſentent des ſalamandres; en général elles ſont courtes, un peu dures & d'un beau blanc.

Indépendamment de ces rues, il y en a d'autres au Minier de Sournia; cette montagne eſt percée d'un grand nombre de conduits ſouterrains, qui par mille tours & détours pris en tout ſens, & ſans aucune régularité, parcourent ſon intérieur: ſi on ne les a pas tous ſuivis, c'eſt qu'ils ne ſont pas encore aſſez connus, & qu'il eût été dangereux de s'y égarer; avant de s'engager dans ce dédale, il faut avoir le fil d'Ariane.

ARTICLE CINQUIÈME.

Grotte de S.t Dominique, près Caſtres en Languedoc.

La grotte de S.t Dominique eſt à la diſtance d'environ une lieue de Caſtres, & au nord-eſt de cette ville; ſa ſituation eſt au lieu de la Roquette, ainſi nommé à cauſe de la multitude de rochers qui y ſont tumultueuſement diſperſés: parmi ces rochers énormes, dont les angles extérieurs ſont arrondis, on en voit qui ſont rompus & diſloqués, pour ainſi dire, par quartiers, les uns inclinés à l'horizon, & les autres poſés dans une ſituation parallèle ſelon la nature & la diſpoſition des terres qui leur ſervent d'appui: ces rochers ſont cultivés, on y met par-deſſus une couche de terre de l'épaiſſeur de cinq à ſix pouces; on y plante enſuite des ceps de vigne, & bientôt après ils produiſent d'excellent vin. Indépendamment de cet avantage que l'on retire de ces rochers, on s'en ſert encore pour faire des meules de moulin, des auges & des pierres à foyer; on les emploie auſſi à la bâtiſſe à laquelle ils ſont très-propres à cauſe de la dureté de leur grain.

C'eſt parmi ces rochers, & au pied de la montagne ſur laquelle ils ſont diſperſés, qu'eſt la grotte de S.t Dominique; elle a 28 pieds de longueur ſur 10 de largeur moyenne, & 15 pieds de hauteur: l'entrée eſt une ouverture irrégulière de 4 ou 5 pieds de hauteur ſur 3 ou 4 de largeur; elle eſt, comme l'on voit, fort baſſe, & pour y paſſer il faut ſe

courber; mais dans l'inſtant on peut ſe redreſſer & on s'y trouve au large; l'intérieur reſſemble à un ſalon aſſez vaſte; le deſſus qui eſt voûté en berceau & les parois ſont formés par des maſſes énormes de roche, dégarnies de terre, & qui ne ſe ſoutiennent entr'elles que par leur ſeul contact mutuel; on y voit clair par-tout à cauſe de deux ouvertures qui ſont à la voûte, & dont l'une eſt à droite & l'autre à gauche; le ſol qui eſt irrégulier & raboteux, eſt formé par des rochers entaſſés les uns ſur les autres, qui laiſſent entr'eux pluſieurs crevaſſes de 8 pieds de profondeur, entre leſquelles coule un ruiſſeau. On dit que cette grotte ſervoit d'aſile à S.t Dominique lors de la perſécution des Albigeois, & qu'il s'y réfugioit pour y inſtruire le peuple: on y fait voir encore une eſpèce de chaire, & ceux du pays y montrent comme un prodige un eſpèce de bénitier dans lequel il y a toujours de l'eau. Le merveilleux de ce dernier effet diſparoîtra lorſqu'on ſaura que l'eau découle de toutes parts dans cette grotte.

Au fond, il y a une ouverture ſemblable à-peu-près à celle qui eſt à l'entrée; par-là on pénètre dans des caves ſouterraines qui ont 7 à 800 toiſes de longueur ſur 10 à 12 toiſes de largeur, & environ 30 pieds de hauteur; comme elles ne reçoivent pas de jour, on ne peut les voir qu'avec le ſecours des flambeaux de poing; elles ſont formées par un tas de rochers qui ont preſque tous la figure d'un ſphéroïde alongé; ils ſont rangés de façon qu'ils forment une voûte qui paroît être l'effet de l'Art plutôt que celui de la Nature: ces rochers énormes, dont quelques-uns ont juſqu'à 2 toiſes de diamètre, ne ſont unis par aucun ciment; ils ſont au contraire dégarnis de tous les côtés, & ils ne ſe ſoutiennent que par leur contact: la chaîne qu'ils forment, vue én-dehors, eſt un ſpectacle qui frappe; elle ſuit la pente des montagnes qui ſont au voiſinage, & elle en imite ſenſiblement la chute: ſous ces voûtes qui s'élevent en s'éloignant de la grotte, coule un ruiſſeau qui fait un bruit aſſez conſidérable, & dont l'eau qui eſt en petite quantité, a aſſez de vîteſſe pour mettre en jeu des moulins à blé, voiſins de la grotte.

Parmi les rochers énormes qui ſont à la Roquette, il en eſt un plus élevé que les autres, & qui eſt célèbre dans le pays ; on y débite qu'il tremble lorſque le moindre vent agit ſur lui ou qu'une légère force lui eſt communiquée, & qu'il reſte immobile ſi une plus grande lui eſt appliquée. Les obſervations que j'ai faites ſur ce rocher & que j'ai rapportées dans un autre Mémoire, m'ont mis à même d'établir quelles ſont les propriétés qu'il a réellement ; dépouillé d'une partie de ſon merveilleux, il lui en reſte encore aſſez pour intéreſſer la curioſité.

ARTICLE SIXIÈME.

Remarques ſur les Priapolites qui ſont au voiſinage de la Grotte de Saint-Dominique.

Au voiſinage de la grotte de Saint-Dominique eſt un coteau ſitué à demi-lieue de Caſtres vers l'orient, où on trouve des pierres priapolites ; on monte ſur ce coteau appelé *la Montagnette*, ou vulgairement, *la côte des Bichoux*, par une pente douce à l'extrémité de la plaine de *Biſeus*. Un vallon le ſépare à l'orient du coteau de *las Barrières*, & au midi de celui de *la Cantourne ;* quoique le coteau de la Montagnette ſoit d'une petite étendue, le terrein qui eſt au midi eſt cependant d'une nature différente de celui qui eſt à l'orient ; vers la Cantourne, c'eſt de la terre ou du roc fort mou, & vers las Barrières, un roc très-dur où ſont enchâſſées les pierres priapolites. Il ne m'a pas été poſſible d'en découvrir dans les fouilles que j'ai fait faire du côté du midi ; celles que j'y ai aperçues à la ſuperficie pourroient bien y avoir été entraînées par les ravines ou jetées par les paſſans, on y a ſeulement trouvé des cailloux, tandis qu'on n'en voit pas du côté où ſont les priapolites. Il ſemble que ces différentes pierres ne peuvent ſe former ni exiſter dans le même lieu.

Le coteau de la Montagnette offre vers l'orient pluſieurs fentes ou fondrières de différentes profondeurs, formées par

la chute des eaux, il eſt inculte dans la longueur de 7 ou 800 pas; c'eſt dans cette étendue de terrein qu'eſt le rocher d'où on tire les priapolites; il eſt d'une pierre calcaire, fort dure & fort compacte, diſpoſé par couches & parſemé de points brillans; ſa couleur eſt d'un blanc ſale rouſſâtre. Les priapolites enchâſſées dans ce rocher y ſont ſituées de différentes manières & différemment entrelaſſées les unes avec les autres; leur longueur & leur groſſeur varient à l'infini; en général elles ſont d'une forme cylindrique: on remarque pourtant entr'elles des différences, il y en a qui ſont arrondies par les deux bouts, d'autres ont un de leur bout échancré; il en eſt d'elliptiques qu'on pourroit nommer *orchites*, pour les diſtinguer des cylindriques appelées *priapolites*. Les orchites ſont preſque toujours ſéparées des priapolites, & ce n'eſt guère que dans le roc qu'on peut voir les unes adhérentes aux autres: j'en ai fait détacher du rocher où cette union ſe rencontre aſſez bien, que j'ai placées dans mon cabinet. Il y a enfin de ces pierres qui ſont plates par-deſſous, arrondies par-deſſus & diviſées, par une ligne bien marquée, en deux parties égales.

De quelque figure que ſoient les priapolites, elles ſont toutes compoſées de pluſieurs couches parallèles de différente épaiſſeur, comme de 2 lignes, 1 ligne, $\frac{1}{2}$ ligne, $\frac{1}{3}$ de ligne, $\frac{1}{4}$ de ligne; leur couleur eſt d'un blanc ſale ſemblable à celle du roc dont on les tire; elles ſont dures, & pour les caſſer il faut les frapper aſſez fort: il y en a qui ſont dans une eſpèce de moule qui, quoique de la même nature que la pierre, eſt cependant beaucoup plus tendre; quand on frappe ſur quelques-unes de ces pierres, le moule ſe caſſe facilement; c'eſt-à-dire, que la première couche qui eſt ce que j'appelle le moule, cède ſans effort au coup qu'on lui donne, s'ouvre, éclate en pluſieurs parties, & laiſſe entrevoir la pierre qu'elle renferme. J'ai obſervé qu'il y avoit, entre ce moule & la pierre, quelque corps étranger, comme de la terre qui en empêchoit la liaiſon. Cette obſervation fait voir que ces couches n'ont pas été formées en même temps; que la pétrification de la première couche

appelée le moule, a été postérieure à celle des autres, & que par-là elle a acquis moins de consistance & de dureté.

Presque toutes ces pierres priapolites ont à leur centre & dans toute leur longueur une matière cristalline qui leur sert de noyau; elle est, pour ainsi dire, leur axe. La matière qui forme la pierre est disposée en cercle & par couches parallèles sur cette cristallisation pierreuse; ce cristal est raboteux, friable, & semble fait de plusieurs petits grains joints ensemble: il n'occupe pas un espace égal dans toutes les pierres, & n'est pas non plus proportionné à leur grosseur; son diamètre est tantôt la huitième partie, tantôt la sixième, quelquefois le tiers ou la moitié de celui de la pierre. J'ai vu des priapolites dont le diamètre n'étoit que de 2 ou 3 lignes, dans lesquelles il y avoit cependant du cristal, & d'autres aussi grosses que des melons, dont le noyau de cristal n'étoit pas plus grand que celui des pierres qui n'avoient qu'environ 1 pouce de diamètre. J'ai trouvé des pierres dont le cristal étoit creux.

Quelques priapolites ont pour noyau, du cristal qui n'est pas bien pur & bien net; il est mêlé avec quelque matière roussâtre; d'autres ont pour noyau, au lieu de cristal, une matière plâtreuse; on en trouve quelquefois qui ont une couche de cristal autour de cette matière.

Les autres pierres rondes ou plates dont j'ai parlé, sont de la même nature & de la même couleur; elles sont aussi faites par couches, & ont pour noyau, du cristal ou une matière roussâtre qui suit leur configuration.

Pour connoître la pesanteur des priapolites cylindriques, j'en ai pesé plusieurs de différens poids. Il suit de ces pesées, 1.° que la pesanteur spécifique des pierres priapolites n'a aucun rapport avec leur grandeur; 2.° que cette pesanteur moyenne arithmétique est de 2,5823; 3.° que celle qui est déduite du poids total des pierres est de 2,5696, en sorte que le pied cube pèse environ 180 livres.

La différence de la pesanteur spécifique de ces pierres me fit penser que la partie pierreuse étoit d'une pesanteur différente de celle du cristal, dont le volume n'a pas toujours

le même rapport au volume de la pierre; pour m'en aſſurer, je fis ſcier quatre de ces pierres, ſuivant leur longueur, en deux parties à peu-près égales; je peſai comme ci-devant chacune de ces moitiés, dont les deux enſemble pesèrent un peu moins que la pierre entière, à cauſe de ce qu'avoit emporté le trait de la ſcie. Je gardai par curioſité une moitié de chacune de ces pierres telle qu'elle étoit, & je les plaçai dans mon cabinet; je fis ôter le criſtal de l'autre moitié ſeulement, afin d'avoir la peſanteur ſpécifique d'où je puiſſe déduire celle du criſtal.

De diverſes épreuves que j'ai faites, il réſulte 1.° que la peſanteur ſpécifique de la partie pierreuſe eſt dans chaque pierre, plus grande que celle du criſtal; 2.° que la peſanteur moyenne de la partie pierreuſe eſt de 2,5935, & que la peſanteur moyenne du criſtal eſt de 2,1333.

Puiſque la gravité ſpécifique des priapolites excède celle de l'eſpèce de pierre ordinaire, la plus peſante & la plus homogène, il ſemble qu'en ſuivant les principes du fameux Boyle, on puiſſe conclure qu'elles contiennent quelque matière métallique. Les géodes tiennent preſque toujours un peu de la nature du minéral ferrugineux; les priapolites qui ont avec eux quelque analogie, pourroient auſſi tenir de la nature de quelque corps minéral, d'où on pourroit inférer qu'il ſeroit poſſible de les employer utilement dans la Médecine.

Les priapolites ſont des eſpèces de ſtalactites; comme elles, ces pierres ſont faites de couches parallèles, & l'eau eſt auſſi l'agent de leur formation; elles ſont les unes & les autres des concrétions formées par les matières que l'eau entraîne avec elle, & paroiſſent n'avoir d'autre diſtinction que celle que leur donnent ces matières. Les couches des priapolites ſont compoſées des grains de ſable unis par des dépôts continuels des ſucs ſalins & criſtallins, & des ſédimens que l'eau charie à pluſieurs repriſes. Il y a lieu de croire que les ſucs criſtallins ont été la première matière des priapolites; que ces ſucs entaſſés & durcis leur ont ſervi de noyau, & que les ſucs pétrifians ont coulé enſuite ſur eux, les ont pénétrés, ont

rempli leurs pores & ont lié leurs parties. De ce que les sucs pétrifians ont coulé en différens temps sur les sucs cristallins, qu'ils n'ont durci qu'à mesure qu'ils les couvroient & par intervalles, les couches qu'ils ont formées ont dû être distinctes & appliquées successivement les unes sur les autres; elles ont dû augmenter ainsi de volume, prendre une forme arrondie & former les priapolites. Si on en trouve quelquefois qui n'ont pas pour noyau une cristallisation pierreuse, mais une matière tantôt blanchâtre, tantôt roussâtre; si on en trouve enfin qui ont une couche de cristal autour de cette matière; on ne doit vraisemblablement attribuer cette bizarrerie qu'à la différente combinaison des sucs cristallins & pierreux, ou à un dérangement arrivé dans les couches.

De telles variétés servent à faire mieux sentir le danger où on s'exposeroit en poussant plus loin ces conjectures sur la formation des pierres priapolites; il est de la sagesse d'attendre de nouvelles observations qui nous conduiront peut-être un jour à la découverte de ce secret de la Nature, que son Auteur couvre encore d'une nuit obscure.

Caliginosâ nocte premit Deus. Horace.



MÉMOIRE

MÉMOIRE
SUR QUELQUES PARTICULARITÉS DE LA STRUCTURE DU CERVEAU ET DE SES ENVELOPPES.

Par M. SABATIER.

QUOIQUE l'on ignore parfaitement l'usage du plus grand nombre des parties du cerveau, ce viscère a été de tout temps l'objet des recherches des Anatomistes, & ils en ont développé la structure d'une manière qui paroît ne laisser rien à desirer. Cependant lorsqu'on l'examine avec soin, on y trouve des choses qui leur ont échappé ou qu'ils n'ont pas décrites avec l'exactitude qu'elles méritoient. Ce sont ces particularités, dont les unes regardent le cerveau lui-même, & les autres ont rapport aux membranes qui le recouvrent, que je vais exposer dans ce Mémoire. J'espère que si elles ne répandent pas plus de jour sur les fonctions impénétrables de cet organe, elles serviront du moins à rendre son histoire plus complette.

Le corps calleux est une des parties les plus extérieures du cerveau. On l'aperçoitl lorsqu'après avoir enlevé la faux, on écarte ses deux hémisphères. Il se présente sous la forme d'une voûte de couleur blanche, située profondément dans leur intervalle, plus près de leur partie antérieure que de la postérieure, & qui les unit l'un à l'autre. Sa largeur qui n'est guère moindre que de huit à dix lignes, augmente un peu en arrière, & diminue sensiblement en avant. Les hémisphères du cerveau portent sur ses parties latérales, & le vide qui se trouve entr'eux & ce corps, forme une cavité alongée que l'on peut assez bien comparer à celles que présentent les sinus ou ventricules du larynx. Cette circonstance n'a été bien vue que par Vésale. Les termes dont il se sert pour l'exprimer,

en donnent une idée ſi nette, qu'elle auroit dû frapper tous ceux qui ont écrit depuis lui : *obſervantur*, dit-il, *utrinque ad corporis calloſi latera, ſecundùm ipſius longitudinem, ſinguli ſinus in cerebri ſubſtantiâ, inſtar profundioris lineæ inſculpti, ac cum ſuperiore corporis calloſi ſuperficie eò magis pateſcentes, quò cerebrum violentiùs, quaſi id ſurſum, in latera etiam acturus, ſejunxeris.*

On voit ſur le corps calleux pluſieurs lignes ſaillantes, dont les unes le traverſent d'avant en arrière, & les autres vont d'un de ſes côtés à l'autre. Les premières, au nombre de deux ſeulement, ſont beaucoup plus élevées que les ſecondes. Elles ſont placées au milieu, s'accompagnent réciproquement, & forment une eſpèce de raphé ou de ſuture qui le ſépare en deux parties égales. Ces lignes ne ſont pas parallèles dans toute la longueur du corps calleux ; on les trouve ſouvent ſéparées en avant & en arrière, & rapprochées dans leur partie moyenne ; plus ſouvent encore rapprochées en avant & écartées en arrière. Il eſt fort ordinaire qu'elles ſoient flexueuſes dans leur cours. Les autres lignes que préſente ce corps, ſont fort nombreuſes. Elles ſont toutes dans une direction tranſverſale, & vont ſans interruption de la partie droite à la partie gauche, en paſſant ſous les premières. La néceſſité d'expliquer comment la paralyſie & les mouvemens convulſifs, qui ſont la ſuite des léſions apparentes du cerveau, arrivent toujours à la partie du corps oppoſée à celle de ce viſcère qui a été bleſſée, a fait croire à quelques-uns, même contre le témoignage de leurs ſens, que ces lignes, quoique tranſverſales en apparence, étoient cependant obliques, & qu'elles ſe croiſoient les unes les autres. L'examen le plus attentif répété ſur un très-grand nombre de ſujets, m'a toujours fait voir le contraire.

Le *ſeptum lucidum*, cette cloiſon mince & tranſparente qui ſépare les deux ventricules ſupérieurs ou latéraux du cerveau, deſcend de la partie moyenne & inférieure du corps calleux ; elle eſt évidemment compoſée de deux lames médullaires, entre leſquelles ſe trouve un écartement qui eſt connu ſous

le nom de cavité du *feptum lucidum*, & qui a été découvert par Sylvius. Cet écartement n'eſt pas le même dans tous les ſujets. La cavité qu'il forme m'a paru avoir une figure triangulaire, & aſſez ſemblable à celle du ſinus longitudinal ſupérieur de la dure-mère. Elle eſt tapiſſée d'une membrane extrêmement ſubtile, & elle contient plus ou moins de ſéroſité. Cette cavité eſt plus large & plus évaſée en avant qu'en arrière, où elle ſe termine en pointe. Sa longueur la plus ordinaire eſt de dix-huit à vingt lignes. Vieuſſens a dit qu'elle communiquoit avec le troiſième ventricule. Winſlow a cru voir la même choſe, & M. Tarin a avancé dans ſon Anthropotomie, que cette cavité s'ouvroit quelquefois dans les ventricules latéraux par une petite fente qui ſépare les deux cordons du pilier antérieur. Santorini eſt d'un avis entièrement oppoſé. Selon lui, ce n'eſt pas dans le troiſième ventricule, mais au-dehors du cerveau, vis-à-vis la partie ſupérieure de l'union des couches des nerfs optiques que ſe termineroit l'extrémité antérieure de la cavité dont il s'agit, ſi elle n'étoit fermée en cet endroit par une lame médullaire fort mince, & par la portion de la pie-mère qui recouvre cette partie du cerveau. Mes obſervations à ce ſujet confirment celles de cet illuſtre Anatomiſte. Quelques-uns croient que la cavité du *ſeptum lucidum* manque quelquefois; mais je l'ai toujours vue, excepté dans le cas où la ſubſtance du cerveau étoit trop molle pour qu'elle fût facilement développée.

Le corps médullaire appelé la voûte à trois piliers, eſt continu au *ſeptum lucidum* qu'il termine inférieurement. Cette voûte a la forme d'un triangle équilatéral, dont un des angles eſt en avant & les deux autres en arrière. Elle poſe preſque par-tout ſur l'adoſſement des couches des nerfs optiques; mais elle en eſt ſéparée par une production membraneuſe à laquelle tiennent les deux plexus choroïdes qui ſont logés dans les ventricules latéraux, & qui fournit à ſa face inférieure un grand nombre de vaiſſeaux artériels & veineux. Cette partie de la voûte à trois piliers eſt traverſée de lignes que Winſlow dit être tranſverſales, & qu'il croit lui avoir

fait donner le nom de *corpus psalloïdes* & de *lyra*, parce qu'on l'a comparée à un instrument à corde à peu-près semblable à celui que l'on appelle *tympanon*. Le terme de ψαλλίδες & de ψαλλιδοειδές dont les auteurs Grecs se sont servis pour exprimer la voûte à trois piliers, & que l'on a rendu par les mots latins *psalterium & lyra*, ne vient point du verbe ψαλλω, *tenui motu percutio*, *fidibus cano*, mais de ψαλίς, ιδος, qui dans l'usage ordinaire signifie *forfex*, des ciseaux, & en terme d'architecture, *fornix* voûte; ce que prouve le nom de χαμαείον qui a été aussi donné à la voûte à trois piliers, & qui vient de χαμαερὰ, ας, *camera*, *fornix*, *testudo*. Quant aux lignes qui se voient à la partie inférieure & concave de cette voûte, elles ont une direction différente à sa partie antérieure & à sa partie postérieure : en avant elles sont au nombre de deux, fort saillantes & situées longitudinalement; en arrière elles sont en assez grand nombre, leur direction est oblique, & elles paroissent venir de chaque côté de l'épanouissement des fibres qui composent le *corpus fimbriatum*, lequel tient, comme on sait, de chaque côté à l'angle postérieur de la voûte.

La production membraneuse qui se trouve entre cette voûte & les couches des nerfs optiques, donne naissance aux deux plexus choroïdes, & tire elle-même son origine de la pie-mère qui s'enfonce dans les ventricules latéraux, entre la partie postérieure du corps calleux, & la partie supérieure des tubercules quadrijumeaux, autrement nommés *nates* & *testes*. Elle est parsemée de beaucoup de vaisseaux sanguins. Les veines y paroissent plus nombreuses que les artères, & se rassemblent pour former deux grosses branches qui marchent parallèlement d'avant en arrière, & qui se réunissent en un seul tronc que Galien a nommé la *grande veine du cerveau*. Cette veine va s'ouvrir dans la partie antérieure du sinus droit. Elle ne rapporte pas seulement le sang des plexus choroïdes, mais encore celui qui revient de presque toute l'étendue des ventricules latéraux, dont les vaisseaux communiquent avec ceux de ces plexus.

Lorſqu'on enlève, avec les précautions convenables, la membrane dont il vient d'être parlé, on découvre les couches des nerfs optiques adoſſées l'une à l'autre, & derrière ces couches, cinq tubercules; un ſupérieur & antérieur qui eſt la glande pinéale, & quatre autres ſitués inférieurement & plus en arrière, qui ſont les *nates* & *teſtes*. Willis avoit dit que les couches des nerfs optiques étoient pour l'ordinaire ſéparées dans l'homme; mais Vieuſſens aſſure qu'il les a toujours trouvées réunies par une ſubſtance médullaire d'une conſiſtance fort molle, qui ſe rompt aiſément, & dont les parties ſe contractent de telle manière qu'il eſt difficile d'en retrouver les reſtes: il ajoute que cette ſubſtance tire ſon origine de la partie du cerveau qu'il appelle le *centre ovale*. Santorini ne convient point qu'elle procède de ce centre ovale, comme Vieuſſens ſe l'eſt perſuadé; mais il a ſouvent obſervé en cet endroit une membrane blanche compoſée de fibrilles médullaires diverſement entrelaſſées & diſpoſées ſans ordre. Morgagni n'a pas ſeulement rencontré l'eſpèce de voûte dont il s'agit; il en a trouvé deux placées l'une au-deſſus de l'autre. La plus inférieure étoit de couleur griſâtre, & la ſupérieure de couleur blanche, & d'une ſubſtance vraiment médullaire. Enfin Winſlow dit en parlant des couches des nerfs optiques, qu'elles ſont réellement unies, & ne font qu'un même corps par la vraie continuation de la ſubſtance blanchâtre de leur convexité. Cette ſubſtance, continue-t-il, eſt très-mince & ſe rompt par le propre poids des parties latérales d'un cerveau détaché du crâne, & pour s'aſſurer de ſon exiſtence, il faut l'examiner dans ſa place naturelle, & encore faut-il avoir ſoin de manier les parties légèrement.

Qui croiroit que malgré l'aſſertion des habiles gens que je viens de citer, l'union des couches des nerfs optiques pût être révoquée en doute? Cependant c'eſt d'après l'obſervation la plus exacte & les diſſections les plus multipliées, que j'oſe le faire. Quoique j'aie pris les plus grandes précautions pour ne point ébranler la maſſe du cerveau en ſciant le

crâne; quoique j'aie enlevé la membrane qui couvre les couches des nerfs optiques, avec une lenteur extrême; quoique j'aie plusieurs fois commencé l'examen du cerveau par la partie inférieure, afin d'apercevoir, s'il étoit possible, dans toute leur intégrité, celles qui sont situées supérieurement, je n'ai jamais pu voir que ces couches fussent jointes l'une à l'autre. Au contraire j'ai cru trouver dans l'état sous lequel elles se sont présentées, la preuve qu'elles n'avoient été que contiguës; car les surfaces par lesquelles elles se touchent mutuellement, m'ont toujours paru fort lisses & sans aucune inégalité, ce qui ne seroit sans doute pas arrivé, si elles eussent été unies ensemble par une sorte de continuité de substance. Tout le fruit que j'ai tiré de mes recherches à cet égard, a été de trouver presque constamment entr'elles un cordon mollasse, de couleur grisâtre, du diamètre d'une ligne ou d'une ligne & demie, & qui naissoit de leur partie moyenne & antérieure. Morgagni est le seul des Anatomistes, que je sache avoir fait mention de ce cordon, qu'il dit joindre les couches des nerfs optiques à leur partie moyenne, & qu'il assure n'avoir été remarqué par personne avant lui.

Le troisième ventricule est la cavité oblongue formée par l'écartement de la partie inférieure des couches des nerfs optiques. Cette cavité est assez profonde en avant, au-dessous de l'angle antérieur de la voûte à trois piliers, & paroît se terminer en cet endroit par un canal évasé en haut, rétréci en bas, formé par un prolongement de la substance médullaire du cerveau, soutenu au dehors par un semblable prolongement de la pie-mère, & qui s'étend obliquement d'arrière en avant & de haut en bas, jusque vers la partie moyenne de la glande pituitaire. Les Anciens ont cru que ce canal étoit destiné à conduire hors du cerveau les sérosités qui tombent dans les cavités de ce viscère, & lui ont donné le nom d'*infundibulum*. Vieussens est le premier qui ait aperçu qu'il n'étoit pas creusé dans toute sa longueur, comme un entonnoir. Sa partie inférieure, dit cet Auteur, n'a pas de cavité apparente. Elle n'est percée que de porosités. C'est,

ajoute-t-il, ce que prouve l'expérience; car si l'on y verse une teinture de safran faite avec de l'esprit-de-vin, on ne la voit parvenir que lentement jusqu'à la glande pituitaire. Ridley pense de même, & M. Lieutaud assure que le canal en question n'est en bas qu'une espèce de cylindre solide de deux ou trois lignes de hauteur, auquel il donne le nom de *tige pituitaire.* Il est difficile de découvrir si ce qu'on appelle l'*infundibulum* est un véritable canal ou un corps solide, comme le disent les Anatomistes dont je viens de parler. Cette partie est si foible qu'elle ne supporte aucune espèce d'injection sans se déchirer & se rompre, & si molle qu'elle s'affaisse sur elle-même lorsque, pour l'examiner plus commodément, on la sépare d'avec celles qui l'avoisinent. Cependant il me semble qu'elle ne renferme aucune cavité, & qu'elle ne peut remplir les fonctions qui lui ont été attribuées, à moins qu'elle ne soit poreuse, comme Vieussens l'a avancé.

On voit à la partie antérieure du troisième ventricule, entre les deux piliers qui forment l'angle antérieur de la voûte, un cordon cylindrique & médullaire, d'une grosseur médiocre, d'une ligne & demie de longueur, & qui unit ensemble la partie antérieure & inférieure des corps cannelés. C'est la commissure antérieure. Santorini le nomme *corda Willisii & commissura crassioris nervi æmula Vieussenii.* Il est vrai que Willis l'a décrit sous le nom de *processus transversus medullaris;* mais il n'est pas le premier qui l'ait aperçu. Je trouve que cet Auteur a été prévenu par Riolan, lequel dit, en parlant des corps cannelés, qu'ils ont des connexions mutuelles au moyen d'une corde transversale d'une grosseur & d'une substance égale à celle du nerf optique. *Duas autem illas eminentias anteriùs connectit transversus funis, ejusdem substantiæ & molis cum nervo optico.*

La commissure antérieure est une des parties du cerveau qui ont le plus besoin du secours de la dissection pour être bien vues. Si on enlève avec le manche aplati d'un scalpel ou avec tout autre instrument de semblable espèce, la substance grise dont elle est entourée, on verra qu'elle s'étend à plus

d'un pouce & demi de côté & d'autre dans l'épaiſſeur de chacun des lobes moyens du cerveau, & qu'elle y eſt logée ſans aucun mélange avec les parties qui l'avoiſinent. Sa figure alors imite celle d'un arc à tirer des flèches, étant aſſez enfoncée en arrière dans ſa partie moyenne, & convexe en avant ſur ſes parties latérales. Sa groſſeur augmente ſenſiblement à meſure qu'elle s'éloigne de ſon milieu, & elle ſe termine en arrière par l'épanouiſſement de ſa ſubſtance qui ſe confond avec celle du cerveau. Santorini, & M. Petit, de cette Académie, ont vu une partie des circonſtances que je viens d'expoſer; mais ce qu'ils n'ont pas dit, & ce que des obſervations fort nombreuſes m'ont appris, c'eſt que la commiſſure antérieure eſt compoſée de beaucoup de filets unis enſemble & que l'on peut aiſément diſtinguer à l'œil ſimple lorſqu'on l'examine à un beau jour. Cette ſtructure fibreuſe ſe remarque beaucoup mieux à la commiſſure poſtérieure, cordon tendu tranſverſalement derrière les couches des nerfs optiques & tout ſemblable à l'antérieure, ſi ce n'eſt qu'elle eſt un peu plus groſſe, plus mollaſſe, & qu'on ne peut la ſuivre auſſi profondément dans la ſubſtance du cerveau.

Les protubérances mamillaires, tubercules arrondis & ſitués l'un auprès de l'autre à la partie antérieure de la baſe du cerveau, derrière l'union des nerfs optiques & au-devant du pont de varole, répondent à la partie antérieure & inférieure du troiſième ventricule. Quoiqu'elles ſoient un peu plus en arrière que l'extrémité inférieure des deux piliers antérieurs de la voûte, Santorini les a regardées comme le lieu d'où ces piliers tirent leur origine, & les a nommées les *oignons* ou *bulbes* des piliers antérieurs de la voûte, *priorum crurum fornicis bulbi.* Winſlow leur a conſervé cette dénomination que mes premières obſervations me faiſoient leur refuſer, ne trouvant pas que leur ſituation répondît à celle des parties que ces deux Anatomiſtes diſoient en venir. Un examen plus attentif m'a fait apercevoir qu'en enlevant avec un inſtrument mouſſe la ſubſtance griſe qui forme les parois de la partie antérieure & latérale du troiſième ventricule, on voyoit

voyoit s'élever de chacun de ces tubercules une production médullaire, qui non-seulement donne naissance aux piliers antérieurs de la voûte, mais encore à deux autres cordons blancs qui se portent l'un sur le bord supérieur de la couche du nerf optique, & l'autre vers le sillon qui sépare cette éminence d'avec le corps cannelé.

Le premier de ces cordons, après s'être séparé d'avec le pilier antérieur de la voûte, monte obliquement en arrière, marche ensuite horizontalement dans la même direction, puis redescend jusqu'au-delà de l'ouverture postérieure du cerveau, où il s'approche de celui du côté opposé, pour former une espèce de corde transversale située au-dessus de la commissure postérieure & un peu plus en arrière, & au-devant de la glande pinéale qui est adhérente à la partie moyenne de cette corde. On le reconnoît aisément à la saillie qu'il fait le long du bord supérieur de la couche du nerf optique & à sa couleur blanche, fort différente de celle que cette couche présente du côté par lequel elle s'adosse avec celle du côté opposé. Le plus grand nombre des Anatomistes n'a connu que la partie postérieure de ce cordon, qui va servir de pédicule à la glande pinéale. Ils l'ont regardé comme un nerf propre à cette glande, qui se détachoit de la couche du nerf optique pour aller se rendre à sa partie antérieure, ou qui venoit de la glande même, & qui montoit jusqu'à la partie moyenne & supérieure de la couche du nerf optique. M.rs Petit & Haller sont les seuls qui en aient parlé. Voici ce que le premier en dit : « Les pédicules de la glande pinéale sont produits par deux lames « médullaires que l'on voit s'étendre de devant en arrière sur « les couches des nerfs optiques, dans l'endroit où ces deux « éminences s'adossent. Les lames dont il est ici question, naissent « du pilier antérieur de la voûte, ainsi que je l'ai découvert & « démontré il y a plus de deux années. » Je puis dire, sans crainte de blesser la vérité, que le cordon dont il s'agit m'étoit connu long-temps avant que je susse que ces deux Auteurs en eussent fait mention.

Le second des cordons qui tirent leur origine de chacun

des deux tubercules mamillaires, s'écarte du pilier antérieur de la voûte de son côté, un peu plus haut & plus en dehors que celui que je viens de décrire. Il s'enfonce dans le sillon qui sépare le corps cannelé d'avec la couche du nerf optique, ou plutôt, pour me servir de l'expression de Vieussens, qui convient parfaitement à la structure intérieure de la seconde de ces protubérances, qui sépare le corps cannelé supérieur & antérieur, *corpus striatum supernum anterius*, d'avec le corps cannelé supérieur & postérieur, *corpus striatum supernum posterius.* Il monte de bas en haut & d'avant en arrière, puis il redescend dans la même direction jusqu'à l'endroit où le ventricule latéral se courbe pour se porter de haut en bas & d'arrière en avant; là il se continue le long de la paroi supérieure du ventricule, & va se terminer vers la fin de cette cavité à la plus intérieure des éminences que forme l'extrémité de l'*hyppocampus.* Ce cordon est assez gros dans son commencement, & d'une substance fibreuse & en quelque sorte transparente. Il laisse passer au-dessous de lui un ou deux rameaux de cette veine que j'ai dit se porter d'avant en arrière dans la grande veine de Galien, & qui viennent du corps cannelé antérieur, & paroît les appliquer à la partie inférieure de ce corps, les y retenir, & en quelque sorte les brider. Son épaisseur diminue beaucoup à mesure qu'il se porte en arrière, & se réduit à peu de chose lorsqu'il parvient à l'extrémité courbée du ventricule latéral. On diroit qu'il s'en détache quelques fibres qui se perdent dans le corps cannelé postérieur. La difficulté de le suivre plus loin dans le plus grand nombre des sujets, m'a fait croire pendant long-temps qu'il ne s'avançoit pas au-delà. Mes dernières observations m'ont enfin appris qu'il va communiquer avec l'*hyppocampus*, ainsi que je l'ai dit il n'y a qu'un moment.

Le cordon nerveux dont je viens de donner la description, n'a été connu d'aucun des Anciens. Willis est le premier qui l'ait entrevu. Il l'a nommé *limbus posterior corporis striati*, & dans un autre Ouvrage, *processus transversus medullaris*, parce qu'il a cru qu'il étoit une suite, une continuation de la partie

que l'on appelle la *commissure antérieure.* C'est ce que prouve l'explication de la huitième planche de son Anatomie du cerveau, où il fait représenter sous les lettres *g g* ce cordon auquel il donne le nom de *processus medullaris transversus, corpora striata invicem connectens.* Vieussens après lui l'a désigné sous celui de *geminum centrum semi-circulare*, sans que je puisse trop savoir pourquoi. Au reste, la manière dont ces deux Auteurs le décrivent est très-imparfaite. M. Tarin ensuite l'a appelé *frenulum novum*, dans ses *Adversaria Anatomica*, & l'a désigné sous le nom de *bride*, dans son Anthropotomie, sans doute parce qu'il contient les rameaux veineux que j'ai dit passer au-dessous de lui, pour aller au corps cannelé. Enfin M. Haller s'est servi, pour l'exprimer, du terme de *tænia semi-circularis* bandelette demi-circulaire, dans son grand Ouvrage de Physiologie où il en parle beaucoup plus exactement que ceux qui l'ont précédé. La description qu'il en donne diffère beaucoup de la mienne, en ce qu'il le fait terminer en arrière par un grand nombre de fibres qui se perdent dans la substance du cerveau, près & au-dessous de la couche du nerf optique, *pene thalamum & inferiùs*, & en ce qu'il lui attribue plusieurs racines en avant, une qu'il tire du pilier antérieur de la voûte, une seconde de la substance même du cerveau au-devant du pilier, & une troisième de la commissure antérieure, à l'épaisseur de laquelle cet illustre Anatomiste croit que cette racine contribue. Nul autre, que je connoisse, n'en a fait mention, si j'en excepte Santorini, qui comme moi fait naître le cordon médullaire dont il s'agit, du tubercule mamillaire par un tronc qui lui est commun avec le pilier antérieur de la voûte, ce dont on a lieu d'être surpris, vu la grosseur dont il est à sa partie antérieure, & la notice que les Auteurs que je viens de citer en ont donnée.

Les tubercules quadrijumeaux, ou autrement les *nates & testes*, sont placés au-dessous & derrière la glande pinéale. Ils répondent à la partie antérieure de la tente du cervelet. La plus inférieure de ces éminences se termine de chaque côté en une production blanche d'une grosseur assez considérable,

qui deſcend obliquement en arrière, en s'écartant de celle qui lui répond, & qui va ſe perdre dans la propre ſubſtance du cervelet. Cette production diminue ſenſiblement de groſſeur à ſa partie inférieure. Sa longueur eſt d'un bon pouce, & elle eſt ſituée au-deſſus des cuiſſes de la moelle alongée & un peu plus en dedans. Elle eſt unie avec celle du côté oppoſé par une lame aſſez mince, de ſubſtance griſe, qui forme la paroi ſupérieure du quatrième ventricule, & dont la largeur augmente de haut en bas à proportion de l'écartement dont il s'agit. Cette lame, dont Hygmore & Drelincourt ſe diſputent la découverte, a été priſe par Vieuſſens pour une valvule appliquée à l'extrémité poſtérieure de l'aquéduc de Sylvius, au moyen duquel le troiſième ventricule communique avec le quatrième. Comme elle eſt la moins épaiſſe de toutes les parties qui circonſcrivent cette cavité, lorſqu'on applique l'extrémité d'un ſyphon à la partie antérieure de l'aquéduc de Sylvius & qu'on y pouſſe de l'air, elle ſe ſoulève beaucoup & pourroit faire croire qu'il y a effectivement à cet endroit une valvule particulière; mais c'eſt une apparence qui ne trompera perſonne lorſqu'on aura pris ſoin d'examiner les choſes en place, après avoir enlevé la tente du cervelet qui couvre les productions, & la lame griſâtre dont il vient d'être parlé. Ce procédé fera auſſi découvrir entre les deux tubercules quadrijumeaux inférieurs une eſpèce de bride qui deſcend en bas, & qui ſe termine au-deſſous d'eux. Toutes ces parties ſont conſtantes & fort faciles à apercevoir; néanmoins elles n'ont été bien connues que de M. Haller, à l'induſtrie & à la ſagacité de qui il n'a preſque rien échappé de la ſtructure des organes qui compoſent le corps humain & celui des brutes.

La pie-mère, cette membrane mince qui recouvre immédiatement le cerveau, eſt compoſée, comme tout le monde le ſait, de deux lames dont l'intérieure eſt la plus étendue & forme une infinité de replis qui s'enfoncent entre les circonvolutions qui ſe remarquent ſur ce viſcère. Ces replis contiennent un tiſſu cellulaire aſſez lâche, dans lequel les

vaisseaux sanguins, artères & veines qui se distribuent au cerveau, vont se ramifier à l'infini, de sorte que sa propre substance n'en reçoit que des rameaux extrêmement fins & déliés. Plusieurs Anatomistes, tels que Fallope, Bauhin, Spigellius, Hygmore, Willis & plusieurs autres, ont cependant pensé que les artères y pénétroient par des rameaux assez considérables, ce qu'ils ont essayé de prouver par les points rouges qui se remarquent dans la substance du cerveau lorsqu'on vient à la couper, & par la résistance que les vaisseaux qui y sont répandus, offrent quelquefois au tranchant des instrumens dont on se sert pour la diviser: je n'y en ai jamais rencontré, & cette disposition est une de celles par où ce viscère diffère le plus essentiellement des autres organes secrétoires, tels que le foie, les reins, le pancréas & autres, où les gros troncs sanguins s'introduisent pour s'y ramifier. Les magnifiques préparations que Ruysch & Albinus ont faites de la pie-mère, confirment mon sentiment à ce sujet. On y voit du côté par lequel cette membrane étoit appliquée au cerveau, un nombre prodigieux de vaisseaux d'une excessive finesse, qui la font paroître comme lanugineuse. Sans avoir pu réussir, comme eux, à injecter les vaisseaux du cerveau, j'ai vu la même chose sur quelques sujets dont la pie-mère se détachoit avec facilité, & laissoit la substance corticale entièrement à nu.

Les replis de la pie-mère qui s'introduisent entre les circonvolutions du cerveau, ne sont pas les seules productions de cette membrane. Elle forme aussi des prolongemens qui s'enfoncent dans les cavités de ce viscère. Tel est celui que j'ai dit se trouver entre la partie inférieure de la voûte à trois piliers, & les couches des nerfs optiques, & qui se glisse de dehors en dedans entre cette voûte & la partie supérieure de la moelle alongée. Tels sont encore ceux qui pénètrent de chaque côté de la protubérance annulaire ou pont de Varole, & qui se rendent dans la partie antérieure & inférieure des ventricules latéraux. Il y a apparence que ces prolongemens, outre les plexus choroïdes qui en sont une continuation, fournissent aux cavités intérieures du cerveau

la membrane extrêmement mince qui les tapisse; membrane connue des Grecs, révoquée en doute par Vésale, qui s'élève à cette occasion en reproches très-déplacés contre Galien l'objet perpétuel de ses repréhensions, mais enfin adoptée par tout le monde, quoique peu d'Auteurs en aient parlé d'une manière positive.

La dure-mère a ses replis comme la pie-mère. On s'accorde à dire que celui qui est connu sous le nom de *tente du cervelet*, est placé transversalement. Je trouve qu'il est beaucoup plus élevé à sa partie moyenne qui tient à la base de la faux, que vers ses parties latérales, & que celles-ci forment de chaque côté un plan incliné qui se termine au bord supérieur du rocher, & qui se continue avec la face supérieure de cette apophyse. La disposition dont je parle, le rend plus propre à empêcher que le cerveau ne pose sur le cervelet, que celle qu'on lui attribue; car comme la pesanteur des corps qui appuient sur des plans inclinés, se décompose en deux forces, dont l'une agit parallèlement & l'autre perpendiculairement à ces plans, celle du cerveau va porter en grande partie sur l'éminence osseuse du temporal. Il faut cependant avouer que toute la tente du cervelet ne descend pas uniformément d'arrière en avant, & qu'il y a une partie de cette cloison membraneuse qui se porte obliquement d'avant en arrière jusque vers la protubérance occipitale interne; mais l'extrémité du lobe postérieur du cerveau qui appuie dessus est peu considérable, & se trouve suffisamment soutenue par cette même protubérance.

La position, le nombre, la figure & les communications réciproques des sinus de la dure-mère sont suffisamment connus. Cependant il est bon d'observer que la coupe du sinus longitudinal & des deux sinus latéraux supérieurs représente un triangle curviligne dont un des côtés, celui qui regarde le crâne, est convexe en dehors, & les deux autres le sont en dedans, pendant que celle du sinus droit en représente un dont les trois côtés sont également convexes en dedans. Vésale en a fait la remarque, & l'a exprimée par une figure linéaire, en quoi il n'a été suivi que par Chéselden. Galien avoit dit que les

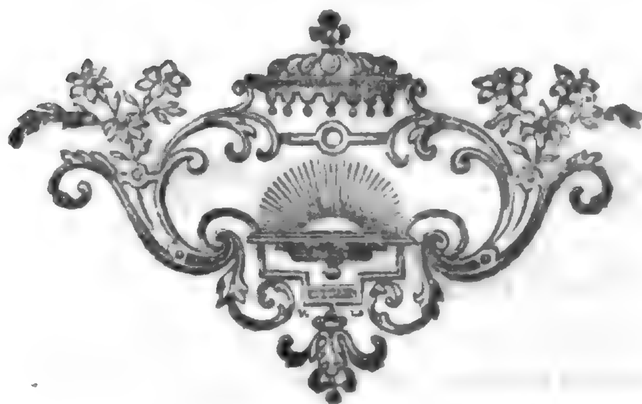
ſinus de la dure-mère ne recevoient que des veines, & qu'ils exerçoient les mêmes fonctions que ce genre de vaiſſeaux; Véſale au contraire a prétendu qu'ils recevoient auſſi des artères, & qu'ils avoient des battemens marqués. Quoique cette opinion ait été pleinement réfutée par Fallope dans ſes Obſervations anatomiques, elle a été adoptée par Vieuſſens, Wepfer & pluſieurs autres qui ont cru en trouver la preuve dans la facilité avec laquelle des injections faites avec des liqueurs diverſement colorées & pouſſées par les artères carotides, ſe rendent dans le ſinus longitudinal ſupérieur. Ils n'ont pas vu que ces injections après avoir traverſé les artères, revenoient enſuite par les veines. Si quelques artères parvenoient juſqu'aux ſinus, ce ne pourroit être que celles qui ſe diſtribuent à la propre ſubſtance de la dure-mère, & on ſait qu'elles paſſent par-deſſus ces cavités ſans s'y ouvrir. Quant aux pulſations que les Anatomiſtes que je viens de citer & pluſieurs Modernes ont attribuées aux ſinus, & qu'ils ont dit être iſochrones à celles des artères, elles ne peuvent avoir lieu; les mouvemens que l'on obſerve quelquefois dans ces ſortes de vaiſſeaux répondent à ceux de la reſpiration, & viennent de ce que le ſang eſt retenu ou même repouſſé de bas en haut dans les veines jugulaires internes, dans leſquelles les ſinus de la dure-mère vont preſque tous ſe dégorger.

Les brides membraneuſes que l'on trouve dans le ſinus longitudinal ſupérieur & dans les ſinus latéraux n'ont échappé à perſonne; mais il eſt aſſez extraordinaire qu'on n'ait pas fait attention à celles qui ſe remarquent à leur extérieur, & qui ont été décrites par Ridley, Santorini & enſuite par M. Tarin. Santorini les nomme *lacerti tranſverſi exteriores*. Il dit que leur direction eſt différente, & qu'elles ſont tantôt inclinées en avant & tantôt en arrière. Elles m'ont paru placées ſans ordre, & je les ai vu ſe croiſer les unes les autres dans toutes ſortes de ſens. C'eſt ſur-tout au voiſinage du ſinus longitudinal ſupérieur qu'il faut les obſerver, après avoir enlevé la dure-mère avec le crâne par une ſection tranſverſale de ces parties. On en voit auſſi quelques-unes, mais moins

marquées, près la face ſupérieure des ſinus latéraux. Les veines qui ſe rendent dans ces cavités n'y pénètrent que dans leurs intervalles. On ne peut douter que ces brides ne préviennent la trop grande dilatation des ſinus, dilatation qui auroit pu être l'effet de la raréfaction du ſang, & ſur-tout du reflux qui ſe fait dans les veines jugulaires, lorſque la reſpiration eſt retenue pendant trop long-temps, ou que l'on fait des efforts violens.

Quelques remarques ſur la direction des veines que reçoivent les ſinus de la dure-mère, termineront ce Mémoire. Lower eſt le premier qui ait aperçu qu'elles ſe gliſſent obliquement dans l'épaiſſeur de cette membrane, à peu-près comme le canal cholédoque & les deux uretères dans celle du duodenum & de la veſſie. Il dit auſſi qu'elles s'ouvrent toutes d'arrière en avant, en quoi il a été ſuivi par Vieuſſens, lequel en excepte pourtant deux ou trois, qui de la partie antérieure vont à la poſtérieure. Ridley enſuite a avancé que la moitié de ces veines alloit d'arrière en avant, & l'autre moitié d'avant en arrière. Santorini les a vues dans trois directions différentes; celles qui ſont antérieures & qui répondent au front ſont placées en travers; celles qui ſuivent vont d'avant en arrière, & les poſtérieures d'arrière en avant; celles-ci ſont plus amples & plus nombreuſes. Enfin, Nicolas Albert, auteur d'une Diſſertation fort eſtimée ſur la direction des vaiſſeaux, aſſure que la plus grande partie de ces veines marche obliquement d'arrière en avant, mais que les autres qui ſont un peu plus du tiers de leur nombre total, marchent d'avant en arrière. Il ajoute que la diſpoſition des premières empêche que le ſang ne coule dans le ſinus avec trop de rapidité, pendant que celle des ſecondes favoriſe ſon cours lorſque la tête eſt penchée en avant, & qu'il lui faut remonter contre ſon propre poids pour ſe rendre vers le golfe des veines jugulaires. On conçoit avec peine comment il peut y avoir une diverſité de ſentimens auſſi marquée ſur une choſe de fait. La plus légère attention ſuffit pour voir que toutes les veines qui s'ouvrent dans le ſinus longitudinal ſupérieur,

ſupérieur, s'y rendent d'arrière en avant, comme la plupart des Modernes le diſent. Lorſque j'en ai rencontré qui paroiſſoient avoir une direction contraire, j'ai toujours vu qu'elles n'alloient point au ſinus, mais qu'elles ſe terminoient dans quelques-unes des groſſes veines qui y aboutiſſent. Pour me rendre plus certain de la marche de ces veines, j'ai ſouvent remarqué la manière dont celles qui communiquent avec les ſinus latéraux & avec le ſinus droit venoient s'y rendre, bien perſuadé qu'elle devoit être la même. Mon attente à cet égard n'a point été trompée; j'ai vu les unes ſe gliſſer d'avant en arrière, & les autres d'arrière en avant, c'eſt-à-dire d'une manière toujours contraire au cours du ſang qui coule dans ces ſinus. Depuis que j'ai fait ces obſervations, j'ai trouvé qu'elles avoient été faites avant moi par Verheien.



ANALYSE DE LA BILE,

Avec des Réflexions sur les changemens qu'elle peut subir dans le corps humain.

Par M. BORDENAVE, Professeur Royal de Chirurgie, Membre des Académies de Rouen, de Florence, &c.

LA bile réunit en elle des propriétés essentielles pour l'économie animale, & par cette raison elle a toujours mérité l'attention des Anatomistes, des Physiologistes & des Chimistes. Si on consulte les Auteurs qui ont parlé de ce fluide, on voit qu'en en faisant l'analyse, leur but principal a été de déterminer la nature de ses parties intégrantes pour en déduire les usages.

Nous avons cru devoir répéter les expériences & examiner de nouveau les changemens que la bile subit, étant mêlée avec différentes liqueurs. Ces recherches ne nous ont pas seulement paru intéressantes pour constater la nature de la bile, mais encore pour connoître les changemens dont elle est susceptible dans le corps animal, pour apprécier les causes de ces changemens, & en tirer des conséquences utiles pour la pratique de l'Art de guérir.

La bile contenue dans la vésicule du fiel, sera particulièrement l'objet de notre examen; elle est essentiellement la même que la bile hépatique, & nous voyons qu'elle n'en diffère qu'en ce qu'elle est plus amère & plus épaisse, ce qui est une suite nécessaire de son séjour dans ce réservoir.

La considération simple de la bile fait voir qu'elle est une liqueur savonneuse, d'une couleur jaune-verdâtre plus ou moins foncée, d'une odeur peu sensible quand elle n'est point altérée, d'une odeur désagréable quand elle est atteinte de quelque mouvement spontané, & d'un goût très-amer.

Elle est naturellement visqueuse; elle s'épaissit aisément;

mise sur le feu, elle s'y coagule d'elle-même; l'esprit-de-vin & les acides produisent sur elle le même effet. Elle prend dans les maladies la consistance de poix; quelquefois elle devient noire & gluante; elle se durcit d'autres fois & forme des concrétions, & comparée avec les autres liqueurs, son poids paroît assez considérable.

L'amertume peut être regardée comme une qualité essentielle de la bile; elle augmente avec l'épaississement de cette liqueur; & si la bile dans certaines maladies devient plus fluide, comme séreuse, & passe, pour ainsi dire, à un état de dissolution, son amertume diminue, & elle devient presque insipide. Elle n'est point de sa nature ni alkaline, ni acide, & si quelquefois elle a paru telle par le vomissement, on ne peut attribuer cet effet qu'au vice particulier des liqueurs de l'estomac ou des premières voies.

La bile verdâtre dans le plus grand nombre des animaux, est souvent à peu-près d'un vert-jaunâtre dans l'homme pendant l'état sain. Dans les maladies elle prend diverses couleurs selon leur nature; ainsi dans la maladie noire elle prend une couleur noirâtre; dans les fièvres inflammatoires elle paroît jaune, & elle change de couleur à raison des substances contenues dans l'estomac & dans les intestins, ou à raison des mouvemens spontanés qu'elle y éprouve. Par ces considérations, on conçoit comment un même homme peut vomir une bile tantôt jaune, tantôt verte, brune ou de telle autre couleur, selon les circonstances; enfin, selon les observations de Malpighi & de M. Haller *(a)*, elle est colorée avant que d'être amère.

La bile est miscible avec l'eau, l'esprit-de-vin & même avec l'huile, quoiqu'un peu plus difficilement, propriété qui n'appartient qu'aux corps savonneux; comme eux s'unissant avec les huiles, elle est lixivielle & propre à ôter les taches; enfin elle s'unit intimément avec les gommes & les résines,

---

(a) Elementa Physiologiæ, tom. VI, lib. XXIII, pag. 548.

& les rend ainsi miscibles à l'eau ; à raison de ces propriétés elle devient miscible avec tous les corps. Il résulte de cette solubilité de la bile avec l'eau, l'esprit-de-vin & l'huile, qu'elle est un véritable savon animal, liquide, & qu'elle en doit avoir les propriétés.

Si on recherche la nature de la bile par son analyse chimique, ou en la mêlant avec différentes substances, on est convaincu qu'elle contient une assez grande quantité d'huile inflammable & un peu de sel alkali volatil. Le savon qu'elle forme a donc pour base une huile ténue, jointe à un sel lixiviel qui se volatilise par le feu. Si cette huile vient à s'épaissir avec ce sel, elle forme un savon concret, dans lequel on retrouve les mêmes propriétés, ainsi qu'on peut s'en convaincre par l'analyse des pierres ou concrétions biliaires.

Curieux de connoître plus distinctement l'analyse de la bile & les principes qu'elle contient, j'ai cru devoir faire diverses recherches sur cette liqueur, soit par son mélange avec d'autres liqueurs, soit par son analyse, soit enfin en considérant ses effets dans l'économie animale. Deux hommes distingués par leurs connoissances en Chimie & en Pharmacie (M.rs Pia & Cadet) m'ont aidé de leurs lumières, & voici quel a été le résultat de nos expériences.

Les acides minéraux convertissent la bile en un *coagulum* d'un vert plus ou moins foncé. L'acide végétal mêlé avec elle la coagule aussi; digérés ensemble, il en change la couleur jaune en un vert sale. Tous ces *coagulum* privés, à une douce chaleur, d'une partie de leur humidité, paroissent être de la nature des résines artificielles résultantes de la combinaison des huiles avec les acides minéraux ; de même que ces résines, ils s'enflamment & brûlent aisément.

L'huile de tartre par défaillance mêlée avec la bile forme une espèce de savon qui se dissout aisément dans l'eau. Cette dissolution étant saturée par un acide quelconque, il s'en sépare une substance grasse, verdâtre, qui se précipite au fond de la liqueur ; & qui, selon les apparences, n'est autre chose

que la partie grasse de la bile que l'acide dégage de cette espèce de savon, pour s'unir à l'alkali fixe avec lequel il a plus d'affinité. Cette décomposition est à peu-près semblable à celle du savon ordinaire, faite par la voie des acides; elle en diffère cependant en ce que dans l'une, la partie grasse se précipite comme étant plus pesante, au lieu que dans l'autre elle surnage la liqueur, étant plus légère.

L'alkali volatil s'unit parfaitement à la bile, sans la coaguler & sans en altérer la couleur.

La bile examinée par l'analyse chimique, est démontrée contenir beaucoup d'air: renfermée dans une cornue exposée à un feu très-médiocre, elle s'élève rapidement en grosses bulles, & passe entièrement dans le récipient; dégagée de cet air par une lente évaporation, distillée ensuite, elle fournit une très-grande quantité d'eau ou de flegme, une assez grande quantité d'huile inflammable, un peu de sel alkali volatil; & ce qui reste dans la cornue, est une matière boueuse ou charbonneuse, qui calcinée à l'air libre, ne présente qu'une pure terre.

D'après ces expériences, il auroit été facile de prononcer sur la nature des principes qui constituent la bile; mais dans la crainte que l'alkali volatil que l'on retire par sa distillation, ne lui appartînt pas, & qu'il ne fût un nouveau composé produit du feu, comme il arrive dans la distillation du tartre, ou par un commencement de fermentation spontanée, pour ne laisser aucun doute sur la nature de cet alkali volatil, nous avons fait l'expérience suivante.

Nous avons versé de l'acide marin sur de la bile; ce mélange mis à digérer, à la plus douce chaleur d'un bain de sable, nous y avons remarqué un mouvement d'effervescence. Ce mouvement entièrement cessé, nous avons ajouté un peu d'eau distillée à ce mélange, lequel filtré a donné une liqueur transparente d'un beau vert.

L'ayant fait évaporer à une douce chaleur, il s'est formé à sa surface une pellicule saline assez considérable, qui a été

recueillie avec soin à mesure qu'elle paroissoit. Cette pellicule séchée à une très-douce chaleur, mise en poudre & mêlée avec de la chaux vive aussi en poudre, humectée ensuite avec un peu d'eau, a répandu aussi-tôt une odeur d'alkali volatil très-pénétrante; ce qui prouve sensiblement que cette pellicule saline est un sel ammoniac formé de l'acide marin & de l'alkali volatil qui étoit contenu dans cette bile.

Malgré l'expérience que nous venons de rapporter, nous ne conclurons pas que le principe salin qui constitue la bile, soit un alkali volatil; de nouvelles recherches ont prouvé le contraire. Il n'est point non plus acide, puisque la bile digérée avec le lait, ne le coagule pas, & que sa couleur ne seroit pas jaune, mais d'un vert plus ou moins foncé, selon le plus ou le moins d'acide qu'elle contiendroit.

Nous observerons que la bile abandonnée aux mouvemens spontanés, tend à la putréfaction, & prend une *odeur de musc*; & quoique, considérée dans son état naturel, elle ne soit ni acide ni alkaline, cependant elle pourroit quelquefois donner des marques de l'un ou l'autre caractère, à raison des changemens qu'elle subiroit, en se mêlant avec les liqueurs des premières voies. Cette considération ne doit pas être oubliée, quand on fait l'analyse de la *bile humaine*, la maladie dont le sujet est mort, pouvant contribuer beaucoup à ces variations.

Il résulte de ces expériences que la bile n'est autre chose qu'une huile épaisse, atténuée par un alkali fixe, au point de la rendre dissoluble dans l'eau, ce qui la fait regarder par ces différentes propriétés, & avec raison, comme une espèce de savon.

La bile dépose à la longue une terre jaune, que l'on peut considérer comme le principe qui contribue à la formation des pierres biliaires: toutes ces concrétions fournissent par la distillation, les mêmes principes que la bile, c'est-à-dire du flegme, de l'alkali volatil, beaucoup d'huile, & un principe terreux. Les concrétions qui se trouvent quelquefois dans les gros intestins, sont de la nature des pierres biliaires,

& donnent auſſi par l'analyſe, des principes ſemblables *(b)*.

Les expériences ſur la bile, qui viennent d'être rapportées, paroîtront peut-être peu utiles après le détail plein d'érudition qu'a donné, ſur cette matière, le célèbre M. Haller, dans ſa Phyſiologie. *(c)* Elles ſont à peu-près d'accord avec celles dont il y eſt mention; elles peuvent donc ſervir à les confirmer: cependant outre la différence des procédés, elles en préſentent encore, en ce que nous admettons dans la bile un alkali fixe, que quelques Auteurs ont ſemblé nier *(d)*.

Si on conſulte les expériences, il eſt conſtamment démontré, que la bile n'eſt point acide, tant qu'elle eſt bien conſtituée; elle ne paroît pas non plus alkaline, puiſqu'elle ne fermente pas avec les acides; mais quoique dans l'état ſain, elle paroiſſe avoir un caractère neutre, cependant elle contient un alkali qui ſe développe avec plus ou moins de facilité, ſelon les circonſtances. A raiſon de ces changemens, elle fermente avec les alimens dont nous uſons, en éprouvant un mouvement ſpontané dans les premières voies.

Nous avons d'abord démontré l'exiſtence d'un alkali volatil par la digeſtion d'un mélange d'acide marin avec la bile, & par le mélange d'une portion de cette matière avec la chaux vive; par cette raiſon il ne paroît pas qu'on puiſſe la révoquer en doute, lorſque cette bile a ſubi un commencement de fermentation. Mais l'alkali volatil ne ſe manifeſte point dans la bile renfermée dans la véſicule; cette liqueur ne ſe pourrit pas aiſément, tant qu'elle n'eſt point atteinte de l'air, & celle que nous avons miſe en uſage, ne paroiſſoit pas altérée. D'ailleurs la bile fait l'office de ſavon; perſonne ne lui conteſte cette propriété: ſi elle en a les uſages, elle doit donc en avoir la nature, & comme les ſavons, elle eſt formée d'une huile plus ou moins épaiſſe, & d'un alkali plus ou moins développé.

(b) *Voyez* l'Analyſe de ces pierres, par M. Cadet, *Hiſt. de l'Acad. Royale de Chirurgie*, in-4.° *vol. III, p. 15.*

(c) *Elementa Phyſiolog.* tom. VI, lib. XXIII, ſect. 3.

(d) *Ibid.* p. 577.

L'amertume propre de la bile, & l'extrême acrimonie dont elle est susceptible, prouvent encore en elle l'existence d'un sel qui devient aisément âcre & d'une nature alkalescente. Enfin ses usages intérieurs, pour la dissolution des alimens & leur digestion, même pour l'atténuation des autres humeurs du corps avec lesquelles elle se joint, sa propriété incisive, ses qualités discussives, atténuantes, résolutives, appliquée extérieurement, ont mérité à ce recrément une place parmi les remèdes utiles, & sont autant de preuves qui démontrent en elle l'existence d'un alkali plus ou moins développé *(e)*.

Si la bile ainsi éprouvée avec différentes substances, est susceptible de divers changemens, elle doit de même subir diverses mutations dans le corps humain, selon les liqueurs qui sont prédominantes, selon les altérations de ces mêmes liqueurs, selon les différens états du corps.

Quand on use habituellement d'alimens acescens ou de substances acides, la bile est verdâtre, plus épaisse, moins susceptible de putréfaction, moins fétide: c'est le caractère qu'elle paroît spécialement avoir dans les enfans. Au contraire, dans les adultes qui usent d'alimens plus disposés à la pourriture, la bile tend plus à la couleur jaune; elle est plus fétide, plus susceptible de putréfaction, sur-tout quand elle est mêlée avec les matières contenues dans les premières voies, & qu'elle y subit les changemens spontanés, inévitables par l'accès de l'air, & par la nature de ces matières. L'inspection des déjections bilieuses assure cette vérité.

Quand les liqueurs animales subissent différentes altérations, elles doivent les communiquer de même à la bile. Il n'est donc pas surprenant que dans certaines maladies, que par l'usage de quelque poison, dans la peste *(f)*, la bile ait présenté différentes couleurs.

Enfin l'action vasculaire étant différente, selon l'état de

(e) Dissert. Inaug. medic. de Bilis interno & externo usu medico, auctore Joan. Frider. Hufeland. *Jenæ, 1752*, & Haller *loco citato*.

(f) Haller, *tome VI, lib. XXIII, p. 547*.

santé

ſanté ou de maladie, la bile aura diverſes couleurs & ſubira diverſes altérations. C'eſt ainſi que quand l'action vaſculaire eſt foible & languiſſante, quand les liqueurs tendent à l'épaiſſiſſement, quand il y a des obſtructions au foie, la bile eſt verdâtre, ſe ſépare en moindre quantité; un acide prédominant paroît en être la cauſe, & la nature des remèdes plus ou moins âcres, ſalés, ſavonneux, propres à guérir ces maladies, concourt à prouver ce que nous venons d'établir. Si l'action vaſculaire eſt forte, la bile eſt plus jaune, plus fétide, plus abondante; on reconnoît à ces caractères la tendance à la pourriture; une odeur plus forte & pénétrante développe l'alkali volatil, & on ſait par expérience, que pour arrêter les progrès de cette dégénération, les boiſſons aigrelettes, ou les ſubſtances acidules, peuvent ſeules offrir un remède convenable.

En ſuivant ainſi la Nature, on peut apprécier les diverſes eſpèces d'altérations de la bile, & nous voyons en effet que dans l'eſpace d'une fièvre, l'inſpection des déjections bilieuſes démontre, ſelon les différens temps de la maladie, ſelon la conſtitution du malade, des variations qui ont le plus grand rapport avec les expériences que nous avons rapportées, qui les confirment, & qui peuvent ſervir à éclairer également la théorie & la pratique de la Médecine.

Ce qui a été expoſé ſur l'analyſe de la bile, peut donc fournir des vues utiles dans la pratique, en appréciant la nature de ce fluide, & par ſa couleur & par l'état actuel du corps. Sa couleur verte indique la préſence d'un acide dans les premières voies, ou en géneral dans toute l'habitude du corps; dans cet état, elle a toujours peu d'odeur; on remarque qu'elle eſt épaiſſe, tenace, mucilagineuſe & elle ne coule qu'en petite quantité. Sa couleur jaune, ſa fétidité, démontrent ſa tendance à la pourriture & le développement de l'alkali. Dépouillée d'une partie de ſon huile, par l'action des vaiſſeaux dans une fièvre ardente, elle prend un caractère d'acrimonie qui irrite le canal inteſtinal, & peut devenir la ſource de beaucoup d'accidens.

Ces connoiſſances & quelques autres, tirées de l'inſpection des déjections bilieuſes, établiſſent des indications curatives, & dirigent utilement la pratique ſur les moyens de guériſon. Ainſi dans certains cas, les acides oppoſent un remède ſalutaire à l'acrimonie bilieuſe & la détruiſent; les remèdes huileux ſerviront à la diſſoudre, quand elle eſt trop tenace; les ſavonneux conviendront dans le cas d'un acide prédominant, & les délayans ſimples ou aigrelets, ſuffiront dans le cas d'acrimonie ſimple, pour modérer ſon action ſur le canal inteſtinal.

Ces expériences m'ont paru d'autant plus intéreſſantes qu'elles ont des rapports avec l'économie animale, & ſous ce point de vue, j'ai cru devoir les préſenter à l'Académie dont les travaux ſont conſacrés à la perfection des Sciences & à l'utilité.







